Treeningvõistlus „Balti tee 2015“ võistkonnale

27. oktoobril 2015

1. Lahenda võrrand
$$\sqrt{1+\sqrt{1+x}}=\sqrt[3]{x}\,.$$

2. Lahenda võrrandisüsteem
$$\begin{cases} x^2+3xy=x+3y, \\ y^2-xy=3x+y. \end{cases}$$

3. Leia kõik funktsioonid $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, mis kõigi arvude x, $y\in\mathbb{R}$ puhul rahuldavad tingimust
$$f(x+y)f(y)=f(x+xf(y)).$$

4. Reaalarvud x ja y rahuldavad võrdust
$$\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\left(\sqrt{1+y^2}+y\right)=1.$$
Leia summa $x+y$ kõik võimalikud väärtused.

5. Tõesta, et suvaliste mittenegatiivsete arvude a, b, c puhul kehtivad võrratused
$$\begin{aligned} 3(a^2+b^2+c^2) &\geq (a+b+c)\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)+ \\ &\quad +(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq (a+b+c)^2. \end{aligned}$$

6. (a) Milline on suurim naturaalarv k, mille puhul arv 120! jagub arvuga 12^k?
   (b) Milline on suurim naturaalarv k, mille puhul arv 240! jagub arvuga 12^k?

7. Kolmekohalisel nullist erinevate numbritega arvul on järgmine omadus: ükskõik mil viisil arvu numbrid järjestada, ei jagu saadud arv kunagi 4-ga. Kui palju leidub selliseid kolmekohalisi nullist erinevate numbritega arve?

8. Kahe järjestikuse positiivse täisarvu korrutist nimetame *peaaegu täisruuduks*. Tõesta, et iga peaaegu täisruut avaldub kahe peaaegu täisruudu jagatisena.

9. Leia kõik algarvude nelikud (p,q,r,s), mis rahuldavad võrratusi $0<p<q<r<s$ ja võrdust
$$1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-\frac{1}{r}-\frac{1}{s}=\frac{1}{pqrs}.$$

10. Iga naturaalarvu $n>1$ puhul teisendatakse arvud
$$\frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \frac{3}{n},\ \ldots,\ \frac{n-1}{n}$$
taandumatuteks murdudeks ja arvutatakse saadud murdude lugejate summa $f(n)$. Milliste arvude n puhul on arv $f(2015n)-f(n)$ paaris?

11. Tahvlile kirjutatakse arv 12. Ühe käiguga võib kustutada tahvlil oleva arvu N ja kirjutada selle asemele ühe arvudest $2N+1$ ja $\frac{N}{3}$ (arv peab jääma täisarvuks). Kas on võimalik nende käikudega saada arv

    (a) 29;
    (b) 4095;
    (c) 100?

12. Võrkpalliturniiril mängivad iga kaks meeskonda omavahel ühe korra. Iga mängu eest saab võitja 1 punkti ja kaotaja punkte ei saa. Viike ei ole. Turniiri lõppedes sai kõige väiksema punktide arvu ainult üks meeskond. Iga ülejäänud meeskond kaotas temast lõpptabelis vähem punkte saanud meeskondade vastu täpselt ühe mängu.

    (a) Kas on võimalik, et sellel turniiril osales 7 meeskonda?
    (b) Kas on võimalik, et sellel turniiril osales 6 meeskonda?

13. Ühel laupäeval mõtles Siim Susi välja 25-kohalise naturaalarvu. Selles polnud muid numbred kui 1, 2, 3 ja 4 ning numbreid 1 ja 2 oli võrdsel arvul. Seejärel kirjutas Siim naljaviluks välja ka kõik ülejäänud sellised 25-kohalised arvud. Pühapäeval kirjutas ta juba mitte naljaviluks välja kõik 50-kohalised naturaalarvud, milles on 25 ühte ja 25 kahte. Kummal päeval kirjutas ta rohkem arve, kas laupäeval või pühapäeval? Põhjenda vastust.

14. 10×10 ruudustikus värviti iga ruut ühega mitmest värvist. Igas reas ja igas veerus kasutati ülimalt 5 erinevat värvi. Milline on suurim värvide arv, mida ruudustiku värvimisel üldse võidi kasutada?

15. Tahvlile kirjutatakse arv 1345. Andres ja Pearu mängivad järgmist mängu, sooritades vaheldumisi käike. Igal käigul peab mängija lahutama tahvlil olevast arvust mingi selle arvu positiivse teguri või mingite erinevate positiivsete tegurite summa ja kirjutama saadud arvu tahvlile esialgse arvu asemele. Kaotab mängija, kes kirjutab tahvlile arvu, mis on väiksem kui 1. Kummal mängijal leidub võitev strateegia, kui esimese käigu teeb Andres?

16. Tabel mõõtmetega 2×3 koosneb 6 ühikruudust. Tabeli diagonaal jaotab ühe ühikruudu kolmnurgaks ja viisnurgaks. Leia viisnurga pindala.

17. Erikülgse kolmnurga ABC küljel AC märgitakse punkt D nii, et lõik BD jaotab kolmnurga ABC kaheks sarnaseks kolmnurgaks. Leia külje AB pikkus, kui $|AC| = 10$ ja $|BC| = 8$.

18. Võrdhaarse trapetsi pindala on 180, haara pikkus 13 ja pikema aluse pikkus 20. Leia trapetsi lühema aluse pikkus.

19. Kolmnurka ABC, kus nurk B on täisnurk, on joonestatud siseringjoon keskpunktiga I, mis puutub külgi AB, BC ja AC vastavalt punktides F, D ja E. Sirged CI ja EF lõikuvad punktis M ning sirged DM ja AB lõikuvad punktis N. Tõesta, et

    (a) $|AI| = |ND|$;
    (b) $|FM| \cdot |EC| = |EI| \cdot |EM|$.

20. Rööpkülikus $ABCD$ kehtib $|AB| < |AC| < |BC|$. Punktist D kolmnurga ABC ümberringjoonele ω tõmmatud puutujad puutuvad seda ringjoont punktides E ja F ning lõikudel AD ja CE leidub ühine punkt. Teades, et $\angle ABF = \angle DCE$, leia $\angle ABC$.

Lahendused

1. *Vastus:* $x = 8$.

   Tähistame $y = \sqrt[3]{x}$. Korduva ruututõstmise teel saame

   $$\sqrt{1+\sqrt{1+y^3}} = y \implies \sqrt{1+y^3} = y^2 - 1 \implies$$
   $$y^4 - y^3 - 2y^2 = 0 \implies y^2(y^2 - y - 2) = 0.$$

   Selle võrrandi lahenditeks on $y = 0$, $y = -1$ ja $y = 2$, kust vastavalt $x = 0$, $x = -1$ ja $x = 8$. Esialgse võrrandi lahendiks sobib neist ainult viimane.

2. *Vastus:* $(x, y) = (0, 0)$, $(1, -1)$, $(6, -2)$, $(1, 3)$.

   Liidame võrrandid ja eraldame täisruudu:

   $$(x+y)^2 = 4(x+y) \implies x+y = 0 \text{ või } x+y = 4.$$

   Väärtuse $y = -x$ või $y = 4 - x$ asendame esialgsesse süsteemi, millega saame ruutvõrrandi. Kui $y = -x$, siis tekib võrrand $2x^2 - 2x = 0$, mille lahendid on $x = 0$ ja $x = 1$, kust vastavalt $y = 0$ ja $y = -1$. Kui $y = 4-x$, siis tekib võrrand $x^2 - 7x + 6 = 0$, mille lahendid on $x = 1$ ja $x = 6$, kust vastavalt $y = 3$ või $y = -2$. Kontroll näitab, et kõik neli saadud paari rahuldavad esialgset võrrandisüsteemi.

3. *Vastus:* $f(x) = 0$ või $f(x) = 1$.

   Võttes antud seoses $x = y = 0$, saame $f^2(0) = f(0)$, millest $f(0) = 0$ või $f(0) = 1$. Võttes aga ainult $x = 0$, saame, et iga y puhul $f^2(y) = f(0)$. Kui $f(0) = 0$, siis iga $y \in \mathbb{R}$ puhul $f(y) = 0$. Kui $f(0) = 1$, siis iga y puhul $f(y) = 1$ või $f(y) = -1$. Tõestame, et see funktsioon saab omandada ainult ühte väärtust, mitte kahte nagu näiteks $f(y) = -1$ juhul $y < 0$ ja $f(y) = 1$ muudel juhtudel.

   Eeldame, et $f(0) = 1$ ja f omandab vähemalt üks kord väärtuse -1, st $f(y_0) = -1$ mingi argumenti y_0 puhul. Võttes esialgses võrrandis $x = -y_0$, $y = y_0$, saame $f(0)f(y_0) = f(-y_0 - y_0 \cdot (-1)) = f(0)$ ehk $-1 = 1$. Vastuolu. Seega kui $f(0) = 1$, siis iga $x \in \mathbb{R}$ puhul $f(x) = 1$.

4. *Vastus:* $x + y = 0$.

   Tähistame $a = \sqrt{1+x^2} + x$, $b = \sqrt{1+y^2} + y$. Siis $ab = 1$, mistõttu a, $b \neq 0$. Ruutu tõstes saame $(a-x)^2 = 1 + x^2$ ehk $x = (a - 1/a)/2$. Analoogiliselt $y = (b - 1/b)/2$. Seega

   $$x + y = (a + b - (a+b)/ab)/2 = (a + b - (a+b))/2 = 0.$$

   See väärtus on ka võimalik, näiteks juhul $x = y = 0$.

5. Tähistame $x = \sqrt{a}$, $y = \sqrt{b}$, $z = \sqrt{c}$. Vasakpoolse võrratuse teisendame kujule $3(a^2+b^2+c^2) - \left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right) = (a+b+c)^2 \geq (a+b+c)(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})$. Seega piisab tõestada võrratus

   $$a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca},$$

   mis on samaväärne võrratusega

   $$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0.$$

Parempoolne võrratus on samaväärne võrratusega

$$x^4+y^4+z^4+xyz(x+y+z)+x^3y+xy^3+y^3z+yz^3+z^3x+zx^3 \geq$$
$$\geq 4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2).$$

Kuna $(x^3y+xy^3)+(y^3z+yz^3)+(z^3x+zx^3) \geq 2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$ (sulud näitavad, kus rakendame aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust), siis piisab tõestada, et

$$x^4+y^4+z^4+xyz(x+y+z) \geq x^3y+xy^3+y^3z+yz^3+z^3x+zx^3.$$

Viimane võrratus on aga samaväärne Schuri võrratusega

$$x^2(x-y)(x-z)+y^2(y-z)(y-x)+z^2(z-x)(z-y) \geq 0.$$

6. *Vastus:* a) 58; b) 116.

   Korrutises $120! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 120$ on $120:2=60$ paarisarvulist tegurit, need annavad algteguriteks lahutusse 60 kahte. 4-ga jaguvad arvud lisavad veel $120:4=30$ kahte, 8-ga jaguvad arvud $120:8=15$ kahte, 16-ga jaguvad arvud $\lfloor 120:16 \rfloor = 7$ kahte jne. Seega maksimaalne kahe aste, millega 120! jagub, on 2^x, kus $x = \lfloor 120/2 \rfloor + \lfloor 120/4 \rfloor + \lfloor 120/8 \rfloor + \lfloor 120/16 \rfloor + \ldots = 60+30+15+7+3+1 = 116$. Analoogiliselt, maksimaalne kolme aste on 3^y, kus $y = \lfloor 120/3 \rfloor + \lfloor 120/9 \rfloor + \lfloor 120/27 \rfloor + \ldots = 40+13+4+1 = 58$. Kuna $12^k = 2^{2k}3^k$, siis otsitav k väärtus on $\min(x/2, y) = 58$.

   Osa b) puhul saame analoogiliselt $x = \lfloor 240/2 \rfloor + \lfloor 240/4 \rfloor + \lfloor 120/8 \rfloor + \ldots = 120+60+30+15+7+3+1 = 236$, $y = \lfloor 240/3 \rfloor + \lfloor 240/9 \rfloor + \lfloor 240/27 \rfloor + \ldots = 80+26+8+2 = 116$ ning $k = \min(x/2, y) = 116$.

7. *Vastus:* 283.

   Vaatleme 4 juhtu: arvus pole paarisnumbreid, on üks paarisnumber, on kaks paarisnumbrit või kõik kolm numbrit on paaris.

   Esimesel juhul sobivad kõik arvud. Paarituid numbreid on 5, seega sobivaid arve on $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

   Teisel juhul saab arv 4-ga jaguda ainult siis, kui ainuke paarisnumber asub arvu lõpus. Arv $\overline{abc} = 100a+10b+c$ jagub 4-ga parajasti siis, kui 4-ga jagub arv $10b+c$. Kui arvus on $c=4$ või $c=8$, siis $10b+c$ ei jagu 4-ga olenemata paaritust arvust b ning seega kõik sellised arvud sobivad. Kui paarisnumber on 4, siis võime selle panna ükskõik millisele kolmest positsioonist ja ülejäänud positsioonid täita paaritute numbritega $5 \cdot 5 = 25$ viisil. Seega kokku on 75 võimalust ja analoogiliselt ka numbri 8 puhul 75 võimalust. Kui paarisnumber on $c=2$ või $c=6$, siis jagub $10b+c$ iga paaritu b korral 4-ga, seega siin sobivaid arve pole. Siit saime kokku 150 arvu.

   Kui kolmandal juhul on vähemalt üks paarisnumber 4 või 8, siis pannes selle viimasele kohale ja võttes numbriks b teise paarisnumbri, saame 4-ga jaguva arvu. Kui vähemalt üks paarisnumber on 2 või 6, siis pannes selle viimasele kohale ja võttes numbriks b arvu paaritu numbri, saame 4-ga jaguva arvu. Seega siin on sobivaid arve 0.

   Kui neljandal juhul on vähemalt üks number 4 või 8, siis pannes selle viimasele kohale, saame kindlasti 4-ga jaguva arvu. Kui iga number on 2 või 6, siis arv ei jagu 4-ga, sest arvud 22, 26, 62, 66 ei jagu 4-ga. Iga number võib olla 2 või 6, seega saame $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ arvu.

Kokku on otsitavaid arve $125 + 150 + 8 = 283$.

8. Iga peaaegu täisruudu $n(n+1)$ saab avaldada kujul

$$\frac{(n^2+2n)(n^2+2n+1)}{(n+1)(n+2)}.$$

9. *Vastus:* $(p,q,r,s) = (2,3,7,43)$.

   Kui $p \geq 3$, siis $1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r} - \frac{1}{s} \geq 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} > \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} \geq \frac{1}{pqrs}$. Seetõttu $p = 2$. Pannes selle väärtuse võrdusesse sisse, saame eeldusel $q \geq 3$ analoogiliselt vastuolu. Seetõttu $q = 3$. Pannes ka selle väärtuse võrdusesse sisse ja elimineerides murrud, saame võrduse $rs - 6r - 6s - 1 = 0$ ehk $(r-6)(s-6) = 37$. Seega $r - 6$ võib olla ainult ± 1 või ± 37. Kontrollides need väärtused läbi, leiame ainsa sobiva lahendi.

10. *Vastus:* arv $f(2015n) - f(n)$ on alati paaritu.

    Arvu $f(n)$ paarsus sõltub sellest, kas taandatud murdudes on paaritute lugejate arv paaris või paaritu. Kui 2^a on suurim kahe aste, millega n jagub, siis $n = 2^a k$, kus k on paaritu. Murru m/n taandamisel jääb lugeja paarisarvuks parajasti siis, kui m jagub arvuga 2^{a+1}. Arvude 1 kuni $n-1$ seas on selliseid arve $\lfloor n/2^{a+1} \rfloor = \lfloor k/2 \rfloor = (k-1)/2$. Seega paaritute lugejate arv on $n - 1 - (k-1)/2$. Arvude $f(n)$ ja $n - 1 - (k-1)/2$ paarsus on sama. Peale selle, $2015n = 2^a \cdot (2015k)$ ja analoogiliselt saame, et arvude $f(2015n)$ ja $2015n - 1 - (2015k - 1)/2$ paarsus on sama. Kuna arv

$$(2015n - 1 - (2015k-1)/2) - (n - 1 - (k-1)/2) = 2014n - 1007k$$

    on alati paaritu, siis on seda ka arv $f(2015n) - f(n)$.

11. *Vastus:* a) jah; b) jah; c) ei.

    Arv $2N + 1$ on alati paaritu ning arv $N/3$ on sama paarsusega nagu N. Seega niipea kui tahvlile tekib paaritu arv $2N + 1$, on kõik järgnevad arvud paaritud. Seega ainukesed paarisarvud, mis võivad tahvlil olla, on 12 ja 4. Osa c) on lahendatud.

    Arvu 29 saame (paaritust) arvust 87, arvu 87 arvust 43, selle omakorda arvust 21 ja arvu 21 arvust 63.

    Lihtne on saada arvu 3: 12, 4, 9, $3 = 2^2 - 1$. Arvust $2^n - 1$ saame $2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$. Nii saame järjest arvud $2^3 - 1, 2^4 - 1, \ldots$ Seega on võimalik saada arv b) $2^{12} - 1 = 4095$ ja arv $2^6 - 1$, millest edasi saame 21, 43, 87 ja a) 29.

12. *Vastus:* a) jah; b) ei.

    a) Näide sobivast turniirist (tabeli võib lugeja ise koostada): meeskond A võitis meeskonda B ja kaotas kõigile ülejäänutele, meeskond B võitis meeskondi C ja D ning kaotas meeskondadele E, F, G, meeskond C võitis meeskondi E ja G ning kaotas meeskondadele D ja F, meeskond D võitis meeskonda F ja kaotas meeskonadele E ja G, meeskond E võitis meeskonda F ja kaotas meeskonnale G ning meeskond F võitis meeskonda G.

b) Eeldame, et turniirist võttis osa 6 meeskonda. Siis mängitakse $C_6^2 = 15$ mängu ja meeskonnad jagavad omavahel 15 punkti. Kui meeskond A koguks vähimana vähemalt 2 punkti, siis peaksid meeskonnad omavahel ära jagama $2 + 3 \cdot 5 > 15$ punkti. Kõik eelviimase punktide arvuga meeskonnad kaotasid meeskonnale A, seega kogus A vähemalt 1 punkti ehk kokkuvõttes täpselt 1 punkti ja eelviimase punktide arvu kogus ainult üks meeskond B. Meeskond B kogus vähemalt 2 punkti ja ülejäänud 4 meeskonda igaüks vähemalt 3 punkti. Kui vähemalt ühte arvudest 2, 3, 3, 3, 3 suurendada, siis muutub punktide koguarv jälle suuremaks kui 15. Seega meeskondade tulemused pidid olema 1, 2, 3, 3, 3, 3. Iga meeskond, kes kogus 3 punkti, pidi kaotama meeskonnale A või B, kuid siis pidanuks A ja B kogutud punktide arv olema vähemalt 4, mitte $1 + 2$. Oleme jõudnud vastuolule.

13. *Vastus:* arvud on võrdsed.

Iga pühapäeval kirjutatud arvu võib jaotada 25 kahenumbriliseks plokiks. Plokke on nelja tüüpi: A = 11, B = 12, C = 21, D = 22. Arvus on ühtesid ja kahtesid võrdselt parajasti siis, kui plokkide 11 ja 22 arv on võrdne (plokid 12 ja 21 ühtede ja kahtede arvu erinevaks ei muuda). Seega koosneb pühapäevases loendis iga arv parajasti „numbritest“ A, B, C, D, kus „numbrite“ A ja D arv on võrdne. See loend langeb kokku laupäevase loendiga, ainult „numbrid“ on erinevad.

14. *Vastus:* 41.

Kui leidub rida, milles kasutatud värvid erinevad kõik ülemises reas kasutatud värvidest, siis esineb nendes kahes reas maksimaalselt $5 + 5 = 10$ värvi. Igas veerus kasutavad nende kahe rea ruudud ära 2 värvi ning ülejäänud ruutude jaoks jääb $5 - 2 = 3$ värvi. Seega kokku pole ruudustikus värve rohkem kui $5 + 5 + 3 \cdot 10 = 40$.

Kui aga igas reas leidub vähemalt üks värv, mis on sama ülemise rea mõne värviga, siis on ülemises reas maksimaalselt 5 erinevat värvi ning igas ülejäänud reas maksimaalselt $5 - 1 = 4$ erinevat värvi. Seega pole värve rohkem kui $4 \cdot 5 + 9 = 41$.

Viimane olukord on võimalik: värvime joonisel märgitud ruudud 40 värviga ja kõik ülejäänud ruudud 41. värviga.

×	×	×	×						
	×	×	×	×					
		×	×	×	×				
			×	×	×	×			
				×	×	×	×		
					×	×	×	×	
						×	×	×	×
×							×	×	×
×	×							×	×
×	×	×							×

15. *Vastus:* Pearu.

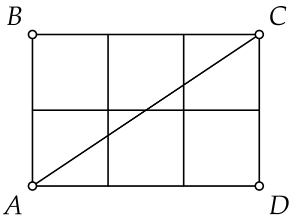
Kui tahvlil on arv 1, siis toob käik kaasa kaotuse, st käigulolija kindlasti kaotab. Arvu 2 puhul käigulolija võidab, sest ta võib selle arvu asendada arvuga $2 - 1 = 1$, mis toob vastasele kaasa kaotuse. Arvu 3 puhul käigulolija kaotab, sest 1 lahutamine jätab vastasele võitva arvu 2, ja rohkema lahutamine kaotab kohe. Sedasi võib järjest kindlaks teha iga arvu n võitvuse: kui vähemalt üks saadav arv on kaotav, siis arv n on võitev; kui aga kõik saadavad arvud on võitvad, siis n on kaotav. Meil on vaja kindlaks teha, kas arv 1345 on võitev (avakäigu tegijale Andresele).

Kehtib võrdus $1345 = 5 \cdot 269$ (kus 269 on algarv), seega tegurid on 1, 5, 269, 1345. Eeldame, et pärast Andrese esimest käiku jääb järele paaritu arv. Selleks pidi Andres lahutama arvust 2 või 4 tegurit. Pärast 1345 lahutamist kaotaks ta kohe. Seega võime eeldada, et ta valis arvud $1+5$, $1+269$ või $5+269$ ja kirjutas ühe arvudest 1339, 1075, 1071. Pearu võib nende asemele kirjutada arvud $1339-13-103 = 1223$, $1075-1-5 = 1069$, $1071-3-7 = 1061$. Kõik need on algarvud, seega peab Andres, kui ta ei taha kohe kaotada, lahutama teguri 1 ja kirjutama paarisarvu.

Seega kui Andres kohe ei kaota, siis ilmub pärast tema esimest või teist käiku tahvlile mingi paarisarv $a > 0$. Kui arv $a - a/2 = a/2$ on kaotav, siis on ta kaotav Andresele ja Pearul leidub võitev strateegia. Kui aga arv $a/2$ on võitev, siis saab sellest lahutada teatavad tegurid $d_1, d_2, \ldots$ ning jõuda kaotava arvuni $b = a/2 - d_1 - d_2 - \ldots$ Kuid siis on $a/2, d_1, d_2, \ldots$ arvu a erinevad tegurid ($d_i < a/2$, sest $b > 0$) ning neid arvust a lahutades saab Pearu jätta Andresele ette kaotava arvu b, seega ka sel juhul leidub Pearul võitev strateegia.

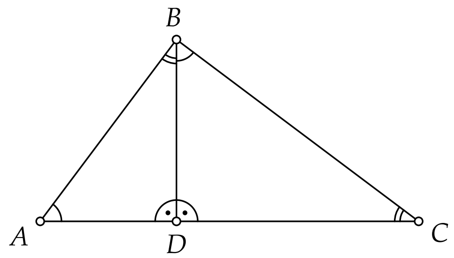
16. *Vastus:* $11/12$.

Olgu A, B, C, D ruudustiku tipud, kusjuures diagonaal on AC. Mõlemad keskmised ruudud tükeldatakse täisnurkseks kolmnurgaks ja viisnurgaks. Kolmnurgad on sümmeetria tõttu võrdsed, sest kummagi alus on pool ruudu küljepikkusest ehk $1/2$. Võrdsete nurkade tõttu on need kolmnurgad sarnased kolmnurgaga ABC, nii et kolmnurkade kaatetid suhtuvad nagu $2:3$. Seega ühe keskmise kolmnurga kõrgus on $1/3$ ja pindala $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$. Viisnurga pindala saame, kui lahutame arvust 1 arvu $1/12$.



17. *Vastus:* 6.

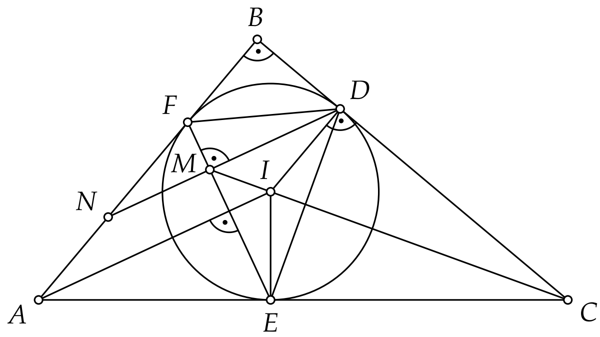
Nurk $\angle ADB$ võrdub ühega kolmnurga DBC nurkadest. Et $\angle ADB = 180° - \angle BDC = \angle DBC + \angle BCD$, siis $\angle ADB$ on suurem mõlemast nurgast $\angle DBC$ ja $\angle BCD$. Järelikult $\angle ADB = \angle BDC$. Viimased kaks nurka annavad kokku 180°, st kumbki on täisnurk. Kuna kolmnurk ABC on erikülgne, siis $\angle BAD \neq \angle BCD$, järelikult $\angle BAD = \angle CBD$. Lõpuks $\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = \angle ABD + \angle BAD = 180° - \angle ADB = 90°$. Seega saame kolmnurgas ABC rakendada Pythagorase teoreemi, mis annab $|AB| = \sqrt{|AC|^2 - |BC|^2} = 6$.



18. *Vastus:* 10.

Olgu lühema aluse pikkus $20-2x$, kus $x>0$, ning h trapetsi kõrgus. Trapetsi lühema aluse otspunktidest tõmmatud kõrgused jaotavad trapetsi kaheks täisnurkseks kolmnurgaks küljepikkustega x, h, 13. Pythagorase teoreemist $x^2+h^2=169$ ning trapetsi pindala valemist $180=h(20-x)$. Saime kaks võrrandit kahe tundmatuga. Elimineerides h, tekib võrrand $x^4-40x^3+231x^2+6760x-35200=0$. Sellel on lahend $x=5$, mistõttu neljanda astme polünoomil on tegur $x-5$. Täpsemalt, see polünoom esitub kujul $(x-5)(x^3-35x^2+56x+7040)$. Tõestame, et teisel teguril piirkonnas $x>0$ nullkohad puuduvad. Funktsiooni x^3-36x^2 tuletise $3x^2-72x$ nullkohad on 0 ja 24, seega selle funktsiooni vähim väärtus piirkonnas $x>0$ on $24^3-36\cdot24^2=-6912$. Järelikult $x^3-35x^2+56x+7040>x^3-36x+7040\geq -6912+7040=128$. See tähendab, et $x=5$ on ainuke sobiv lahend ning lühema aluse pikkus on $20-10=10$.

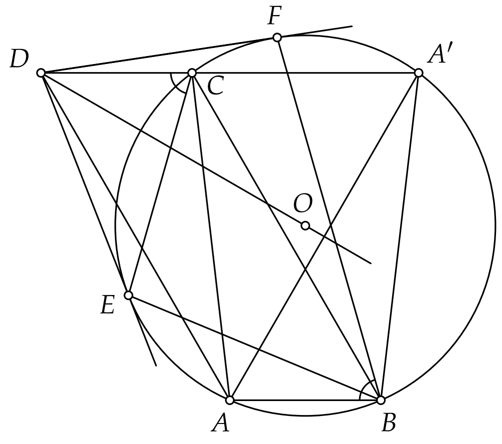
19. a) Sirge CI on võrdhaarse kolmnurga CED nurgapoolitaja ning et punktid D ja E on selle sirge suhtes sümmeetrilised, on kolmnurk MED samuti võrdhaarne. Lisaks $\angle CED=90^\circ-\angle ACB/2$. Analoogiliselt $\angle AEF=90^\circ-\angle BAC/2$. Seega $\angle MDE=\angle MED=180^\circ-\angle AEF-\angle DEC=(\angle ACB+\angle BAC)/2=45^\circ$ ja $\angle DME=90^\circ$. Lõik AN ja raadius ID on mõlemad risti küljega BC, seega on nad omavahel paralleelsed. Lõigud AI ja ND on risti lõiguga EF, seega samuti omavahel paralleelsed. Järelikult on $AIDN$ rööpkülik, millest $|AI|=|ND|$.



b) Võrdhaarsetes kolmnurkades AEF ja BFD kehtib $\angle AFE=90^\circ-\angle BAC/2$ ja $\angle BFD=45^\circ$, mistõttu $\angle MFD=45^\circ+\angle BAC/2$. Täisnurkses kolmnurgas DFM on $\angle MDF=45^\circ-\angle BAC/2=\angle ACB/2=\angle ICD$. Järelikult on täisnurksete kolmnurkade DFM ja CID vastavad nurgad võrdsed ja need kolmnurgad on sarnased. Seetõttu $|FM|=|MD|\cdot|ID|/|DC|=|EM|\cdot|EI|/|EC|$.

20. *Vastus:* 60°.

(Oluline on korrektne joonis. Ringjoon ω punktidega A, B, C ja keskpunktiga O asub nurga $\angle EDF$ sees. Kuna lõigul AD leidub punkt (lõigule CE kuuluv), mis asub ringjoone ω sees, jääb lõikaja AD teine lõikepunkt ringjoonega ω punktide A ja D vahele. Lõikaja CD teist lõikepunkti ringjoonega ω märgime tähega A'. Kas A' asub C ja D vahel või C asub A' ja D vahel. Mõlemal juhul $\angle DA'A=\angle CBA$ ja $\angle CBA<\angle CAB=\angle DCA$, sest $|AC|<|BC|$. Kui A' asub C ja D vahel, siis $\angle AA'D=\angle A'AC+\angle ACA'>\angle DCA$. Seega asub punkt C punktide D ja A' vahel. Järelikult paiknevad punktid ringjoonel sellises järjekorras: C, F, A', B, A, E.)



Kuna $\angle ABF = \angle DCE = 180^\circ - \angle ECA' = \angle EBA'$, siis kaared AEF ja EFA' on võrdse pikkusega (katavad võrdset nurka). Et punktid E ja F on sümmeetrilised sirge DO suhtes, siis on seda ka punktid A ja A'. See tähendab, et $|DA| = |DA'|$ ja $\angle DAA' = \angle DA'A$. Peale selle, $\angle DA'A = \angle CA'A = \angle CBA = \angle ADA'$, seega kolmnurk ADA' on võrdkülgne ning $\angle ABC = \angle ADA' = 60^\circ$.