Treeningvõistlus „Balti tee 2016“ võistkonnale

31. oktoobril 2016

1. Reaalarvud x ja y ($x \neq -2y$, $y \neq -2x$) rahuldavad võrdust $\frac{4x}{x+2y} - \frac{5y}{2x+y} = 1$. Leia avaldise $\frac{x-2y}{4x+5y}$ kõik võimalikud väärtused.

2. Tõesta, et ühel avaldistest $A = \frac{6x^2y^2+xy-1}{2xy+1}$ ja $B = \frac{x(x^2-1)-y(y^2-1)}{x-y}$ on omadus: alati, kui $x \neq y$ ja $2xy+1 \neq 0$, on selle avaldise väärtus suurem kui teise avaldise väärtus.

3. Tõesta, et kui
$$a = \frac{251}{\frac{1}{\sqrt[3]{252}-5\sqrt[3]{2}} - 10\sqrt[3]{63}} + \frac{1}{\frac{251}{\sqrt[3]{252}+5\sqrt[3]{2}} + 10\sqrt[3]{63}},$$
siis a^3 on täisarv.

4. Reaalarvud x, y, z, t rahuldavad võrrandisüsteemi
$$\begin{cases} (x+y)(z+t) = 2, \\ (x+z)(y+t) = 3, \\ (x+t)(y+z) = 4. \end{cases}$$
Leia avaldise $x^2+y^2+z^2+t^2$ vähim võimalik väärtus.

5. Positiivsed arvud x, y, z rahuldavad võrdust $x^2+y^2+z^2 = 3$. Tõesta võrratus
$$\frac{x^4+3xy^3}{x^3+2y^3} + \frac{y^4+3yz^3}{y^3+2z^3} + \frac{z^4+3zx^3}{z^3+2x^3} \leq 4.$$

6. Leia kõik algarvude paarid (p,q), mille puhul $p^4 - q^4$ on positiivne täisarv, millel on vähem kui 8 (positiivset) tegurit (kaasa arvatud 1 ja arv ise).

7. Leia võrrandisüsteemi
$$\begin{cases} 3[x] - \{y\} + \{z\} = 20{,}3, \\ 3[y] + 5[z] - \{x\} = 15{,}1, \\ \{y\} + \{z\} = 0{,}9 \end{cases}$$
kõik positiivsed lahendid (x,y,z). Siin tähistab $[t]$ arvu t täisosa (suurimat täisarvu, mis ei ületa arvu t) ja $\{t\} = t - [t]$ arvu t murdosa.

8. Leia võrrandi $x+y = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy}$ kõik positiivsed täisarvulised lahendid (x,y).

9. Andres kirjutab üheksa üheksakohalist arvu. Iga arv sisaldab kõiki numbreid 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Kirjutatud arvude summa lõpeb k nulliga. Leida k suurim võimalik väärtus.

10. Tõesta: iga naturaalarvu $n > 1$ puhul leidub selline naturaalarv $m > n^n$, et $n^m - m^n$ jagub arvuga $n+m$.

11. On 32 lampi, millest igaühel on oma lüliti. Alguses on kõik lambid välja lülitatud. Kui lülitit vajutada, siis kustunud lamp hakkab põlema ja põlev lamp kustub. Ühe käiguga võib vajutada täpselt viit lülitit. Liina tahab panna kõik lambid korraga põlema. Milline on vähim käikude arv, millega ta seda teha saab?

12. Tabelis mõõtmetega 5×5 on igasse lahtrisse kirjutatud üks arvudest 1, 2, 3, 4, 5. Samas reas ja samas veerus asuvad numbrid on alati erinevad. Nimetame tabeli lahtrit „hästi asustatuks“, kui selles olev arv a rahuldab järgmist kahte tingimust:

    1) kõik arvuga a samas reas olevad a-st suuremad arvud asuvad arvust a ühel pool (vasakul või paremal) ning kõik a-st väiksemad arvud teisel pool (vastavalt paremal või vasakul);

    2) kõik arvuga a samas veerus olevad a-st suuremad arvud on arvust a ühel pool (üleval või all) ning kõik a-st väiksemad arvud teisel pool (all või üleval).

    Kui palju „hästi asustatud“ lahtreid võib tabelis maksimaalselt olla?

13. Ristkülikukujulisel positiivsete täisarvude tabelil on neli rida. Igas reas on kõik arvud erinevad ning igas veerus oleva nelja arvu summa on 20. Mitu veergu võib tabelil maksimaalselt olla?

14. Ants kirjutas tahvlile arvud $1, 2, 3, \ldots, n$ (kus $n \geq 3$). Ühel sammul võib valida suvalised kaks arvu ja neid parandada, liites kummalegi sama arvu. Ants tahab muuta kõik arvud võrdseks. Leia kõik n väärtused, mille puhul see on võimalik.

15. Tahvlile on kirjutatud 9 tärni *********. Georg ja Priit mängivad mängu, tehes vaheldumisi käike ja kasutades numbreid 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Georg, kes mängu alustab, asendab igal oma käigul ühe tärni numbriga. Priit asendab igal oma käigul kaks tärni numbritega. Iga numbrit võib kasutada ainult üks kord. Priit võidab, kui pärast kummagi mängija kolme käiku on tekkinud arv, mis jagub 27-ga. Kas Priidul leidub võitev strateegia (s.t kas ta saab alati võita, olenemata Georgi mängust)?

16. Kõõlnelinurga $ABCD$ külgede AB ja CD pikendused lõikuvad punktis E. Kolmnurga ADE ümberringjoonele punktist D tõmmatud puutuja lõikab sirget CB punktis F. Tõesta, et kolmnurk CDF on võrdhaarne.

17. Antud on võrdhaarne täisnurkne kolmnurk ABC ($\angle BAC = 90°$). Tasandil märgitakse punkt D nii, et $BD \perp BC$ ja $|AD| = |BC|$. Leia $\angle BAD$.

18. Kolmnurga ABC küljed ja nurgad rahuldavad järgmisi tingimusi: $|BC| + |AC| = 2|AB|$ ja $\angle BAC - \angle CBA = 90°$. Leia $\cos\angle ACB$.

19. Kolmnurgas ABC on tõmmatud kõrgused AD, BE ja CF. Ühe kõrguse aluspunktist D tõmmatakse sirgetele AB, BE, CF ja AC ristsirged, mis lõikavad neid sirgeid vastavalt punktides P, Q, R ja S. Tõesta, et need neli punkti asuvad ühel sirgel.

20. Kumera nelinurga $ABCD$ külje BC keskpunkt on M. Tõesta, et kui $\angle DAB = 90°$ ja $\angle ADC = \angle BAM$, siis $\angle ADB = \angle CAM$.

Lahendused

1. *Vastus:* -3 ja 0.

   Korrutame võrduse pooli murdude nimetajate korrutisega ja võtame kokku sarnased liikmed: $0 = 6x^2 - 6xy - 12y^2 = 6(x+y)(x-2y)$. Siit $x = -y$ või $x = 2y$. Järelikult $\frac{x-2y}{4x+5y} = \frac{-y-2y}{-4y+5y} = -3$ või $\frac{x-2y}{4x+5y} = 0$.

2. Et $6x^2y^2 + xy - 1 = (2xy+1)(3xy-1)$, siis $A = 3xy - 1$. Et $x(x^2-1) - y(y^2-1) = (x^3-y^3) - (x-y) = (x-y)(x^2+xy+y^2-1)$, siis $B = x^2+xy+y^2-1$ ning $B - A = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 > 0$ (sest $x \neq y$). Seega $B > A$.

3. Tähistame $b = \sqrt[3]{252}$, $c = 5\sqrt[3]{2}$. Siis $bc = 10\sqrt[3]{63}$ ning $(b-c)(b^2+bc+c^2) = b^3 - c^3 = 2$ ja $(b+c)(b^2-bc+c^2) = b^3+c^3 = 502$. Seega

$$a = \frac{251}{\frac{1}{b-c} - bc} + \frac{1}{\frac{251}{b+c} + bc} = \frac{502}{\frac{2}{b-c} - 2bc} + \frac{2}{\frac{502}{b+c} + 2bc} =$$
$$= \frac{502}{b^2 - bc + c^2} + \frac{2}{b^2+bc+c^2} = (b+c) + (b-c) = 2b,$$

   mistõttu $a^3 = 8b^3 = 2016$.

4. *Vastus:* 7.

   Olgu $s = x+y+z+t$, $u = x+t$, $v = y+z$. Et $u^2 - 2uv + v^2 \geq 0 \Rightarrow s^2 = (u+v)^2 \geq 4uv = 4 \cdot 4 = 16$, siis saame $x^2+y^2+z^2+t^2 = s^2 - (x+y)(z+t) - (x+z)(y+t) - (x+t)(y+z) = s^2 - 9 \geq 16 - 9 = 7$.

   Tuleb kontrollida, et väärtus 7 on saavutatav! Süsteemi ühest võimalikust lahendist $(x,y,z,t) = (\frac{3+\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{3-\sqrt{2}}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2})$ saame $s = 4$ ja sellest $x^2+y^2+z^2+t^2 = s^2 - 9 = 7$. (Lahendi võib leida järgmiselt. Võrratus muutub võrduseks, kui $x+t = y+z = 2$. Siis $2 = (x+y)((2-x)+(2-y))$ ja $3 = (x+(2-y))(y+(2-x)) \Rightarrow (x+y)^2 - 4(x+y) + 2 = 0$ ja $(x-y)^2 = 1$. Valime ühe variandi: $x+y = 2+\sqrt{2}$, $x - y = 1$.)

5. Et $x^3 + 2y^3 = x^3 + y^3 + y^3 \geq 3\sqrt[3]{x^3 \cdot y^3 \cdot y^3} = 3xy^2$ (aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vaheline võrratus), siis

$$\frac{x^4 + 3xy^3}{x^3 + 2y^3} = x + \frac{xy^3}{x^3+2y^3} \leq x + \frac{xy^3}{3xy^2} = x + \frac{y}{3}.$$

   Kehtivad ka kaks analoogilist võrratust. Antud võrratuse vasak pool ei ole järelikult suurem kui

$$x + \frac{y}{3} + y + \frac{z}{3} + z + \frac{x}{3} = 4 \cdot \frac{x+y+z}{3} \leq 4 \cdot \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} = 4$$

   (lõpus oleme kasutanud aritmeetilise ja ruutkeskmise vahelist võrratust).

6. *Vastus:* $(3,2)$.

   Ilmselt $p > q$. Oletame, et $p - q > 1$. Siis

$$1 < p - q < p + q < (p-q)(p+q) = p^2 - q^2 < p^2 + q^2 <$$
$$< (p-q)(p^2+q^2) < (p+q)(p^2+q^2) < (p-q)(p+q)(p^2+q^2),$$

kusjuures igaüks neist 8 erinevast arvust on arvu $p^4 - q^4 = (p-q)(p+q)(p^2+q^2)$ tegur.

Seega $p - q = 1$. Siis on üks algarvudest paaris ehk võrdub arvuga 2. Ainus sobiv lahend on $(3,2)$, selle puhul on arvul $3^4 - 2^4 = 65$ ainult 4 positiivset tegurit.

7. *Vastus:* $(7{,}9; 2{,}8; 2{,}1)$.

   Et $0 \le \{x\}, \{y\}, \{z\} < 1$, siis $3[x] = 20{,}3 + \{y\} - \{z\}$ on 3-ga jaguv täisarv, mis asub $20{,}3 + 0 - 1$ (> 19) ja $20{,}3 + 1 - 0$ (< 22) vahel. Ainuke selline arv on 21, seega $[x] = 7$ ja $\{y\} - \{z\} = 0{,}7$. Seega $2\{y\} = (\{y\} - \{z\}) + (\{y\} + \{z\}) = 1{,}6$, $\{y\} = 0{,}8$, $\{z\} = 0{,}1$.

   Analoogiliselt $3[y] + 5[z] = 15{,}1 + \{x\}$ on täisarv, mis asub $15{,}1 + 0$ (> 15) ja $15{,}1 + 1$ (< 17) vahel. Seega $3[y] + 5[z] = 16$ ja $\{x\} = 0{,}9$. Et $y, z > 0$, siis $[y], [z] \ge 0 \Rightarrow 0 \le [z] = (16 - 3[y])/5 \le 16/5 < 4$. Proovides läbi võimalikud väärtused $[z] = 0$, 1, 2, 3, leiame ainukese sobiva võimaluse $[z] = 2$: siis $[y] = 2$ on täisarv. Järelikult $x = [x] + \{x\} = 7{,}9$ ning analoogiliselt $y = 2{,}8$ ja $z = 2{,}1$.

8. *Vastus:* $(1,4)$, $(4,1)$, $(4,4)$.

   Korrutame võrrandi pooli 2-ga ja korraldame tulemuses liikmed ümber: saame $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + (\sqrt{x} - 1)^2 + (\sqrt{y} - 1)^2 = 2$. Seetõttu $\sqrt{x} - 1 \le \sqrt{2}$, millest $x \le 3 + 2\sqrt{2} < 6$. Järelikult $x = 1$, 2, 3, 4 või 5.

   Tõstame võrduse $x + y - \sqrt{x} = \sqrt{yx} + \sqrt{y}$ mõlemad pooled ruutu ja avaldame $\sqrt{x}$:

   $$\sqrt{x} = \frac{x^2 + xy + y^2 + x - y}{2x + 4y}.$$

   Seega on $\sqrt{x}$ ratsionaalarv, mistõttu $x = 1$ või 4. Analoogiliselt $y = 1$ või 4. Sobivad variandid valime välja esialgse võrrandi abil.

9. *Vastus:* 8.

   Olukord $k = 8$ on võimalik, sest $987654321 \cdot 8 + 198765432 = 81 \cdot 10^8$ (seda on lihtne kontrollida, liites 9 liidetavate veergu). Teiselt poolt, kõik summa liidetavad jaguvad kindlasti 9-ga (ristsumma tõttu). Seega kui $k \ge 9$, siis on summa vähemalt $9 \cdot 10^9$. Samas ei saa summa olla suurem kui $987654321 \cdot 9 < 9 \cdot 10^9$. Järelikult $k < 9$.

10. Vaatleme m asemel arvu $k = n + m$. Tuleb tõestada: leidub naturaalarv $k > n^n + n$, mille puhul $a = n^{k-n} - (k-n)^n$ jagub arvuga k. Arvu a asemel piisab vaadelda arvu $b = n^{k-n} - (-n)^n = n^n(n^{k-2n} - (-1)^n)$, sest $b \equiv a \pmod{k}$. Kui n on paaritu, siis sobib $k = 2n^n$; kui aga n on paaris ja $n > 2$, siis võime võtta $k = n^n(n-1)$. Mõlemal juhul $k \ge 2n^n > n^n + n > 2n$ ning k jagab arvu b (2 jagab arvu $n^{k-2n} + 1$, kui n on paaritu, ning $n - 1$ jagab arvu $n^{k-2n} - 1$, kui n on paaris). Kui $n = 2$, siis $k = 7$.

    Märkus. Need arvud k ei ole ainsad. Näiteks kui n on paaris, siis Fermat' väikese teoreemi põhjal sobib $k = 2np$, kus p on suvaline piisavalt suur algarv.

11. *Vastus:* 8.

    Eeldame, et pärast mingit arvu käike kõik lambid põlevad ja arvud $a_1, a_2, \ldots, a_{32}$ näitavad, mitu korda iga lambi lülitit vajutati. Siis on kõik need arvud paaritud ning nende summa s on paaris (paarisarv paarituid liidetavaid). Peale selle, s on käikude arvu viiekordne. Seega ta jagub 10-ga. Järelikult $s \ge 1 + 1 + \ldots + 1 = 32 \Rightarrow s \ge 40$. Käikude arv on vähemalt $40 : 5 = 8$.

Nii paljudest käikudest ka piisab: jaotame lambid 6 viisikuks, üle jääb kaks lampi A ja B. Esimese 6 käiguga süütame kõik viisikud ja seejärel valime nende seast 4 lampi C, D, E ja F. Seitsmenda käiguga lülitame ümber lambid A, C, D, E, F ning kaheksandaga B, C, D, E, F.

12. *Vastus:* 5.

Kui „hästi asustatud“ lahtris on arv 2, siis saab temaga samas reas temast ühel pool olla ainult üks lahter (milles on arv 1). Sama kehtib ka veeru kohta. Seega võib selline „hästi asustatud“ lahter olla ainult üks lahtritest B (vt joonis). Analoogiliselt saab „hästi asustatud“ lahter, milles on arv 4, olla ainult üks lahtritest B. „Hästi asustatud“ lahter, kus on arv 1 või 5, saab olla ainult üks lahtritest A ja „hästi asustatud“ lahter, milles on arv 3, saab olla ainult lahter C. Peale selle, kahes ülemises reas olevates „hästi asustatud“ lahtrites saab olla ainult üks arvudest 1 ja 2 (vastasel juhul esineks esimeses reas kaks ühte: üks lahtris A ja teine lahtri B kohal olevas lahtris) ning analoogiliselt ainult üks arvudest 4 ja 5. Seega saab seal olla ülimalt kaks „hästi asustatud“ lahtrit. Sama kehtib ka kahe alumise rea kohta. Keskmises reas on ülimalt üks sobiv lahter. Seega kokku on „hästi asustatud“ lahtreid maksimaalselt $2+2+1=5$.

Näite 5 „hästi asustatud“ lahtriga saame, kui paneme ruudustiku kahte vastasnuka arvud 1, ülejäänud kahte vastasnurka arvud 5 ja keskele lahtrisse C arvu 3 (täites kogu tabeli, on tulemuses lahtrid A ja C „hästi asustatud“).

A				A
	B		B	
		C		
	B		B	
A				A

5	3	4	2	1
4	2	5	1	3
2	1	3	5	4
3	5	1	4	2
1	4	2	3	5

13. *Vastus:* 9.

Üheksa veergu võib ülevalt alla täita järgmiselt: 1-2-8-9, 2-8-9-1, 8-9-1-2, 9-1-2-8, 3-4-6-7, 4-6-7-3, 6-7-3-4, 7-3-4-6, 5-5-5-5.

Eeldame, et tabelis leidub vähemalt 10 veergu. Siis lahtrites oleva 40 arvu summa on 200. Teiselt poolt esineb iga arv veergudes ülimalt 4 korda, mistõttu summa on vähemalt $(1+1+1+1)+(2+2+2+2)+\ldots+(10+10+10+10)=220>200$. Saame vastuolu.

14. *Vastus:* n on paaritu või arvu 4 kordne.

Kui $n=4k+1$, $k\in\mathbb{N}$, siis saame arvud võrdsustada järgmiselt: paarid $(1,2)$, $(3,4)$, $\ldots$, $(4k-1,4k)$ muudame paarideks $(4k,4k+1)$, kõik järelejäänud arvud $4k$ jaotame k paariks ning muudame nad arvudeks $(4k+1,4k+1)$.

Kui $n=4k-1$, $k\in\mathbb{N}$, siis saame arvud võrdsustada järgmiselt: paarid $(1,2)$, $(3,4)$, $\ldots$, $(4k-3,4k-2)$ muudame paarideks $(4k-1,4k)$, kõik järelejäänud arvud $4k-1$ jaotame k paariks ja muudame nad arvudeks $(4k,4k)$.

Kui $n=4k$, $k\in\mathbb{N}$, siis saame arvud võrdustada järgmiselt: paarid $(1,2)$, $(3,4)$, $\ldots$, $(4k-1,4k)$ muudame paarideks $(4k-1,4k)$, kõik järelejäänud arvud $4k-1$ jaotame k paariks ja muudame nad arvudeks $(4k,4k)$.

Jääb vaadelda juht $n = 4k+2$, $k \in \mathbb{N}$. Alguses kirjutatud arvude summa on $1+2+\ldots+(4k+2) = (2k+1)(4k+3)$, mis on paaritu arv. Pärast iga sammu suureneb see summa paarisarvu võrra, jäädes ikka paarituks. Järelikult ei saa arvud muutuda võrdseks sama arvuga a, sest siis oleks nende summa $(4k+2)a$ ehk paarisarv.

15. *Vastus:* Priidul leidub võitev strateegia.

Kui kolmekohaline arv $\overline{abc}$ jagub 27-ga, siis

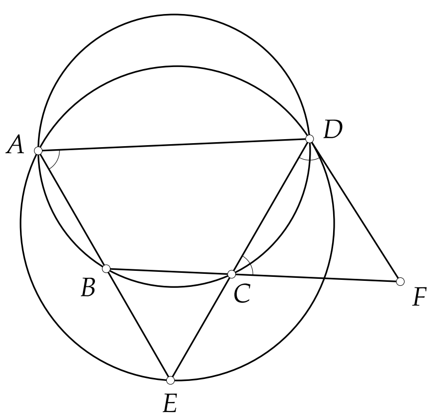
$$0 \equiv 10\overline{abc} \equiv 1000a + 100b + 10c \equiv 100b + 10c + a \equiv \overline{bca} \pmod{27}.$$

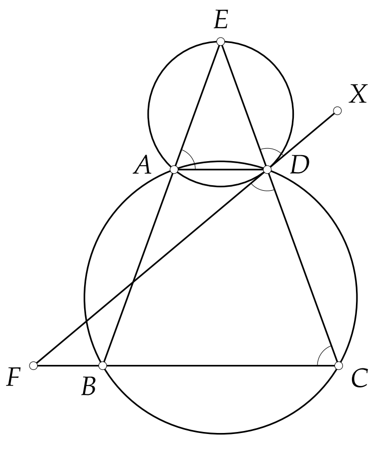
Seega $\overline{bca}$ ja (analoogiliselt) $\overline{cab}$ jagub 27-ga.

Priidu strateegia võib olla järgmine. Ta moodustab 27-ga jaguvatest arvudest hulga $A = \{189, 243, 567\}$ (on tähtis, et siin esinevad kõik 9 numbrit) ja jaotab tärnide rea ********* kolmeks kolmenumbriliseks plokiks: *** *** ***. Kui Georg asendab oma käigul plokis U tärni numbriga d, siis Priit valib hulgast A arvu $x = \overline{abc}$, mis sisaldab numbrit d, ning asendab plokis U kaks ülejäänud tärni arvu x numbritega nii, et plokki U jääb üks arvudest $\overline{abc}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$. Et kõik kolm plokki muutuvad kolmekohalisteks arvudeks, mis jaguvad 27-ga, jagub 27-ga ka tekkiv üheksakohaline arv.

16. Kui sirgete AB ja CD lõikepunkt asub kiirel AB, siis kolmnurga ADE ümberringjoone lõikaja ja puutuja omaduse põhjal $\angle FDC = \angle DAE$. Kõõlnelinurgas $ABCD$ aga kehtib $\angle DAE = \angle DAB = 180^\circ - \angle BCD = \angle FCD$. Järelikult $\angle FDC = \angle FCD$, millest $|FD| = |FC|$.

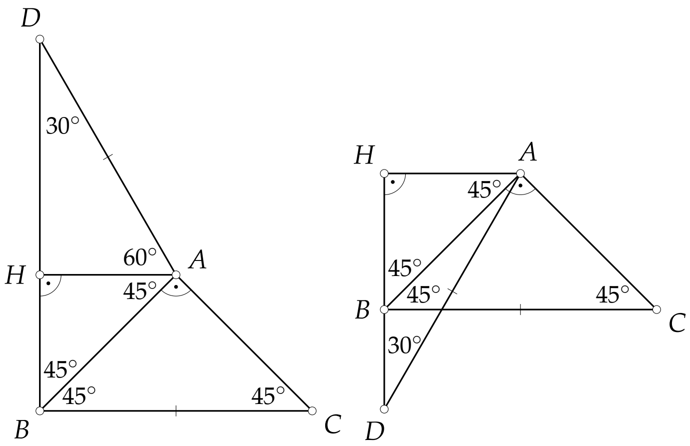
Kui sirgete AB ja CD lõikepunkt asub kiirel BA, siis valime sirgel DF, kuid mitte kiirel DF punkti X. Siis $\angle FDC = \angle XDE$. Lõikaja ja puutuja omaduse põhjal $\angle XDE = \angle DAE$. Kõõlnelinurgas $ABCD$ abil edasi $\angle DAE = 180^\circ - \angle BAD = \angle BCD = \angle FCD \Rightarrow |FD| = |FC|$.





17. *Vastus:* 15° või 105°.

Tõmbame kolmnurgale ABD kõrguse AH. Siis $\angle ABH = 90^\circ - \angle ABC = 45^\circ$, seega kolmnurk ABH on võrdhaarne. Järelikult $|AH| = |AB| : \sqrt{2} = (|BC| : \sqrt{2}) : \sqrt{2} = |AD| : 2$. S.t täisnurkse kolmnurga AHD kõrgus AH on kaks korda lühem kui hüpotenuus AD, seega $\angle ADH = 30^\circ \Rightarrow \angle DAH = 60^\circ$. On kaks juhtu: 1) kui punkt H asub B ja D vahel, siis $\angle BAD = \angle DAH + \angle HAB = 60^\circ + 45^\circ = 105^\circ$; 2) vastasel juhul $\angle BAD = \angle DAH - \angle HAB = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$.

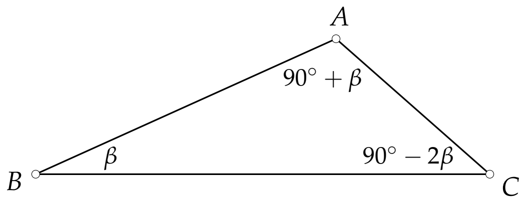


18. *Vastus:* $\frac{3}{4}$.

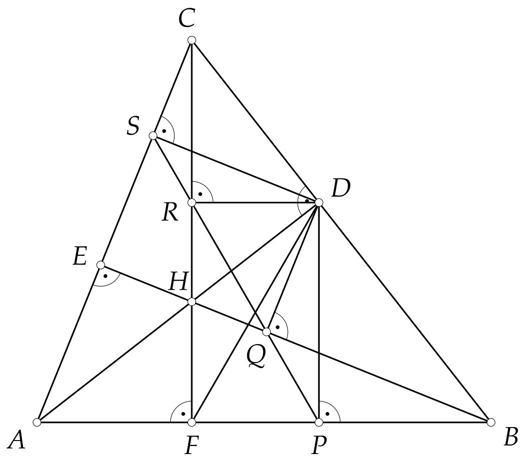
Tähistame $\beta = \angle ABC$, siis $\angle BAC = 90^\circ + \beta$, $\angle ACB = 90^\circ - 2\beta$. Siinusteoreemi põhjal

$$|BC| : |AC| = \sin(90^\circ + \beta) : \sin\beta = \cos\beta : \sin\beta,$$
$$1 + |BC| : |AC| = 2|AB| : |AC| = 2\sin(90^\circ - 2\beta) : \sin\beta = 2\cos 2\beta : \sin\beta,$$
$$2\cos 2\beta = \sin\beta \cdot (1 + \cos\beta : \sin\beta) = \sin\beta + \cos\beta,$$
$$4(1 - \sin^2 2\beta) = 4\cos^2 2\beta = \sin^2\beta + \cos^2\beta + 2\sin\beta\cos\beta = 1 + \sin 2\beta.$$

Seega $\cos\angle ACB = \cos(90^\circ - 2\beta) = \sin 2\beta$ ($\neq -1$, sest $0 < \angle ACB < \pi$) on võrrandi $4(1 - x^2) = 1 + x$ lahend. Jagades võrrandi pooled arvuga $x + 1 \neq 0$, leiame $x = \frac{3}{4}$.



19. Märgime kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkti tähega H. Meil on kõõlnelinurgad $HFBD$ ($\angle BFH + \angle BDH = 180^\circ$), $PBDQ$ ($\angle BPD = \angle BQD$), $FPDR$ ($\angle DPF + \angle DRF = 180^\circ$). Neis tekivad võrdsed piirdenurgad: $\angle DPR = \angle DFR = \angle DFH = \angle DBH = \angle DBQ = \angle DPQ$. Seega sirged PR ja PQ langevad kokku ehk punktid P, Q, R asuvad ühel sirgel. Samamoodi asuvad punktid Q, R, S ühel (selsamal) sirgel.



20. Märgime punkti Q nii, et M oleks lõigu AQ keskpunkt. Nelinurga $ABQC$ diagonaalid poolitavad teineteist, seega on see nelinurk rööpkülik ja $QC \parallel AB \Rightarrow QC \perp AD$. Peale selle, $\angle MAD = 90^\circ - \angle BAM = 90^\circ - \angle ADC$, järelikult $CD \perp AQ$. Seega on QC ja DC kolmnurga AQD kõrgused, mistõttu kolmas kõrgus on AC. Rööpküliku $ABQC$ külg BQ on paralleelne küljega AC, seega ta on risti sirgega QD. Et nurgad BAD ja BQD on täisnurgad, siis on $ABQD$ kõõlnelinurk. Järelikult $\angle ADB = \angle AQB$ (piirdenurgad) $= \angle CAM$ (AQ lõikab paralleelseid sirgeid AC ja BQ).