Treeningvõistlus „Balti tee 2017“ võistkonnale

7. novembril 2017

1. Leia võrrandisüsteemi
$$\begin{cases} (x+y)(x^2-y^2)=4 \\ (x-y)(x^2+y^2)=\dfrac{5}{2} \end{cases}$$
kõik reaalarvulised lahendid (x,y).

2. Reaalarvud x, y, z, t rahuldavad võrrandisüsteemi
$$\begin{cases} x(6-y)=9 \\ y(6-z)=9 \\ z(6-t)=9 \\ t(6-x)=9. \end{cases}$$
   a) Tõesta, et x, y, z, $t > 0$.
   b) Leia võrrandisüsteemi kõik reaalarvulised lahendid (x,y,z,t).

3. Leia kõik funktsioonid $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis rahuldavad võrdust
$$x(f(x)+f(-x)+4)+2f(x)+2=0$$
iga $x \in \mathbb{R}$ puhul.

4. Leia võrrandisüsteemi
$$\begin{cases} x^3+y=4z \\ x+y^3=z \\ xy=-1 \end{cases}$$
kõik reaalarvulised lahendid (x,y,z).

5. Positiivsed arvud x, y, z rahuldavad võrdust $xyz=1$. Tõesta võrratus
$$\frac{x^2+y^2+z}{x^2+2}+\frac{y^2+z^2+x}{y^2+2}+\frac{z^2+x^2+y}{z^2+2} \geq 3.$$

6. Arv p on algarv ja arv $3p+10$ on kuue järjestikuse naturaalarvu ruutude summa. Tõesta, et $p-7$ jagub 36-ga.

7. Täisarvude hulka tähistame sümboliga $\mathbb{Z}$.
   a) Kas suvaliste võrdsete positiivsete täisarvude a ja b puhul leiduvad sellised reaalarvud $x \notin \mathbb{Z}$ ja $y \notin \mathbb{Z}$, et $x+y \in \mathbb{Z}$ ja $ax+by \in \mathbb{Z}$?
   b) Kas suvaliste erinevate positiivsete täisarvude a ja b puhul leiduvad sellised reaalarvud $x \notin \mathbb{Z}$ ja $y \notin \mathbb{Z}$, et $x+y \in \mathbb{Z}$ ja $ax+by \in \mathbb{Z}$?

8. Märgime naturaalarvu a numbrite summat tähisega $S(a)$. Kas leidub selline naturaalarv n, et
$$S(n)\cdot S(n+1)=465?$$

9. Naturaalarvud a ja b rahuldavad tingimust
$$a-b=5b^2-4a^2>0.$$
Tõesta, et $a-b$ on täisarvu ruut.

10. Naturaalarvu N iga positiivse teguri d puhul (kaasa arvatud 1 ja N) on arv $d+2$ algarv. Mitu positiivset tegurit saab naturaalarvul N maksimaalselt olla?

11. Karbis on 100 kaarti, mis on nummerdatud järjestikuste arvudega 1, 2, 3, …, 100. Vähemalt mitu kaarti tuleb karbist välja võtta, et võetud kaartide numbrite korrutis jaguks kindlasti 192-ga?

12. 100×100-laua alumise vasaku 3×3-osaruudustiku ruutudele pannakse 9 nuppu. Iga käiguga võib nupp hüpata üle naaberruudu, millel asub nupp, vahetult selle taga asuvale vabale ruudule. (Naaberruut on ruut, millel on nupu ruuduga ühine serv.) Kas nende käikudega on võimalik saavutada seis, kus nupud katavad kõik ülemise vasaku 3×3-osaruudustiku 9 ruutu?

13. Vaatleme hulga $\{1,2,3,\ldots,101\}$ suvalist 2^{51} erinevat alamhulka. Tõesta, et vähemalt üks nendest alamhulkadest on mingi kahe teise alamhulga ühendi alamhulk.

    Märkus. Kahe hulga A ja B ühend on hulk, mis koosneb parajasti kõigist nendest elementidest, mis kuuluvad vähemalt ühte hulkadest A või B. Hulga alamhulgad on ka tühi hulk ja hulk ise.

14. Ruudus mõõtmetega 12×12 on märgitud 241 punkti. Mõned punktid on punased, ülejäänud sinised. Tõesta, et leidub ring diameetriga 5, mis katab vähemalt 11 sama värvi punkti.

15. Viie jalgpallimeeskonna turniiril mängib iga meeskond iga ülejäänuga ühe mängu. Võit annab 5 punkti, kaotus 0 punkti, seisuga 0:0 viik 1 punkti ja muu seisuga viik 2 punkti. Lõpptabelis on meeskondade punktisummad viis järjestikust naturaalarvu. Milline on vähim väravate arv, mis võidi sellel turniiril lüüa?

16. Kumera nelinurga $ABCD$ sisepiirkonnas märgitakse punkt X. Kas võrdused $|AX| = |AD|$, $|BX| = |BA|$, $|CX| = |CB|$ ja $|DX| = |DC|$ saavad kehtida samal ajal?

17. Kolmnurgas ABC on $\angle ABC = 90°$, $|AB| = 1$ ja $|BC| = 2$. Ruudu $DEFG$ külg DE asub lõigul BC, tipp F lõigul AC ning ruudu ülejäänud osa asub kolmnurga ABC sees. Leia ruudu $DEFG$ küljepikkus, kui $|AG| = 1$.

18. Kumeras viisnurgas $ABCDE$ on kõik küljed võrdse pikkusega. Leia $\angle ACE$, kui $\angle BCD = 2\angle ACE$.

19. Võrdhaarse trapetsi $ABCD$ alused on BC ja AD. Ringjoon ω, mis läbib punkte B ja C, lõikab külge AB ja diagonaali BD vastavalt punktides $X \neq B$ ja $Y \neq B$. Ringjoone puutuja punktis C lõikab kiirt AD punktis Z. Tõesta, et punktid X, Y ja Z asuvad ühel sirgel.

20. Kolmnurga ABC siseringjoon ω puutub külge BC punktis K. Ringjoon keskpunktiga J, mis puutub külge BC ning sirgeid AB ja AC, asub väljaspool kolmnurka ABC. Sirge KJ lõikab ringjoont ω punktis $P \neq K$. Tõesta, et kolmnurga BCP ümberringjoon:
    a) läbib lõigu JK keskpunkti E;
    b) puutub ringjoont ω.

Lahendused

1. *Vastus:* $(\frac{3}{2};\frac{1}{2})$ ja $(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2})$.

   Lahutades esimesest antud võrrandist teise, saame $(x-y)\cdot 2xy=\frac{3}{2}$. Lahutame selle teisest antud võrrandist:

   $$1=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=(x-y)(x^2+y^2)-(x-y)\cdot 2xy=(x-y)(x^2-2xy+y^2)=(x-y)^3.$$

   Seega $x-y=1$, mistõttu $2xy=\frac{3}{2}$ ja $x^2+y^2=\frac{5}{2}$. Järelikult

   $$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=4.$$

   Seega $x+y=\pm 2$ ja $x-y=1$. Lahendades selle võrrandisüsteemi $x+y$ mõlema väärtuse puhul, saame lahendid $(\frac{3}{2};\frac{1}{2})$ ja $(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2})$. Need rahuldavad esialgset süsteemi.

2. *Vastus:* b) $(3,3,3,3)$.

   a) On ilmne, et x, y, z, $t\neq 0$. Kui $x<0$, siis

   $$y=6-\frac{9}{x}>6\Rightarrow z=6-\frac{9}{y}\in(3;6)\Rightarrow t=6-\frac{9}{z}\in(3;6)\Rightarrow x=6-\frac{9}{t}>0.$$

   Saime vastuolu. Samamoodi välistame juhud $y<0$, $z<0$ ja $t<0$.

   b) Seega x, y, z, $t>0$. Siis $6-x$, $6-y$, $6-z$, $6-t>0$. Defineerime positiivsed arvud

   $$a=x(6-x),\qquad b=y(6-y),\qquad c=z(6-z),\qquad d=t(6-t).$$

   Korrutades kõik neli võrdust, saame $abcd=9^4$. Et $0\leq(x-3)^2=9-a$, siis $0<a\leq 9$ ning analoogiliselt $0<b,c,d\leq 9$. Võrdus $abcd=9^4$ kehtib ainult siis, kui $a=b=c=d=9$. Siis $x=t=z=t=3$. See lahend rahuldab esialgset süsteemi.

3. *Vastus:* $f(x)=-x-1$ iga $x\in\mathbb{R}$ puhul.

   Paneme antud võrduses x asemele $-x$ ja liidame tulemuse antud võrdusele: iga $x\in\mathbb{R}$ puhul kehtib

   $$2f(x)+2f(-x)+4=0\Rightarrow f(x)+f(-x)=-2.$$

   Seega võime esialgse võrduse taandada kujule

   $$0=x(f(x)+f(-x)+4)+2f(x)+2=x(-2+4)+2f(x)+2.$$

   Siit $f(x)=-x-1$ iga $x\in\mathbb{R}$ puhul. See funktsioon rahuldab esialgset võrdust.

4. *Vastus:* $(1,-1,0)$, $(-1,1,0)$, $(2,-\frac{1}{2},1\frac{7}{8})$, $(-2,\frac{1}{2},-1\frac{7}{8})$.

   Kolmandast võrdusest näeme, et $x\neq 0$. Kui $z=0$, siis $y=-x^3$ ja $x=-y^3=x^9$. Seega $x=1$ või -1 ja $y=-\frac{1}{x}$. Saame kaks lahendit $(1,-1,0)$ ja $(-1,1,0)$.

   Eeldame, et $z\neq 0$. Saame

   $$xy=-1=(-1)^3=x^3y^3=(4z-y)(z-x)=z(4z-4x-y)+xy\Rightarrow$$
   $$\Rightarrow z(4z-4x-y)=0\Rightarrow 4z-4x-y=0\Rightarrow 4x+y=4z=x^3+y.$$

Seega $x^3 = 4x$, millest $x = 2$ või -2. Peale selle, $y = -\frac{1}{x}$ ja $z = x + \frac{y}{4}$. Saame veel kaks lahendit $(2, -\frac{1}{2}, 1\frac{7}{8})$ ja $(-2, \frac{1}{2}, -1\frac{7}{8})$.

Kõik neli lahendit rahuldavad esialgset süsteemi.

5. Et
$$\frac{x^2+y^2+z}{x^2+2} \geq \frac{2xy+z}{x^2+2} = \frac{2xyz+z^2}{z(x^2+2)} = \frac{z^2+2}{z(x^2+2)},$$
ja ülejäänud kahte murdu saab hinnata samamoodi, siis antud võrratuse vasak pool ei ole väiksem kui
$$\frac{z^2+2}{z(x^2+2)} + \frac{x^2+2}{x(y^2+2)} + \frac{y^2+2}{y(z^2+2)} \geq$$
$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{z^2+2}{z(x^2+2)} \cdot \frac{x^2+2}{x(y^2+2)} \cdot \frac{y^2+2}{y(z^2+2)}} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} = 3$$
(rakendasime kolme liikme aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise võrratust).

6. Olgu need kuus järjestikust naturaalarvu lihtsuse mõttes $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$, $n+3$. Siis $3p+10 = 6n^2+6n+19$ ehk $p = 2n^2+2n+3 = 2n(n+1)+3 > 3$.

   Et üks arvudest n ja $n+1$ on paaris, siis $2n(n+1)$ ja seega ka $p-7 = 2n(n+1)-4$ jagub 4-ga.

   Et $p \neq 3$, siis $2n(n+1) = p-3$ ei jagu 3-ga. Seega järjestikustest arvudest $n-1$, n, $n+1$, $n+2$ jaguvad 3-ga $n-1$ ja $n+2$. Seega $p-7 = 2(n^2+n-2) = 2(n-1)(n+2)$ jagub arvuga $3 \cdot 3 = 9$.

   Järelikult $p-7$ jagub arvuga $4 \cdot 9 = 36$.

7. *Vastus:* a) jah; b) ei.

   a) Arv $a+b$ on paaris. Võtame näiteks $x = y = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. Siis $x+y = 1 \in \mathbb{Z}$ ja $ax+by = \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Z}$.

   b) Võtame $a = 1$, $b = 2$. Kui $z = x+y \in \mathbb{Z}$ ja $t = ax+by = x+2y \in \mathbb{Z}$, siis $y = t-z \in \mathbb{Z}$. Järelikult nende arvude a, b puhul ei saa valida sellist arvu $y \notin \mathbb{Z}$.

8. *Vastus:* jah, näiteks $n = 299\,999\,999\,999\,999\,999$.

   Kui $n = \overline{A999\ldots9}$, kus arv A (mitte tingimata ühekohaline) ei lõpe üheksaga ja lõpus on k üheksat, siis $n+1 = \overline{(A+1)000\ldots0}$ ja
$$S(n) - S(n+1) = (S(A)+9k) - S(A+1) = 9k-1.$$
   Kehtib $465 = 3 \cdot 5 \cdot 31 = 3 \cdot 155$. Pannes tähele, et $155 - 3 = 9 \cdot 17 - 1$, võime otsida arvu n, mis lõpeb 17 üheksaga ja mille puhul $S(n+1) = S(A+1) = 3$. See on vastuses nimetatud arv. Selle puhul $S(n) = 2+9\cdot 17 = 155$, $S(n+1) = 3+0\cdot 17 = 3$ ja $S(n)\cdot S(n+1) = 155\cdot 3 = 465$.

9. Olgu $c = a-b > 0$. Siis
$$c = 5b^2 - 4(b+c)^2 = b^2 - 8bc - 4c^2 \Rightarrow b^2 = c(8b+4c+1).$$
   Kui SÜT$(c, 8b+4c+1) > 1$, siis leidub arvudel c ja $8b+4c+1$ ühine algtegur p, mis seega jagab arvu $8b+1 = (8b+4c-1)-4c$. Kuid see arv peab jagama ka

arvu b^2 ehk olema arvude b ja $1 = (8b-1) - 8b$ ühistegur. Saime vastuolu. See tähendab, et $\text{SÜT}(c, 8b+4c+1) = 1$.

Kehtib väide: kui kahe ühistegurita naturaalarvu korrutis on täisarvu ruut, siis mõlemad naturaalarvud on täisarvu ruudud. Järelikult on seda ka arv $c = a - b$.

Märkus. Kui see väide on tundmatu, siis võib arutleda järgmisel viisil. Kui arv c ei ole täisarvu ruut, siis tema lahutuses algtegurite astmete korrutiseks on vähemalt üks tegur q^α paaritu astendajaga α. Kui arvu b lahutuses algtegurite astmete korrutiseks esineb tegur q^β, siis arvus $8b+4c+1 = b^2 : c$ on aste $q^{2\beta-\alpha}$, mis on paaritu ja seetõttu suurem kui 0. Sellisel juhul jaguvad mõlemad arvud $8b+4c+1$ ja c arvuga $q > 1$. Vastuolu.

10. *Vastus:* 8.

    Eeldame, et N jagub arvuga pq, kus p ja q on (mitte tingimata erinevad) algarvud, mis erinevad 3-st. Kui p annab 3-ga jagamisel jäägi 1, siis $d+2 = p+2 \neq 3$ jagub 3-ga ja ei ole algarv. Järelikult p ja analoogiliselt q annab 3-ga jagamisel jäägi 2. Siis aga pq annab 3-ga jagamisel jäägi 1 ning $d+2 = pq+2 \neq 3$ jagub 3-ga ja ei ole algarv. Saime vastuolu. Järelikult saab N olla ainult 3 aste korrutatuna ülimalt ühe muu algarvuga (või on lihtsalt see algarv või 1).

    Paneme tähele, et N ei jagu arvuga $3^5 = 243$, sest $d+2 = 245$ ei ole algarv. Kehtib üks järgnevatest.

    1) Arvul N pole muid algtegureid peale 3. Siis on arvul N ülimalt 5 tegurit: 1, 3, 3^2, 3^3, 3^4.
    2) Arv N jagub algarvuga $p \neq 3, 5$. Oletame, et N jagub arvuga 3^4. Siis $N = 3^4 p$ ja tal on tegurid p, $3p$, $9p$, $27p$. Neist arvudest ühegi kahe vahe ei jagu 5-ga ja nad ise ei jagu 5-ga, seetõttu annavad nad 5-ga jagamisel neli erinevat nullist suuremat jääki. Seega üks neist annab 5-ga jagamisel jäägi 3. Siis $d+2 \neq 5$ jagub 5-ga ja ei ole algarv. Vastuolu. Järelikult N ei jagu arvuga 3^4 ja tal on ülimalt 8 tegurit: 1, 3, 3^2, 3^3, p, $3p$, $3^2 p$, $3^3 p$.
    3) Arv N jagub 5-ga. Siis N ei jagu arvuga 3^4, sest $d+2 = 3^4 \cdot 5 + 2 = 407$ jagub 11-ga ja ei ole algarv. Järelikult on arvul N ülimalt 8 tegurit: 1, 3, 3^2, 3^3, 5, $3 \cdot 5$, $3^2 \cdot 5$, $3^3 \cdot 5$.

    Juht 3) annab ka näite, et arvul N saab olla 8 tegurit: arvu $N = 3^3 \cdot 5 = 135$ tegurid on 1, 3, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, 5, $3 \cdot 5 = 15$, $3^2 \cdot 5 = 45$, $3^3 \cdot 5 = 135$, mis rahuldavad ülesande tingimusi (arvud 3, 5, 11, 29, 7, 17, 47, 137 on algarvud).

11. *Vastus:* 68.

    Arvudest 1 kuni 100 on 50 paarisarvud ning 33 arvud, mis jaguvad 3-ga. Seega kui võtame karbist välja $100 - 33 = 67$ või vähem kaarti, siis võib juhtuda, et ühegi kaardi number ei jagu 3-ga. Siis nende korrutis ei jagu 3-ga ega arvuga $192 = 2^6 \cdot 3$. Kui aga võtta välja ükskõik millised 68 kaarti, siis on nende hulgas vähemalt üks 3-ga jaguv arv. Samuti on nende hulgas vähemalt $68 - 50 = 18 > 6$ paarisarvu. See tähendab, et sellel juhul jagub võetud kaartide numbrite korrutis arvuga $2^6 \cdot 3 = 192$.

12. *Vastus:* ei ole võimalik.

    Värvime pooled ruudustiku ruudud selliselt, et ühise servaga ruudud on alati eri värvi (nagu malelaual); teeme seda nii, et alumine vasak ruut on must. Siis jääb iga nupp igal käigul alati sama värvi ruudule. Algseisus on meil 5 nuppu mustadel ruutudel ja 4 nuppu valgetel. Seega jääb see alati nii. Järelikult ei jõua me kunagi soovitud lõppseisu, kus 5 nuppu on valgetel ruutudel.

13. Vaatleme antud alamhulki ja kõiki neist moodustatud kahe hulga ühendeid. Saame

$$2^{51} + C^2_{2^{51}} = 2^{51} + \frac{2^{51}(2^{51}-1)}{2} = 2^{51} + 2^{101} - 2^{50} > 2^{101}$$

hulga $U = \{1, 2, 3, \ldots, 101\}$ alamhulka. Samas aga hulgal U on ainult 2^{101} erinevat alamhulka (iga elemendi puhul on 2 võimalust: kuulub alamhulka või ei kuulu, selliseid elemente on 101). Seega kaks neist hulkadest langeb kokku. Seejuures ülesandes vaadeldavate hulkade A, B, C, D puhul, kus $A \neq B$, $C \neq D$ ja $\{A, B\} \neq \{C, D\}$, kehtib kas $A = C \cup D$ või $A \cup B = C \cup D$. Kummalgi juhul $C \subset A \cup B$ ja $D \subset A \cup B$. Kui $C \neq A$, B või $D \neq A$, B, siis ülesande väide kehtib. Vastasel juhul saame vastuolu: $\{A, B\} = \{C, D\}$. Väide on tõestatud.

14. Ruudu saab kolme horisontaal- ja kahe vertikaalsirgega jaotada 12 võrdseks 3×4 ristkülikuks. Et $241 : 12 > 20$, siis vastavalt Dirichlet' printsiibile kuulub ühte neist 12 ristkülikust vähemalt 21 punkti. Vastavalt Dirichlet' printsiibile on vähemalt 11 neist punktidest sama värvi. Ristküliku diagonaali pikkus on $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, valime selle ringjoone diameetriks. See ringjoon katab kõik need 11 sama värvi punkti.

15. *Vastus:* 6.

Tähistame meeskonnad tähtedega A, B, C, D, E.

Kui kohtumised A–B ja B–E lõpevad tulemusega 1:0, kohtumised C–D ja C–E tulemusega 1:1 ning ülejäänud mängud jäävad viiki 0:0, siis koguvad meeskonnad A, B, C, D ja E vastavalt 8, 7, 6, 5 ja 4 punkti ning löödud väravate arv on 6. Tõestame, et väravaid ei saa olla vähem.

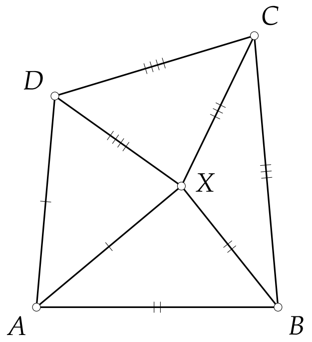
Oletame, et turniiril löödi maksimaalselt 5 väravat. Olgu a võidumängude arv, b viigimängude arv, mis ei lõppenud tulemusega 0:0, c viigimängude arv, mis lõppesid tulemusega 0:0 ja d turniiri võitja punktisumma. Kokku on mänge $a + b + c = C_5^2 = 10$. Turniiril kogutud punktide koguarv on $(5+0)a + (2+2)b + (1+1)c = 5a + 4b + 2c = (d-4) + (d-3) + (d-2) + (d-1) + d = 5d - 10$. Seega $3a + 2b = 5a + 4b + 2c - 2(a+b+c) = 5d - 30$ jagub 5-ga. Löödud väravate arv on vähemalt $(1+0)a + (1+1)b = a + 2b \leq 5$. Seega sobivad ainult väärtused $b = 0$, 1, 2. Vastavalt peab $3a$, $3a+2$ või $3a+4$ jaguma 5-ga ning kõigil juhtudel $a \leq 5 - 2b$. Sobivad ainult järgmised kolm juhtu.

1) Kui $b = 0$, $a = 0$, siis $c = 10 - a - b = 10$. Sel juhul kogusid kõik meeskonnad 4 punkti ja lõpptulemused ei ole järjestikused arvud, vastuolu.
2) Kui $b = 0$, $a = 5$, siis $c = 5$, $d = 9$. Sel juhul kogus võitja 9 punkti, nii et ta võitis ülimalt ühe mängu ($9 < 5 + 5$). Siis aga pidi ta koguma ülimalt $5 + 1 + 1 + 1 = 8$ punkti, vastuolu.
3) Kui $b = 1$, $a = 1$, siis $c = 8$, $d = 7$. Sel juhul leidub üks meeskond, kes võitis ühe mängu. Siis aga pidi see meeskond koguma vähemalt $5 + 1 + 1 + 1 > d$ punkti, vastuolu.

Kokkuvõttes, turniiril löödud väravate arv oli vähemalt 6.

16. *Vastus:* ei saa.

Kui need võrdused kehtiksid, siis oleksid kolmnurgad AXD, BXA, CXB, DXC võrdhaarsed ning nende alusnurgad $\angle AXD$, $\angle BXA$, $\angle CXB$, $\angle DXC$ oleksid teravnurgad. Nende nurkade summa oleks seega väiksem kui $90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ$, mis pole võimalik, sest need neli nurka moodustavad täispöörde.

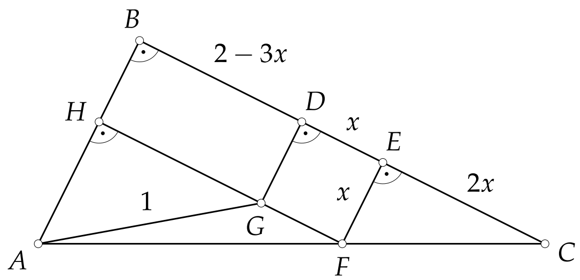


17. *Vastus:* $\frac{2}{5}$.

Olgu x ruudu külje pikkus $|DE| = |EF| = |GD|$.

Kolmnurgad ABC ja FEC on sarnased (täisnurksed ja ühine nurk tipu C juures), seega $|EC| : x = |EC| : |EF| = |BC| : |BA| = 2$, millest $|EC| = 2x$. Järelikult $|BD| = |BC| - |DE| - |EC| = 2 - 3x$.

Olgu H sirgete FG ja AB lõikepunkt. Siis $BDGH$ on ristkülik, mistõttu $|HG| = |BD| = 2 - 3x$ ja $|HB| = |GD| = x$. Kolmnurga AHG küljepikkused on $|HA| = |AB| - |HB| = 1 - x$, $|HG| = 2 - 3x$ ja $|AG| = 1$. Pythagorase teoreemi põhjal $(1 - x)^2 + (2 - 3x)^2 = 1^2$. Seega $10x^2 - 14x + 4 = 0$, millest $x = 1$ või $x = \frac{2}{5}$. Et $x = |EF| < |AB| = 1$, siis $x = \frac{2}{5}$.

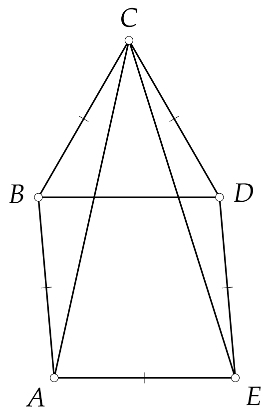


18. *Vastus:* 30°.

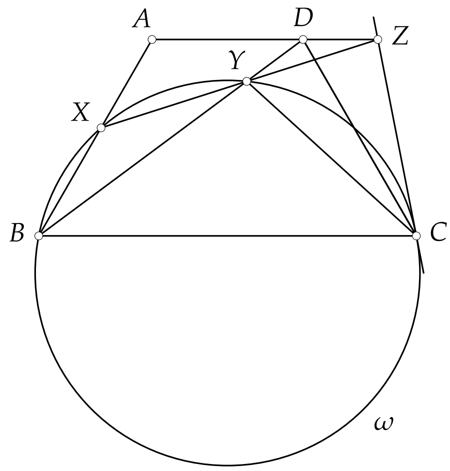
Kolmnurgad ABC ja CDE on võrdhaarsed ($|AB| = |BC|$ ja $|CD| = |DE|$), seetõttu $\angle BAC = \angle ACB$ ja $\angle CED = \angle DCE$. Et $\angle ACB + \angle DCE = \angle BCD - \angle ACE = \angle ACE$ ja $\angle CAE + \angle CEA + \angle ACE = 180^\circ$, siis

$$\begin{aligned}180^\circ = (\angle CAE + \angle CEA) + (\angle ACB + \angle DCE) &= \\ = (\angle CAE + \angle CEA) + (\angle BAC + \angle CED) &= \\ = (\angle CAE + \angle BAC) + (\angle CEA + \angle CED) &= \angle BAE + \angle AED.\end{aligned}$$

Järelikult $AB \parallel DE$ (eripoolsete nurkade $\angle BAE$ ja $\angle AED$ tõttu). Lõigud AB ja DE on paralleelsed ja võrdsed, seetõttu on nelinurk $ABDE$ rööpkülik ja $|BD| = |EA| = |BC| = |CD|$. Seega on kolmnurk BCD võrdkülgne, $\angle BCD = 60^\circ$ ja $\angle ACE = \angle BCD : 2 = 30^\circ$.



19. Ringjoone kõõl ja puutuja moodustavad nurga $\angle YCZ$ (kaarele CY toetuv piirdenurk), mis on võrdne piirdenurgaga $\angle CBY$. Samas $\angle CBY = \angle BDA$ (põiknurgad), mistõttu $\angle YCZ + \angle YDZ = \angle BDA + \angle YDZ = 180^\circ$. Järelikult on $CYDZ$ kõõlnelinurk. Seega $\angle CYZ = \angle CDZ = 180^\circ - \angle CDA = \angle ABC$ (võrdhaarne trapets on kõõlnelinurk) $= 180^\circ - \angle CYX$ (nelinurk $BCYX$ on kõõlnelinurk). Saime, et nurgad $\angle CYZ$ ja $\angle CYX$ on kõrvunurgad, järelikult asuvad punktid X, Y, Z ühel sirgel.



20. a) Olgu I ringjoone ω keskpunkt (vasakpoolne joonis). Siis $\angle IBJ = \angle ICJ = 90^\circ$ (kolmnurga ABC sisenurkade poolitajad BI ja CI on vastavalt risti välisnurkade poolitajatega BJ ja CJ). Seega asuvad punktid I, B, J, C ühel ringjoonel. Olgu $M \neq J$ selle ringjoone lõikepunkt lõiguga PK. Siis $\angle IMJ$ toetub diameetrile ja on seetõttu täisnurk. Ringjoone ω keskpunktist I lõigule PK tõmmatud ristsirge jagab selle lõigu pooleks, seega $|KM| = |KP|/2$. Lõikuvate kõõlude omaduse tõttu $|BK| \cdot |KC| = |JK| \cdot |KM| = |JK| \cdot |KP|/2 = |KE| \cdot |KP|$. Rakendades kõõlude omadust lõikudele BC ja EP, saame, et punktid B, P, C, E asuvad ühel ringjoonel, st E asub kolmnurga BCP ümberringjoonel

b) Olgu O nelinurga $IBJC$ ümberringjoone keskpunkt (diameetri IJ keskpunkt, parempoolne joonis). Et $|OB| = |OC|$ (ringjoone raadiused), siis asub punkt O lõigu BC keskristsirgel. Lõik OE on kolmnurga IJK kesklõik, seetõttu $OE \parallel IK$. Samas $IK \perp BC$, seega on sirge OE lõigu BC keskristsirge ja läbib kolmnurga BCP ümberringjoone keskpunkti I'.

Tähistagu ω' kolmnurga BCP ümberringjoont. Et ω diameeter on väiksem kui $|BC|$ ja ω' oma ei ole väiksem, siis leidub positiivse kordajaga homoteetia, mis viib ringjoone ω ringjooneks ω'. Keskpunkti I teisendab ta keskpunktiks I' ja raadiuse IK

paralleelseks raadiuseks $I'E$. Seega homoteetiakeskpunkt asub sirgel EK. Ringjoone ω punkti $P \in EK$ teiseneb ringjoone ω' ja sirge EK lõikepunktiks. Et see punkt ei ole E (selleks teiseneb punkt K), siis peab see olema seesama punkt P. Järelikult on P homoteetia keskpunkt ehk ringjoone ω puutepunkt P teiseneb ringjoone ω' puutepunktiks P, st iseendaks. Järelikult ω ja ω' puutuvad.