Treeningvõistlus “Balti tee 2014” võistkonnale

Tartus, 4. novembril 2014

Vastused ja lahendused

1. *Vastus:* 15, 18, 45 ja kõik 0-ga lõppevad arvud.

   Olgu b arvu k üheliste number ning a arv, mille saame arvust k üheliste numbri ärajätmisel. Siis $k = 10a + b$ ja $k' = 100a + b$. Olgu $k' = kt$, s.t. $100a + b = (10a + b)t$, siis

   $$10a(10 - t) = b(t - 1)\,. \tag{1}$$

   Ilmselt $t \geqslant 1$, seega võrrandi (1) pooled on mittenegatiivsed ning järelikult $t \leqslant 10$. Juht $t = 1$ ei ole võimalik, kuna siis $a = 0$, mis on eeldustega välistatud. Kui $t = 10$, siis $b = 0$. Siit saame ühe lahendite pere: kõik 0-ga lõppevad arvud.

   Vaatleme edasi juhtu, kus $b \neq 0$; siis $2 \leqslant t \leqslant 9$. Kuna $b(t-1)$ jagub 10-ga, siis üks arvudest b ja $t - 1$ jagub 5-ga ning järelikult on võrdne 5-ga.

   Kui $b = 5$, jääb võrrandist (1) järele $2a(10 - t) = t - 1$. Siit $2(10 - t) \leqslant t - 1$, millest $t \geqslant 7$ ehk $t = 7$ või $t = 9$. Kui $t = 7$, saame $a = 1$, mis annab lahendi $k = 15$. Kui $t = 9$, saame $a = 4$, mis annab lahendi $k = 45$.

   Kui $t - 1 = 5$, jääb võrrandist (1) järele $8a = b$. Ainukeseks võimaluseks siin on $a = 1$, $b = 8$, mis annab lahendi $k = 18$.

2. *Vastus:* ei.

   Ülesande tingimusest saame

   $$a_2 = \left(\frac{1}{2004} + \frac{1}{1}\right) \cdot a_1^2 - \frac{1}{2004} + 1 = a_1^2 + 1 + \frac{a_1^2 - 1}{2004}\,.$$

   Kuna a_2 on täisarv, siis $a_1^2 - 1$ jagub arvuga $2004 = 4 \cdot 3 \cdot 167$. Seega a_1 on paaritu. Olgu $a_1 = 2m + 1$, siis

   $$a_1^2 - 1 = (a_1 - 1)(a_1 + 1) = 2m(2m + 2) = 4m(m + 1)\,.$$

   Järelikult $m(m + 1)$ jagub 167-ga. Kui $m > 0$, peaks seepärast olema $m \geqslant 166$, mis annaks $a_1 \geqslant 333$ ja vastuolu ülesandes seatud piiranguga a_1 suurusele. Seega $m = 0$, millest $a_1 = 1$.

   Kui nüüd mingi $k \geqslant 1$ korral $a_k = k$, siis

   $$a_{k+1} = \left(\frac{k}{2004} + \frac{1}{k}\right) \cdot k^2 - \frac{k^3}{2004} + 1 = k + 1\,.$$

   Induktsiooniga k järgi saame, et $a_k = k$ iga $k \geqslant 1$ korral. Kuna algarvude hulk on lõpmatu, siis jada (a_k) sisaldab algarve kuitahes suurte indeksite k korral.

3. a) Paneme tähele, et kui $a \leqslant b$, siis

   $$Z(a, b) = \frac{(3a)! \cdot (4b)!}{(a!)^4 \cdot (b!)^3} = \binom{3a}{a} \cdot \binom{2a}{a} \cdot \binom{4b}{b} \cdot \binom{3b}{b} \cdot \binom{2b}{a+b} \cdot \binom{a+b}{a} \cdot (b - a)!\,,$$

   seega $Z(a, b)$ on täisarv.

b) Olgu b mistahes mittenegatiivne täisarv. Valime suvalise sellise algarvu p, et $p > 3$ ja $p > 4b$. Algarvu p astendaja arvu $(3p)! \cdot (4b)!$ esituses algarvude astmete korrutisena on p valiku põhjal ilmselt 3. Samas p^4 jagab arvu $(p!)^4$. Seega $Z(p,b)$ ei ole täisarv.

4. Võtame $a_1 = 3$, $a_2 = 4$ ja iga $i \geqslant 2$ korral

$$a_{i+1} = \frac{a_i \cdot (a_i + 2)}{2}.$$

Tähistame iga k jaoks $s_k = a_1^2 + \ldots + a_k^2$. Siis $s_1 = a_1^2$. Edasi paneme tähele, et a_2 on paarisarv ning

$$s_2 = s_1 + a_2^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 = (4+1)^2 = (a_2 + 1)^2.$$

Nüüd alati, kui a_k on paarisarv ja $s_k = (a_k + 1)^2$, on $a_{k+1} = \dfrac{a_k \cdot (a_k + 2)}{2}$ paarisarv ning

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= s_k + a_{k+1}^2 = (a_k + 1)^2 + a_{k+1}^2 = \\ &= (a_k + 1)^2 + (a_{k+1} + 1)^2 - 2a_{k+1} - 1 = \\ &= (a_k + 1)^2 + (a_{k+1} + 1)^2 - a_k(a_k + 2) - 1 = \\ &= (a_{k+1} + 1)^2 . \end{aligned}$$

Induktsiooniga k järgi saame siit, et iga $k \geqslant 2$ korral on a_k paarisarv ja $s_k = (a_k + 1)^2$.

5. *Vastus:* $(3,2,5)$, $(2,5,3)$ ja $(5,3,2)$.

Paneme kõigepealt tähele, et ülesande tingimusi rahuldavad algarvud p, q, r peavad olema paarikaupa erinevad, sest nad paarikaupa ei jaga üksteist.

Tõestame nüüd lemma: *kui p, q, r on ülesande tingimusi rahuldavad algarvud ning $p > 2$ ja $r > 2$, siis $q^2 - 1$ jagub p-ga.*

Tõepoolest, kuna $q^r + 1$ jagub p-ga, siis $q^r \equiv -1 \not\equiv 1 \pmod{p}$, samas kui $q^{2r} \equiv (-1)^2 = 1 \pmod{p}$. Olgu d vähim positiivne täisarv, mille korral $q^d \equiv 1 \pmod{p}$; siis eespool tõestatu põhjal d on $2r$ jagaja, kuid mitte r jagaja. Kuna r on algarv, siis $d = 2r$ või $d = 2$. Oletame kõigepealt, et $d = 2r$. Fermat' väikesest teoreemist saame, et $q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, seega $p - 1$ peab jaguma $2r$-ga, millest $p \equiv 1 \pmod{r}$. Nüüd aga $0 \equiv p^q + 1 \equiv 2 \pmod{r}$ — vastuolu. Kui $d = 2$, siis d valiku põhjal $q^2 \equiv 1 \pmod{p}$. Lemma on tõestatud.

Tulles tagasi esialgse ülesande juurde, näeme, et kui p, q, r on kõik paaritud, siis lemma põhjal $q^2 - 1 = (q-1)(q+1)$ jagub p-ga. Kuna $q-1$ ja $q+1$ on mõlemad paarisarvud, peab p-ga jaguma arv $\dfrac{q-1}{2}$ või arv $\dfrac{q+1}{2}$. Mõlemal juhul $p \leqslant \dfrac{q+1}{2} < q$. Analoogiliselt saame $q < r$ ja $r < p$, millest $p < q < r < p$ — vastuolu.

Seega võime eeldada üldisust kitsendamata (vajadusel vaadeldavaid algarve tsükliliselt ümber nimetades), et $q = 2$ ning p ja r on paaritud. Lemma põhjal siis arv $2^2 - 1 = 3$ jagub p-ga, seega $p = 3$. Nüüd $3^2 + 1 = 10$ jagub r-ga, kust $r = 5$.

Kontroll näitab, et kolmik $(3,2,5)$ rahuldab ülesande tingimusi. Samuti sobivad selle kõik tsüklilised ümberjärjestused.

6. *Vastus:* sirge peab lõikama kolmnurga hüpotenuusi $3 + \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ ühiku kaugusel pikema kaateti vastastipust ning lühemat kaatetit $3 - \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ ühiku kaugusel samast tipust.

Olgu vaadeldav kolmnurk ABC, kus $|AC| = 3$ ja $|BC| = 4$. Selle kolmnurga pindala on 6 ja ümbermõõt 12. Olgu D ja E vaadeldava sirge lõikepunktid kolmnurga külgedega ning K nende külgede ühiseks otspunktiks olev kolmnurga tipp. Olgu $x = |DK|$, siis $|EK| = 6 - x$ ning

$$\frac{1}{2}x(6-x)\sin\angle K = 3\,. \tag{2}$$

Vaatleme kolme võimalust vastavalt sellele, milline kolmnurga tippudest on K.

1) Olgu $K = C$, punkt D asugu küljel AC ja punkt E küljel BC. Siis $\sin\angle K = 1$, võrrand (2) omandab kuju $x^2 - 6x + 6 = 0$ ning selle lahenditeks on $x = 3 \pm \sqrt{3}$. Kuna ilmselt $x \leqslant 3$ ja $6 - x \leqslant 4$, millest $x \geqslant 2$, siis kumbki lahend ei sobi.

2) Olgu $K = B$, punkt D asugu küljel BC ja punkt E küljel AB. Siis $\sin\angle K = \frac{3}{5}$, võrrand (2) omandab kuju $x^2 - 6x + 10 = 0$ ning sellel puuduvad reaalarvulised lahendid.

3) Olgu $K = A$, punkt D asugu küljel AB ja punkt E küljel AC. Siis $\sin\angle K = \frac{4}{5}$, võrrand (2) omandab kuju $x^2 - 6x + \frac{15}{2} = 0$ ning selle lahenditeks on $x = 3 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$. Kuna ilmselt $x \leqslant 5$ ja $6 - x \leqslant 3$, millest $x \geqslant 3$, siis sobib parajasti $x = 3 + \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Seega ainus sobiv võimalus on tõmmata sirge nii, et ta lõikaks hüpotenuusi $3 + \frac{\sqrt{6}}{2}$ ühiku kaugusel pikema kaateti vastastipust ja lühemat kaatetit $3 - \frac{\sqrt{6}}{2}$ ühiku kaugusel samast tipust.

7. Olgu O nelinurga $ABCD$ ümberringjoone keskpunkt ning olgu H_1, H_2, H_3, H_4 vastavalt kolmnurkade AKN, BKL, CLM, DMN kõrguste lõikepunktid. Kuna N on külje AD keskpunkt, siis $ON \perp AD$. Kuna samas $KH_1 \perp AD$, saame $KH_1 \parallel ON$. Analoogiliselt ka $NH_1 \parallel OK$. Seega ONH_1K on rööpkülik ning analoogiliselt ka ONH_4M on rööpkülik. Niisiis KH_1H_4M on rööpkülik. Analoogiliselt ka MKH_2H_3 on rööpkülik ning kokkuvõttes $H_1H_2H_3H_4$ on rööpkülik.

8. Arvestades, et võrdsetele kaartele toetuvad piirdenurgad on võrdsed, saame

$$\begin{aligned}
\alpha &= \angle ACB = \angle ADB = \angle AEB = \angle AFB = \angle BAC = \angle BDC = \angle BEC = \angle BFC\,,\\
\beta &= \angle CAD = \angle CBD = \angle CED = \angle CFD = \angle DAE = \angle DBE = \angle DCE = \angle DFE\,,\\
\gamma &= \angle EAF = \angle EBF = \angle ECF = \angle EDF = \angle FBA = \angle FCA = \angle FDA = \angle FEA\,.
\end{aligned}$$

Kõikide ülalpool loetletud nurkade summa võrdub kuusnurga sisenurkade summaga, järelikult $8\alpha + 8\beta + 8\gamma = 4\pi$, millest $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$.

Vaatleme nüüd kolmnurka BPD, kus P on diagonaalide BE ja DF lõikepunkt. Saame

$$\angle BPD = \pi - (\angle DBP + \angle PDB) = \pi - (\beta + \alpha + \gamma) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Järelikult $BE \perp FD$. Analoogiliselt saame, et $DA \perp BF$ ja $FC \perp DB$.

9. Pikendame lõiku DM üle otspunkti M punktini G, mis rahuldab tingimust $FG \parallel CD$. Siis $|MF| = |MC|$ parajasti siis, kui nelinurk $CDFG$ on rööpkülik, s.t. $\angle EDA = \angle CGF$ ehk samaväärselt $\angle EBA + \angle CGF = \pi$. See tingimus omakorda kehtib parajasti siis, kui $FBCG$ on kõõlnelinurk, s.t. $\angle CBM = \angle CFG$ ehk samaväärselt $\angle CBM = \angle DCM$. Viimane võrdus aga on samaväärne sellega, et kolmnurgad BCM ja CDM on sarnased, ehk $\frac{|CM|}{|BM|} = \frac{|DM|}{|CM|}$, ehk $|MB| \cdot |MD| = |MC|^2$.

10. Tähistame $a=|BC|$, $b=|CA|$, $c=|AB|$ ning $\alpha=\angle CAB$, $\beta=\angle ABC$, $\gamma=\angle BCA$. Olgu r kolmnurga ABC siseringjoone raadius. Lõikugu sirged BL ja CK punktis D. Siis

$$\angle BKL=\angle APK-\angle ABK=\frac{\pi-\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}=\frac{\alpha+\beta+\gamma-\alpha-\beta}{2}=\frac{\gamma}{2}=\frac{\angle ACB}{2}\,.$$

Seega

$$\angle IKL=\angle BKL=\frac{\angle ACB}{2}=\angle ACI\,,$$

mistõttu punktid I, K, Q, C asuvad ühel ringjoonel. Niisiis $\angle IKC=\angle IQC=\frac{\pi}{2}$. Analoogiliselt $\angle ILB=\frac{\pi}{2}$.

Järelikult punktid B, L, K, C asuvad ühel ringjoonel ning samuti punktid I, L, D, K asuvad ühel ringjoonel. Seejuures BC on kolmnurga CLK ümberringjoone diameeter ning ID on kolmnurkade ILK ja DLK ühise ümberringjoone diameeter.

Siinusteoreemist kolmnurgas DLK saame, et $|ID|=\frac{|LK|}{\sin\angle LDK}=\frac{|LK|}{\cos\angle LCK}$, ning siinusteoreemist kolmnurgas CLK saame, et $a=\frac{|LK|}{\sin\angle LCK}$. Seega $|ID|=a\tan\angle LCK$. Kuna $\sin\angle LCK=\sin\angle IQK=\sin\angle IQP=\sin\frac{\alpha}{2}$, leiame siit, et $|ID|=a\tan\frac{\alpha}{2}$. Teiselt poolt aga $r=|AQ|\tan\frac{\alpha}{2}$ ja $|AQ|=\frac{b+c-a}{2}$.

Kolmnurga ILK ümberringjoon puutub ABC siseringjoont parajasti siis, kui kolmnurga ILK ümberringjoone diameeter võrdub ABC siseringjoone raadiusega, s.t. $r=|ID|$, mis vastavalt eespool tõestatule on samaväärne sellega, et $\frac{b+c-a}{2}=a$, ehk $b+c=3a$.

11. *Vastus:* vähim väärtus on 0, mille avaldis omandab $x=1$ korral.

Teisendame antud avaldist:

$$x^8-x^5-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}=\frac{x^{12}-x^9-x^3+1}{x^4}=\frac{(x^9-1)(x^3-1)}{x^4}\,.$$

Et x^9-1 ja x^3-1 on alati ühe ja sama märgiga ning $x^4>0$, siis on avaldise väärtus mittenegatiivne mistahes $x\neq 0$ korral. Väärtuse 0 omandab avaldis parajasti siis, kui $x^9=1$ või $x^3=1$, s.t. $x=1$ korral.

12. *Vastus:* parabooli kaarte projektsioonide pikkuste vahe on 1.

Ülesande tingimuste kohaselt on võrranditel $x=x^2+px+q$ (ehk $x^2+(p-1)x+q=0$) ja $2x=x^2+px+q$ (ehk $x^2+(p-2)x+q=0$) kummalgi kaks mittenegatiivset reaalarvulist lahendit. Olgu võrrandi $x^2+(p-1)x+q=0$ lahendid $a\leqslant b$ ning võrrandi $x^2+(p-2)x+q=0$ lahendid $c\leqslant d$, siis $a+b=1-p$ ja $c+d=2-p$. Et vaadeldavate parabooli kaarte projektsioonid x-teljele on vastavalt pikkusega $a-c$ ja $d-b$, siis nende projektsioonide pikkuste vahe on $(d-b)-(a-c)=(c+d)-(a+b)=(2-p)-(1-p)=1$.

13. *Vastus:* $b=0$ ja $0\leqslant a<4$.

Olgu z võrrandi $f(x)=0$ mingi lahend, siis $f(z)=0$ ja vastavalt ülesande tingimustele ka $f(f(z))=0$, kust $b=f(0)=f(f(z))=0$. Seega $f(x)=x(x+a)$ ning võrrandite $f(x)=0$ ja $f(f(x))=0$ ühine lahendite hulk on $\{0,-a\}$. Et $f(f(x))=f(x)(f(x)+a)=x(x+a)(x^2+ax+a)$, siis on meil vaja leida sellised a väärtused, mille korral ruutkolmliikmel x^2+ax+a ei ole muid reaalarvulisi nullkohti peale 0 ja $-a$. Kui 0 või $-a$ on ruutkolmliikme x^2+ax+a nullkoht, siis $a=0$ ning ruutkolmliikmel x^2+ax+a ei ole tõepoolest muid reaalarvulisi nullkohti. Teine võimalus on, et ruutkolmliikmel x^2+ax+a reaalarvulised nullkohad üldse puuduvad, s.t. $a^2-4a<0$, kust $0<a<4$.

14. Näitame kõigepealt induktsiooniga n järgi, et jada (a_n) on rangelt kasvav. Selleks paneme kõigepealt tähele, et $a_1 < a_2 < a_3 = 5 < a_4$. Olgu nüüd $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ mingi $k \geqslant 4$ korral, siis

$$a_{k+1}a_{k-1} = a_k^2 \pm 1 \geqslant a_k^2 - 1 > a_k^2 - a_k = a_k(a_k - 1) \geqslant a_k a_{k-1},$$

kust $a_{k+1} > a_k$. Seega on jada (a_n) rangelt kasvav ning $a_{n-1} \geqslant 5$ mistahes $n \geqslant 4$ korral, mistõttu arvudest $a_n^2 + 1$ ja $a_n^2 - 1$ ülimalt üks saab olla a_{n-1} kordne. Niisiis eksisteerib ülimalt üks ülesande tingimusi rahuldav jada.

Näitame nüüd, et jada (b_n), kus $b_1 = 1$, $b_2 = 2$ ja $b_{n+2} = 2b_{n+1} + b_n$ iga $n \geqslant 1$ korral, rahuldab ülesande tingimusi. Tõepoolest, $b_3 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ ja $b_4 = 2 \cdot 5 + 2 = 12$. Näitame nüüd induktsiooniga n järgi, et $b_{n+1}b_{n-1} = b_n^2 + (-1)^n$ iga $n \geqslant 2$ korral. Väite kehtivuses $n = 2$ ja $n = 3$ korral on lihtne vahetult veenduda. Olgu nüüd $b_{k+1}b_{k-1} = b_k^2 + (-1)^k$ mingi $k \geqslant 3$ korral. Siis väide, et $b_{k+2}b_k = b_{k+1}^2 + (-1)^{k+1}$, on samaväärne sellega, et $b_{k+2}b_k + b_{k+1}b_{k-1} = b_{k+1}^2 + b_k^2$, ehk $(b_{k+2} - b_k)b_k = (b_{k+1} - b_{k-1})b_{k+1}$. Et vastavalt jada (b_n) definitsioonile $b_{k+2} - b_k = 2b_{k+1}$ ja $b_{k+1} - b_{k-1} = 2b_k$, siis see võrdus tõepoolest kehtib.

15. *Vastus:* 11 dollarit.

Vaatleme Fibonacci jada (F_n), mis on defineeritud seostega $F_0 = F_1 = 1$ ja $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ iga $n \geqslant 1$ korral. Paneme tähele, et $144 = F_{11}$ ning näitame, et mistahes $n \geqslant 2$ korral vähim rahahulk, mis tagab Jackil hulgast $\{1, 2, \ldots, F_n\}$ valitud arvu äraarvamise vastavalt ülesandes kirjeldatud reeglitele, on n dollarit.

Tähistagu $f(k)$ vähimat dollarite arvu, mis garanteerib hulgast $\{1, 2, \ldots, k\}$ valitud arvu äraarvamise vastavalt ülesande reeglitele. Siis f on mittekahanev funktsioon (sest kui $k \leqslant m$, siis hulgast $\{1, 2, \ldots, k\}$ valitud arvu äraarvamiseks võime rakendada sama strateegiat nagu hulgast $\{1, 2, \ldots, m\}$ valitud arvu äraarvamiseks, “unustades” teadmise, et valitud arv ei saa olla hulgast $\{k+1, \ldots, m\}$ — seega $f(k) \leqslant f(m)$). Samuti paneme tähele, et mistahes $k < m$ korral kehtib seos

$$f(m) \leqslant \max\bigl(f(k) + 2, f(m-k) + 1\bigr). \tag{3}$$

Tõepoolest, esitades kõigepealt küsimuse “Kas valitud arv kuulub alamhulka $\{1, 2, \ldots, k\}$?”, saame jaatava vastuse korral arvu leidmiseks kulutada ülimalt $f(k) + 2$ dollarit, eitava vastuse korral aga ülimalt $f(m-k) + 1$ dollarit.

Järgmiseks näitame induktsiooniga n järgi, et $f(F_n) \leqslant n$ mistahes $n \geqslant 2$ korral. Tõepoolest, $f(F_2) = f(2) \leqslant 2$ (piisab nt. küsimusest “Kas valitud arv kuulub alamhulka $\{1\}$?”). Kehtigu nüüd võrratus $f(F_i) \leqslant i$ iga $i \leqslant k$ korral, siis arvestades (3) ning seost $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ saame

$$f(F_{k+1}) \leqslant \max\bigl(f(F_{k-1}) + 2, f(F_k) + 1\bigr) \leqslant \max(k+1, k+1) = k+1.$$

Lõpuks näitame induktsiooniga x järgi, et mistahes sellise positiivse täisarvu $x \geqslant 2$ korral, kus $F_{n-1} < x \leqslant F_n$ ja $n \geqslant 2$, on $f(x) \geqslant n$. See väide kehtib $x = 2$ korral — et $F_1 = 1$ ja $F_2 = 2$, siis $n = 2$ ning tõepoolest $f(2) \geqslant 2$, sest hulgast $\{1, 2\}$ valitud arvu leidmiseks on vajalik vähemalt üks küsimus ja vastus sellele võib olla “jah”, mis läheb maksma 2 dollarit. Olgu nüüd $x \geqslant 3$, $F_{n-1} < x \leqslant F_n$ (siin $n \geqslant 3$) ning kehtigu väide iga $y < x$ korral. Esitades kõigepealt küsimuse mingi ülimalt F_{n-3}-elemendilise alamhulga kohta, kulutaksime vastuse “ei” korral vähemalt

$$f(x - F_{n-3}) + 1 \geqslant f(F_{n-1} + 1 - F_{n-3}) + 1 = f(F_{n-2} + 1) + 1 \geqslant (n-1) + 1 = n$$

dollarit. Esitades aga kõigepealt küsimuse mingi vähemalt $(F_{n-3} + 1)$-elemendilise alamhulga kohta, kulutaksime vastuse “jah” korral vähemalt

$$f(F_{n-3} + 1) + 2 \geqslant (n-2) + 2 = n$$

dollarit. Seega $f(x) \geqslant n$ iga $F_{n-1} < x \leqslant F_n$ korral ning muuhulgas ka $f(F_n) \geqslant n$. Kokkuvõttes olemegi näidanud, et $f(F_n) = n$ iga $n \geqslant 2$ korral.

16. *Vastus:* alustajal.

Nummerdame mälupesad arvudega $0, 1, \ldots, 2003$ nii, et algul on mälupesas k arv 2^k. Valigu alustaja oma esimesel käigul mälupesad 0 ja 1998 kuni 2003 ning oma igal järgmisel käigul needsamad mälupesad, mis valis tema vastane oma viimasel käigul. Näitame, et siis ühegi alustaja käigu tulemusena ei saa üheski mälupesas mittenegatiivne arv muutuda negatiivseks.

Selleks paneme tähele, et igal käigul vähendatakse arvu vähemalt ühes mälupesas, mille number ei ole suurem kui 1997. Et neis mälupesades algul olevate arvude summa on $1+2+4+\ldots+2^{1997} = 2^{1998}-1$, siis hiljemalt 2^{1998} käigu järel saab mingis mälupesas arv negatiivseks ja mäng lõpeb. Kuid 2^{1998} käiguga ei saa muutuda negatiivseks ükski arv mälupesades 1998 kuni 2003, ning kõigis ülejäänud mälupesades on alustaja ülaltoodud strateegia korral tema iga käigu järel paarisarvud.

17. *Vastus:* paigutus

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 8 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

ning sellest pöörete ja peegelduste abil saadavad paigutused.

Tähistame tabelisse kirjutatavad arvud

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ning olgu S ülesandes mainitud ühine summa. Liites arvud neljale 2×2 "nurgaruudule" vastavates tabeli lahtrites, saame

$$4S = (a_{11}+a_{13}+a_{31}+a_{33}) + 2(a_{12}+a_{21}+a_{23}+a_{32}) + 4a_{22} = 3S + 4a_{22}\,.$$

Liites aga arvud ülejäänud kahele ruudule vastavates tabeli lahtrites, saame

$$2S = (a_{11}+a_{13}+a_{31}+a_{33}) + (a_{12}+a_{21}+a_{23}+a_{32}) = 45 - a_{22}\,.$$

Neist kahest võrdusest leiame, et $a_{22} = 5$ (s.t. 5 on tabeli keskmises lahtris) ja $S = 20$.

Mistahes ruudu korral, mille tippudele vastavates lahtrites esinevad arvud 1 ja 5, peab ülejäänud kahes lahtris olevate arvude summa olema 14 — ainsad sobivad arvud on 6 ja 8. Samuti mistahes ruudu korral, mille tippudele vastavates lahtrites esinevad arvud 3 ja 5, peab ülejäänud kahes lahtris olevate arvude summa olema 12 — ainsad sobivad arvud on 4 ja 8. Seega peavad 1 ja 3 paiknema tabeli kahes naabernurgas, 8 nende vahel ning 6 ja 4 vastavalt 1 ja 3 kõrval tabeli servades. Vaadeldes tabeli servadega 45° all paiknevat ruutu näeme, et 8 vastas peab olema 2, ning vaadeldes arve 5 ja 2 hõlmavaid 2×2 "nurgaruute" veendume, et ka ülejäänud arvude 7 ja 9 paigutus on eelnevaga üheselt määratud.

18. *Vastus:* $4(M-V)$.

Olgu murdjoone sisepiirkonda kuuluvate mustade ruutude jaoks nende samuti murdjoone sisepiirkonda kuuluvate naaberruutude arvud vastavalt $a_1, a_2, \ldots, a_M$, ning olgu $b_1, b_2, \ldots, b_V$ analoogilised naaberruutude arvud murdjoone sisepiirkonda kuuluvate valgete ruutude jaoks. Iga vaadeldava musta ruuduga i külgneb siis $4-a_i$ murdjoone musta ühiklõiku ning iga vaadeldava valge ruuduga j külgneb $4-b_j$ murdjoone valget ühiklõiku. Otsitav mustade ja valgete ühiklõikude arvude vahe on niisiis

$$\sum_{i=1}^{M}(4-a_i) - \sum_{j=1}^{V}(4-b_j) = 4(M-V) - \sum_{i=1}^{M} a_i + \sum_{j=1}^{V} b_j\,.$$

Siinjuures $\sum_{i=1}^{M} a_i = \sum_{j=1}^{V} b_j$ (sest mistahes musta ruudu iga naaberruut on valge ja vaadeldav must ruut on omakorda selle valge ruudu naaberruuduks), millest saame, et otsitav vahe on $4(M-V)$.

19. Vaatleme suvalist 9 antud punkti — et ülesande tingimuste kohaselt leiduvad kaks ringjoont, mis koos sisaldavad kõik need 9 punkti, siis üks neist ringjoontest sisaldab vähemalt 5 vaadeldavat punkti. Olgu see ringjoon c ning need 5 punkti A, B, C, D, E.

    Vaatleme nüüd kõiki neid antud punkte, mis *ei asu* ringjoonel c. Paneme tähele, et mistahes selliste punktide kolmik X, Y, Z ei saa olla ühel sirgel ning järelikult määrab mingi ringjoone. Selles veendumiseks vaatleme punkte X, Y, Z koos punktidega A, B, C, D, E ja veel ühe suvalise punktiga ning rakendame ülesande tingimust — peavad leiduma kaks ringjoont, mis koos sisaldavad kõik need 9 punkti. Et vähemalt kolm punktidest A, B, C, D, E peavad paiknema ühel neist ringjoontest, siis see üks ringjoon on c; et ükski punktidest X, Y, Z ei asu ringjoonel c, siis peavad need kõik asuma teisel ringjoonel.

    Kui nüüd ringjoonel c mittepaiknevaid punkte on kokku ülimalt 3, siis leidub neid kõiki läbiv ringjoon ja väide on tõestatud. Kui selliseid punkte on aga rohkem kui 3, siis fikseerime suvalised kolm neist — olgu need F, G, H — ning nendega määratud ringjoone c'. Vaatleme nüüd suvalist antud punkti P, mis on erinev punktidest $A, \ldots, H$. Vastavalt ülesande tingimusele leiduvad kaks ringjoont, mis koos sisaldavad kõiki punkte $A, \ldots, H$ ja P. Eelmises lõigus esitatud arutlusega veendume jällegi, et üks neist ringjoontest on c; et punktid F, G, H ei paikne ringjoonel c, siis peab teine neist ringjoontest olema c'. Niisiis paikneb mistahes punktidest $A, \ldots, H$ erinev antud punkt P kas ringjoonel c või ringjoonel c' ning järelikult need kaks ringjoont koos sisaldavad kõik antud punktid.

20. *Vastus:* 4.

    Näitame kõigepealt, et leidub 101 ruudust koosnev kujund, mida ei saa 102×102 ruudulise paberi tükist välja lõigata rohkem kui 4 eksemplari. Selliseks kujundiks sobib "rist", mis koosneb kahest teineteise keskkohtades ristuvast 51 ruudu pikkusest ribast. Iga sellise "risti" keskmine ruut peab asuma 102×102 ruudulise paberi keskmises 52×52 osas, mille saame omakorda jagada neljaks 26×26 tükiks. Igal sellisel tükil saab ilmselt asuda ainult ühe vaadeldava "risti" keskmine ruut.

    Näitame nüüd, et mistahes 101 ruudust koosnevat kujundit saab 102×102 ruudulise paberi tükist välja lõigata vähemalt 4 eksemplari. Selleks paneme tähele, et mistahes sidusa (ülesande tekstis kirjeldatud mõttes) n ruudust koosneva kujundi jaoks leidub selline arv k (kus $1 \leqslant k \leqslant n$), et vaadeldava kujundi saab tervenisti paigutada $k \times (n+1-k)$ ruudust koosnevale ristkülikule — selle väite saame kergesti tõestada induktsiooniga n järgi. Järelikult leidub selline k, et meie 101 ruudust koosneva kujundi saame saab tervenisti paigutada $k \times (102-k)$ ruudust koosnevale ristkülikule. Jääb üle veenduda, et 102×102 ruudu servadesse saab paigutada 4 sellist lõikumatut ristkülikut (mis teisenduvad üksteiseks ruudu 90° pööretel).