Treeningvõistlus „Balti tee 2018“ võistkonnale

2. novembril 2018

1. Lahenda võrrand
$$3\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}=7.$$

2. Lahenda võrrandisüsteem
$$\begin{cases} x+y+xy=19 \\ y+z+yz=11 \\ z+x+zx=14. \end{cases}$$

3. Kas leidub kolm erinevat reaalarvu x, y, z, mis rahuldavad võrdust
$$x^3y^4+y^3z^4+z^3x^4=x^4y^3+y^4z^3+z^4x^3?$$

4. Reaalarvud x, y, z, c rahuldavad võrrandisüsteemi
$$\begin{cases} x(y+z)=20 \\ y(z+x)=13 \\ z(x+y)=c^2. \end{cases}$$
Leia suuruse c^2 kõik võimalikud väärtused.

5. Tõesta, et kõigi positiivsete reaalarvude x, y, z puhul kehtib võrratus
$$x^2+y^2+z^2+2xyz+1\geq 2(xy+yz+zx).$$

6. Liites kuus järjestikust naturaalarvu, millest ükski ei jagu 7-ga, saame tulemuseks täisarvu ruudu $S=n^2$.
   a) Leia kõik sellised neljakohalised arvud S.
   b) Kui palju leidub selliseid kuuekohalisi arve S?

7. Kui palju leidub selliseid naturaalarve k, et arvude 6^6, 8^8 ja k vähim ühiskordne on 12^{12}?

8. Antud on naturaalarv n. Nii arvu n kui ka arvu $n+1$ numbrite summa jagub 101-ga.
   a) Leia vähemalt üks selline naturaalarv n.
   b) Leia vähim selline naturaalarv n.

9. Leia arvu $10^{2013}-1$ kõik naturaalarvulised tegurid, mis ei ole suuremad kui
   a) 9;
   b) 99.

10. Tõesta, et kui täisarvud a, b, c rahuldavad võrdust
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=5,$$
siis korrutis abc on täisarvu kuup.

11. Ruudustikus mõõtmetega 100×100 on igasse ruutu kirjutatud üks arv. Kõige ülemise rea arvud vasakult paremale on 0, 1, 2, ..., 99. Kõige vasakpoolsema veeru arvud ülevalt alla on samuti 0, 1, 2, ..., 99. Igas 2×2 ruudustikus olevate arvude summa on 20. Mis arv on ruudustiku alumises paremas ruudus?

12. Ruudustikus mõõtmetega 13×13 on kõik ruudud värvitud valgeks. Ühe käiguga võib valida 5 kõrvutist ühes reas asuvat või ühes veerus asuvat ruutu ja muuta neist iga valge ruudu värv mustaks ja iga musta ruudu värv valgeks. Kas selliste käikudega saab värvida kõik ruudud mustaks?

13. a) Kas arvud $1, 2, \ldots, 30$ saab jaotada 10 kolmikuks (x, y, z) nii, et igas kolmikus oleksid vahed $y - x$ ja $z - y$ kaks erinevat arvu hulgast $\{9, 10, 11\}$?
    b) Kas arvud $1, 2, \ldots, 33$ saab jaotada 11 kolmikuks (x, y, z) nii, et igas kolmikus oleksid vahed $y - x$ ja $z - y$ kaks erinevat arvu hulgast $\{10, 11, 12\}$?

    (Kummalgi juhul tuleb ära kasutada kõik 30 või 33 arvu.)

14. Maas on 9 kivikuhja (igas kuhjas vähemalt üks kivi). Igas kahes kuhjas on erinev arv kivisid ja kõige suuremas kuhjas on n kivi. Iga kuhja kivid on võimalik jaotada ülejäänud kuhjade vahel nii, et järelejäänud 8 kuhja koosnevad samast arvust kividest. Samuti, iga kahe kuhja kivid on võimalik jaotada ülejäänud kuhjade vahel nii, et järelejäänud 7 kuhja koosnevad samast arvust kividest. Leia vähim selline n.

15. Ruudustikus mõõtmetega 2013×2013 on mõned lahtrid märgistatud. Igas alamruudustikus mõõtmetega 19×19 on vähemalt 21 märgistatud lahtrit. Milline on vähim märgistatud lahtrite arv?

16. Kolmnurga ABC kõrgustest on moodustatud kolmnurk $A_1B_1C_1$. Kolmnurga $A_1B_1C_1$ kõrgustest on moodustatud kolmnurk $A_2B_2C_2$. Tõesta, et kolmnurgad ABC ja $A_2B_2C_2$ on sarnased.

17. Nelinurga $ABCD$ diagonaalid lõikuvad punktis O. Kolmnurkade ABC ja ABD ümbermõõdud on võrdsed. Kolmnurkade ACD ja BCD ümbermõõdud on samuti võrdsed. Tõesta, et ka kolmnurgad AOD ja BOC ümbermõõdud on võrdsed.

18. Ruudu $ABCD$ tipp A ja külje CD keskpunkt on sümmeetrilised sirge l suhtes. Leia kahe nelinurga, milleks sirge l ruudu jaotab, pindalade suhe.

19. Teravnurkse kolmnurga ABC tippudest A ja B tõmmatud kõrguste aluspunktid on vastavalt A_1 ja B_1. Kolmnurga ABC ümberringjoon ω ja sirge A_1B_1 lõikuvad punktides A_2 ja B_2. Ringjoonele ω punktidest A_2 ja B_2 tõmmatud puutujad lõikuvad punktis C_1. Tõesta, et sirge CC_1 läbib ringjoone ω keskpunkti.

20. Teravnurkse kolmnurga ABC ümberringjoonele ω kolmnurga tippudest B ja C tõmmatud puutujad lõikuvad punktis P. Punktist P sirgetele AB ja AC tõmmatud ristsirgete aluspunktid on vastavalt D ja E. Tõesta, et kolmnurga ADE kõrguste lõikepunkt langeb kokku lõigu BC keskpunktiga.

Lahendused

1. *Vastus:* 6.

   Viime teise ruutjuurega avaldise paremale, tõstame pooled ruutu ja koondame sarnased liikmed. Nii saame võrrandi $7\sqrt{x-2} = 4x - 10$. Asendades $\sqrt{x-2} = t$, $x = t^2 + 2$, tekib ruutvõrrand $4t^2 - 7t - 2 = 0$, mille ainus positiivne lahend on $t = 2$. Siit $x = 6$.

2. *Vastus:* $(x,y,z) = (4,3,2)$ või $(-6,-5,-4)$.

   Olgu $x+1 = a$, $y+1 = b$ ja $z+1 = c$. Liites esimesele võrrandile 1, saame võrrandi $(x+1)(y+1) = 20$. Toimides sarnaselt teiste võrranditega, saame võrrandisüsteemi $ab = 20$, $bc = 12$, $ca = 15$. Korrutame võrrandid ja võtame ruutjuure: $abc = 60$ või -60. Esimesel juhul leiame võrrandi $bc = 12$ abil $a = 5$ ja $x = 4$ ning analoogiliselt $y = 3$ ja $z = 2$. Teisel juhul saame sarnaselt $x = -6$, $y = -5$ ja $z = -4$.

3. *Vastus:* ei.

   Rühmitades avaldises $A = x^3y^4 + y^3z^4 + z^3x^4 - x^4y^3 - y^4z^3 - z^4x^3$ liikmeid, saame järjest välja eraldada tegurid $x-y$, $y-z$ ja $z-x$. Täpsemalt, kehtib võrdus $2A = (x-y)(y-z)(z-x)(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + (xy+yz+zx)^2)$. Kui $A = 0$ ja x, y, z on erinevad arvud, siis selle avaldise viimase teguri moodustav ruutude summa on 0. Siit $xy = yz = zx = 0$, mis tähendab, et vähemalt kaks arvudest x, y, z on võrdsed nulliga. Vastuolu.

4. *Vastus:* $c^2 \in (7;33)$.

   Vaatleme võrrandites arve xy, yz ja zx. Esialgse võrrandisüsteemi põhjal on lihtne näha, et kõik need arvud on positiivsed: iga kahe summa on mittenegatiivne ning kõigi kolme korrutis on mittenegatiivne; väärtuste $x = 0$, $y = 0$ või $z = 0$ puhul pole võrrandisüsteem rahuldatud.

   Liites ja lahutades võrrandeid, saame avaldada $xy = (33 - c^2)/2 > 0$. Analoogiliselt $yz = (c^2 - 7)/2$ ja $zx = (c^2 + 7)/2$. Siit saame $c^2 < 33$ ja $c^2 > 7$. Korrutades viimastest võrdustest kaks esimest, jagades kolmandaga ja võttes ruutjuure, näeme, et juhul $c^2 \in (7;33)$ süsteemil lahend leidub:

   $$x = \sqrt{\frac{(33-c^2)(c^2+7)}{2c^2-14}}, \quad y = \sqrt{\frac{(33-c^2)(c^2-7)}{2c^2+14}}, \quad z = \sqrt{\frac{(c^2+7)(c^2-7)}{66-2c^2}}.$$

5. Võrratus on sümmeetriline x, y, z suhtes, seega võime eeldada, et $x > y > z$.

   Kui $y \geq 1$, siis on võrratus samaväärne võrratusega

   $$(x-y)^2 + (z-1)^2 + 2z(x-1)(y-1) \geq 0.$$

   Kui $y < 1$, siis on võrratus samaväärne võrratusega

   $$(x-y)^2 + (x-1)^2 + 2x(1-y)(1-z) \geq 0.$$

   Teine lahendus. Võrratuse saab kirjutada kujul

   $$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + 2(x-1)(y-1)(z-1) \geq 0.$$

Kui avaldistest $x-1$, $y-1$, $z-1$ täpselt 0 või 2 on negatiivsed, siis võrratus kehtib. Seega eeldame, et negatiivseid on nende hulgas 1 või 3. Olgu üldisust kitsendamata $x-1$ negatiivne, sel juhul on $(y-1)(z-1) \geq 0$. Kuna x on positiivne, siis $-1 < x-1 < 0$, mistõttu $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+2(x-1)(y-1)(z-1) > (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-2(y-1)(z-1) = \big((x-1)^2+((y-1)-(z-1))^2\big) \geq 0$.

6. *Vastus:* a) 3969; b) 16.

   Teame, et $(7k+1)+(7k+2)+\ldots+(7k+6) = 21(2k+1) = n^2$. Paaritu arv $2k+1$ peab jaguma 21-ga, seega $n^2 = 21^2m^2$, kus m on paaritu arv. Iga sellise m puhul saame leida 6 otsitavat arvu, võttes $2k+1 = 21m^2$.

   a) Sobib $m=3$, siis $n^2 = 3969 = 63^2$. Kui $m=1$ või $m>3$, siis nõutavat arvu ei leidu ($21^2 \cdot 5^2 > 100^2$).

   b) Peame lahendama võrratused $100000 \leq 21^2m^2 \leq 999999$. Mitu erinevat paaritut arvu neid rahuldab?

7. *Vastus:* 25.

   Arvu $12^{12} = 2^{24}3^{12}$ ainukesed algtegurid on 2 ja 3, seega $k = 2^a3^b$ (kus a ja b on mittenegatiivsed astendajad). Kehtib $6^6 = 2^63^6$ ja $8^8 = 2^{24}(3^0)$. Vähimas ühiskordses on algteguri 2 aste 2^{24} suurim arvudest 2^a, 2^6, 2^{24}. Analoogiliselt 3^{12} on suurim arvudest 3^b, 3^6, 3^0. Seega $0 \leq a \leq 24$ ja $b = 12$.

8. *Vastus:* b) $299999999998\underbrace{999\ldots9}_{45 \text{ numbrit}}$.

   Kui arv $n+1$ lõpeb $k \geq 0$ nulliga, siis arv n lõpeb k üheksaga ning neile eelnev number on arvu $n+1$ vastavast numbrist ühe võrra väiksem (ja veel eelnevad numbrid on samad). Olgu s arvu $n+1$ numbrite summa. Siis arvu n numbrite summa on $s+9k-1$. Seega $9k-1$ jagub 101-ga, mistõttu vähim k on 45 ($101 \cdot 4 = 9 \cdot 45 - 1$). Vähima arvu $n+1$ saame nii, et leiame vähima arvu m, mille numbrite summa s jagub 101-ga, ning kirjutame selle lõppu 45 nulli. Arvu m saamiseks võtame vähima väärtuse $s = 101 = 2+9\cdot 11$ ja paneme lõppu võimalikult suured arvud (üheksad) ning esimesele kohale võimalikult väikese arvu. Seega $m = 299999999999$ (ei lõpe nulliga, seega tingimus kehtib väärtusel $k = 45$).

9. *Vastus:* a) 1, 3, 9; b) 1, 3, 9, 27, 37, 67.

   Arv $10^{2013}-1 = (10^3)^{671} - 1^{671}$ jagub arvuga $10^3 - 1 = 37 \cdot 27$ ehk 37-ga ja 27-ga (ja 1-ga, 3-ga, 9-ga). Arvutus mooduli 67 järgi näitab, et $10^{33}-1$ ning seega ka $10^{2013}-1 = (10^{33})^{61} - 1^{61}$ jagub 67-ga (näiteks teades 10^{16} mod 67, saame kohe leida 10^{32} mod 67). Kui otsitav tegur koosneks ainult saadud algteguritest 3, 37 või 67, siis oleks ta kas 37, 67, 74 või kolme aste 3, 9, 27, 81. Kontrollimata on arvud 74 ja 81. Arv 74 ei sobi, sest $10^{2013}-1$ ei jagu 2-ga, ning arv 81 ei sobi, sest $10^{2013}-1 = 9 \cdot \underbrace{111\ldots1}_{2013 \text{ numbrit}}$ ja teine tegur ei jagu 9-ga ristsumma põhjal.

   Jääb tõestada, et arvul $10^{2013}-1$ pole ühtegi muud sobivat algtegurit. Kui $10^{2013}-1$ jagub mingi algarvuga $p \neq 2, 5$, siis Fermat' väikese teoreemi põhjal $10^{p-1}-1$ ja seega ka $10^{\text{SÜT}(p-1,2013)}-1$ jagub algarvuga p. Et $d = \text{SÜT}(p-1, 2013) < 99$ on arvu 2013 tegur, siis $d = 1, 3, 11, 33$ või 61. Arv d on ka arvu $p-1 < 99$ tegur.

   - Kui $d = 61$, siis $p-1 = 61$ ja $p = 62$ ei ole algarv.
   - Kui $d = 33$, siis $p-1 = 33$ või 66, millest $p = 67$.

- Kui $d = 11$, siis $p - 1 = 11$, 22, 33, 44, 55, 66, 77 või 88, millest $p = 23$, 67 või 89. Kongruentside abil on lihtne leida, et $10^{11} - 1$ ei jagu 23 ega 89-ga.
- Kui $d = 1$ või 3, siis kontrollime otse $10^d - 1$ algtegureid.

10. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $\text{SÜT}(a,b,c) = 1$ (mõtle, miks). Valime arvu abc suvalise algteguri p. Piisab tõestada, et p suurim aste, millega abc jagub, on p^{3n}, $n \in \mathbb{N}$. Eeldame (jällegi üldisust kitsendamata), et p ei ole c tegur, aga on a või b tegur. Võrdus $5abc = ab^2 + bc^2 + ca^2$ näitab, et mõlemal juhul on p nii a kui ka b tegur.

    Olgu p^α ja p^β arvu p suurimad astmed, millega a ja b jaguvad. Arv $bc^2 + ca^2 = 5abc - ab^2$ jagub arvuga ab, seega ka arvuga $p^{\alpha+\beta}$. Kuid summa $bc^2 + ca^2$ esimene liidetav jagub ainult arvuga p^β. Kui teine liidetav ca^2 ei jaguks arvuga p^β, siis ei jaguks ka summa sellega, vastuolu. Kui teine liidetav aga jaguks suurema astmega kui p^β, siis summa jaguks ainult arvuga p^β, jälle vastuolu. Seega ca^2 jagub täpselt arvuga p^β, millest $2\alpha = \beta$. Järelikult abc jagub arvuga $p^{\alpha+\beta} = p^{3\alpha}$, aga mitte kõrgema astmega. Seda oligi tarvis tõestada.

    Teine võimalus. Kui $\text{SÜT}(a,b,c) = d$, siis olgu $\text{SÜT}(a,b)/d = d_3$, $\text{SÜT}(b,c)/d = d_1$, $\text{SÜT}(c,a)/d = d_2$. Siis $a = dd_2d_3x$, $b = dd_3d_1y$, $c = dd_1d_2z$, kus x, y, $z \in \mathbb{Z}$. Pannes need väärtused võrrandisse, saame näidata, et x jagub d_2-ga ja d_2 jagub x-ga. Järelikult $x = \pm d_2$ ning analoogiliselt $y = \pm d_3$, $z = \pm d_1$. Seega $abc = (\pm dd_1d_2d_3)^3$.

11. *Vastus:* -178.

    Vaatleme kahte kõige vasakpoolsemat veergu ning neisse kuuluvaid 2×2 ruute ja 1×2 ristkülikuid. Kattuvate ruutude arvude summad on võrdsed, seetõttu on kõigis kõigis 1×2 ristkülikutes, mis sisaldavad ruute arvudega $(1,?)$, $(3,?)$, $\ldots (99,?)$, arvude summad võrdsed. Esimese küsimärgi kohale kirjutame $20 - 0 - 1 - 1 = 18$, seega teise veeru viimane arv on $1 + 18 - 99 = -80$.

    Nüüd vaatleme 2., 4., ..., 100. veergu. Ristkülikutes mõõtmetega 2×1 on jälle arvude summad võrdsed. Seega kui nende veergude esimesete ridade arvud moodustavad aritmeetilise jada vahega 2: 1, 3, ..., 99, siis teise rea arvud moodustavad aritmeetilise jada vahega -2, kolmanda rea arvud jada vahega 2 jne. Viimases reas on vahe -2: -80, -82, ..., $-80 + (-2) \cdot (50 - 1) = -178$.

12. *Vastus:* ei.

    Nummerdame read ja veerud järjest numbritega 1-st 13-ni. Lahtrisse (i, j) kirjutame summa $i + j$ jäägi jagamisel 5-ga: 0, 1, 2, 3, 4. Sellega jagunevad lahtrid 5 ebavõrdse suurusega rühmaks, näiteks nulliga lahtreid on 34, ühega lahtreid aga 33. Igal käigul vahetub värv täpselt ühes nulliga lahtris ja täpselt ühes ühega lahtris. Alguses on nii nulliga mustade lahtrite arv kui ka ühega mustade lahtrite arv 0, mis on paarisarv. Seega pärast esimest käiku on mõlemad arvud paaritud, pärast järgmist käiku mõlemad paaris jne. Seega ei saa me kunagi nendeks arvudeks saada 34 ja 33. Järelikult kõiki lahtreid mustaks värvida pole võimalik.

13. *Vastus:* a) jah; b) ei.

    a) $(1,12,21)$, $(3,14,23)$, $(5,16,25)$, $(7,18,27)$, $(9,20,29)$, $(2,11,22)$, $(4,13,24)$, $(6,15,26)$, $(8,17,28)$, $(10,19,30)$.

    b) Oletame, et arvud saab nii jaotada. Vaatleme korrapärast 33-nurka ja nummerdame tipud järjest. Arvukolmikut esitab vastavate tippudega kolmnurk. Paneme tähele, et kõik need kolmnurgad on võrdsed: ühendatud tippude paari vahele jääb alati 11, 10 ja 9 hulknurga tippu. Vaatleme suvalist kolmnurka ja tema pikimat külge. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et selle külje otspunktid on tipud 1 ja 13 (nummerdust päripäeva nihutades saame vajaliku omadusega kolmnurga).

Tipp 2 peab olema ühendatud ühega tippudest 12, 13 ja 14. Tipp 13 on juba hõivatud. Kui tipp 2 ühendada tipuga 14, siis tipp 3 peaks olema ühendatud tipuga 15, tipp 4 tipuga 16 jne kuni tipp 12 tipuga 24. Kuid nii peaksime saama 12 erinevat kolmnurka. Seega tuleb tipp 2 ühendada tipuga 12. Teiselt poolt, nii 2 kui ka 12 peavad olema ühendatud tipuga 23 või 24 ja nii 1 kui ka 13 samuti tipuga 23 või 24. On kaks võimalust, mõlemal juhul tekib meil kolmnurgapaar: ühe kolmnurga pikim külg on paralleelne teise lühima küljega ja vastupidi.

Seega jagunevad kõik kolmnurgad paarideks. Aga nii peab neid olema paarisarv, mitte 11.

14. *Vastus:* 42.

Tingimus on rahuldatud kuhjade puhul, mille kivide arvud on 42, 41, 40, 38, 37, 36, 35, 34, 33.

Olgu kivide arvud kuhjades $x_1 < x_2 < \ldots < x_9$. Jaotades vähima kuhja kivid ülejäänud kuhjade vahel ära nii, et kõik kuhjad muutuksid võrdseks, tuleb x_8-le lisada vähemalt 1, x_7-le vähemalt 2 jne kuni x_2-le vähemalt 7. Seega $x_1 \geq 1+2+\ldots+7=28$ ja $x_1+x_2+\ldots+x_9 \geq 28+29+\ldots+36=288$. Et kivid saab jaotada nii 7 kui ka 8 võrdseks kuhjaks, siis jagub kivide koguarv 56-ga ning $x_1+x_2+\ldots x_9 \geq 336$. Kui $n \leq 41$, siis $x_1+x_2+\ldots+x_9 \leq 41+40+\ldots+33 < 336$. Järelikult $n \geq 42$.

15. *Vastus:* 233625.

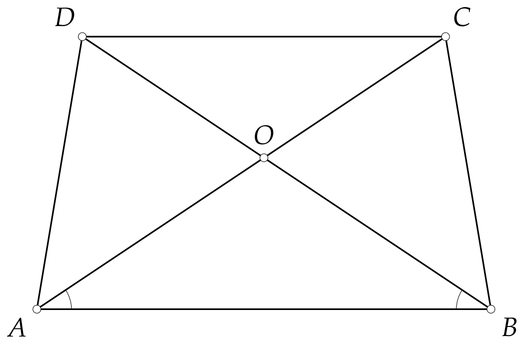
Määrame lahtritele koordinaadid (i, j), $1 \leq i, j \leq 2013$ tavalisel viisil. Vastuse saame juhul, kui märgistame järgmised lahtrid:

- $(19k, 19l+1)$, $(19k, 19l+2)$, $k = 1, 2, \ldots, 105$, $l = 0, 1, \ldots, 105$;
- $(m, 19n)$, $m = 1, 2, \ldots, 2013$, $n = 1, 2, \ldots, 105$.

Induktsiooniga k järgi tõestame järgmise väite: ruudustikus, mille mõõtmed on $(19k-1) \times (19k-1)$, tuleb ülesande tingimuste rahuldamiseks märgistada vähemalt $(k-1)(21k-1)$ ruutu. Sellest järeldub, et vähem kui 233625 ruutu märgistada pole võimalik.

16. Kui kolmnurga ABC külgede pikkused on a, b, c ja pindala on S, siis selle kolmnurga kõrguste pikkused on $a_1 = \frac{2S}{a}$, $b_1 = \frac{2S}{b}$, $c_1 = \frac{2S}{c}$. Kui kolmnurga $A_1B_1C_1$ pindala on S_1, siis tema kõrguste pikkused on $a_2 = \frac{2S_1}{a_1} = a \cdot \frac{S_1}{S}$, $b_2 = \frac{2S_1}{b_1} = b \cdot \frac{S_1}{S}$, $c_2 = \frac{2S_2}{c_1} = c \cdot \frac{S_1}{S}$. Seega kolmnurkade ABC ja $A_2B_2C_2$ küljepikkused on võrdelised: $\frac{a_2}{a} = \frac{b_2}{b} = \frac{c_2}{c} = \frac{S_1}{S}$ ehk kolmnurgad on sarnased.

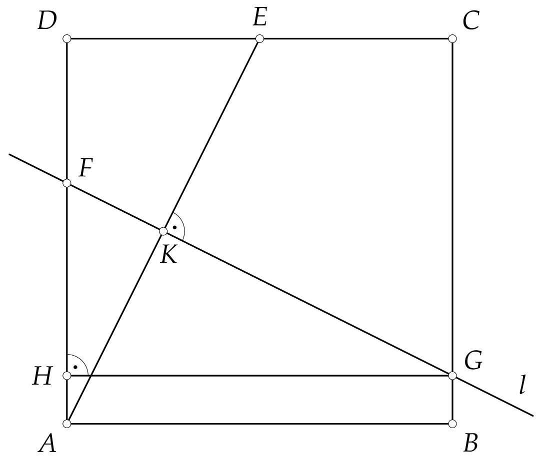
17. On antud, et $|AB|+|BC|+|CA| = |AB|+|BD|+|DA|$ ja $|BC|+|CD|+|DB| = |CD|+|DA|+|AC|$. Neist võrdustest järeldub, et $|AC| = |BD|$ ja $|BC| = |DA|$. Seega on kolmnurgad ABC ja BAD sarnased kolme külje põhjal ehk $\angle ABD = \angle BAC$. Järelikult on kolmnurk AOB võrdhaarne: $|OA| = |OB|$. Analoogiliselt $|OC| = |OD|$, millest $|AO|+|OD|+|DA| = |BO|+|OC|+|CB|$.



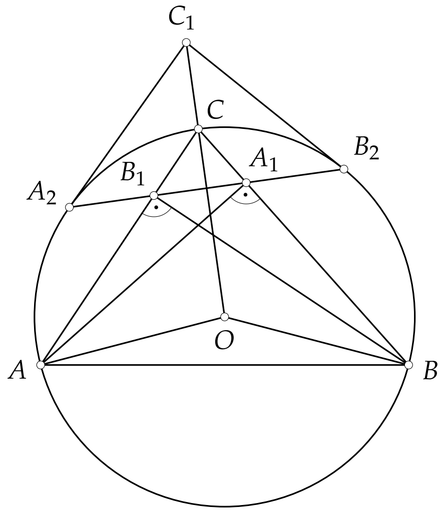
18. *Vastus:* 3 : 5.

    Olgu a ruudu küljepikkus, E lõigu CD keskpunkt, F ja G vastavalt sirge l lõikepunktid külgedega AD ja BC, H punktist G küljele AD tõmmatud ristlõigu aluspunkt ning K lõigu AE keskpunkt, mida läbib sümmeetriatelg l. Nurkade võrdsuse tõttu on kolmnurgad ADE ja AKF sarnased, analoogiliselt on ka kolmnurgad AKF ja GHF sarnased. Siis aga ADE ja GHF on isegi võrdsed ($|AD| = |GH| = a$). Järelikult $|FH| = |DE| = a/2$ ning et $|AF|/|AK| = |AE|/|AD|$, siis $|AF| = |AK| \cdot |AE|/|AD| = |AE|^2/(2|AD|) = (|AD|^2 + |DE|^2)/(2a) = 5a/8$, mistõttu $|GB| = |AH| = |AF| - |FH| = a/8$.

    Nelinurk $ABGF$ on täisnurkne trapets, seega selle nelinurga pindala on $\frac{1}{2}|AB| \cdot (|AF| + |BG|) = 3a^2/8$, analoogiliselt nelinurga $CDFG$ pindala on $5a^2/8$. Otsitav pindalade suhe on 3 : 5.



19. Märkides kolmnurga ABC tippude A, B, C juures olevaid nurki vastavalt tähtedega α, β, γ ja ringjoone ω keskpunkti tähega O, saame lihtsasti $\angle BOC = 2\angle BAC = 2\alpha$ (kesknurk ja piirdenurk), $\angle OCB = (180° - \angle BOC)/2 = 90° - \alpha$ (kolmnurga BOC võrdhaarsus), $\angle AA_1B_1 = \angle B_1BA = 90° - \alpha$ (nelinurk ABA_1B_1 on kõõlnelinurk), $\angle B_1A_1C = 90° - \angle AA_1B_1 = \alpha$. Seega nurk sirgete OC ja A_1B_1 vahel on $180° - \angle B_1A_1C - \angle OCB = 90°$. Järelikult on sirge OC risti sirgega A_2B_2. Ent ristsirge punktist O lõigule A_2B_2 läbib selle lõigu keskpunkti ja on seega võrdkülgse kolmnurga $A_2B_2C_1$ kõrgus ($|A_2C_1| = |B_2C_1|$ kui samast punktist tõmmatud puutujalõigud). Seega punktid O, C, C_1 asuvad kõik sellel ristsirgel.



20. Näitame, et kolmnurga ADE tipust E tõmmatud kõrgus läbib lõigu BC keskpunkti M (tipust D tõmmatud kõrguse puhul on tõestus analoogiline). Konkreetsemalt, näitame, et sirged EM ja AB on risti.

    Kolmnurk BPC on võrdhaarne ($|PB| = |PC|$ kui puutujalõigud), seega on lõigud MP ja BC risti. Järelikult $\angle CMP + \angle PEC = 180°$, nelinurk $CEPM$ on kõõlnelinurk ning $\angle PEM = \angle PCM = \angle BAC$ (viimane võrdus kehtib asjaolu tõttu, et PC puutub ringjoont ω kolmnurga ABC tipus). Lõpuks, nurk EM ja AB vahel on $180° - \angle MEA - \angle BAC = 180° - (90° - \angle MEP) - \angle BAC = 90°$.