

# Тренировочное соревнование команды “Балтийского пути”

4 ноября 2014 г.

1. Добавляя цифру 0 между цифрами десятков и единиц положительного целого числа  $k \geq 10$ , получают число  $k'$ . При каких  $k$  число  $k'$  будет делиться на  $k$ ?
2. Последовательность неотрицательных целых чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  при любом  $k \geq 1$  удовлетворяет условию

$$a_{k+1} = \left( \frac{k}{2004} + \frac{1}{k} \right) \cdot a_k^2 - \frac{k^3}{2004} + 1.$$

Известно, что  $a_1 < 333$ . Возможно ли, что начиная с некоторого индекса  $k$  все числа  $a_k$  являются составными?

3. При любых неотрицательных целых чисел  $a$  и  $b$  обозначим

$$Z(a, b) = \frac{(3a)! \cdot (4b)!}{(a!)^4 \cdot (b!)^3}.$$

- а) Доказать, что  $Z(a, b)$  является целым числом всегда, когда  $a \leq b$ .
  - б) Доказать, что для любого неотрицательного целого числа  $b$  найдется бесконечно много таких неотрицательных целых чисел  $a$ , при которых  $Z(a, b)$  не является целым.
4. Доказать, что найдется бесконечная последовательность положительных целых чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  такая, что при любом  $k \geq 1$

$$a_1^2 + \dots + a_k^2$$

является квадратом некоторого целого числа.

5. Найти все такие тройки  $(p, q, r)$  простых чисел, где  $q^r + 1$  делится на  $p$ ,  $r^p + 1$  делится на  $q$  и  $p^q + 1$  делится на  $r$ .
6. Найти все способы разделить треугольник с длинами сторон 3, 4, 5 одним прямолинейным разрезом на две части, имеющие равные площади и равные периметры.
7. Пусть  $K, L, M, N$  — соответственно середины сторон  $AB, BC, CD, DA$  четырехугольника  $ABCD$ , вписанного в окружность. Доказать, что точки пересечения высот треугольников  $AKN, BKL, CLM$  и  $DMN$  являются вершинами некоторого параллелограмма.
8. В шестиугольнике  $ABCDEF$ , вписанном в окружность, имеется  $|AB| = |BC| = a$ ,  $|CD| = |DE| = b$  и  $|EF| = |FA| = c$ . Доказать, что у этого шестиугольника найдутся шесть попарно различных диагоналей, которые можно разбить на три пары так, что диагонали каждой пары перпендикулярны друг другу.
9. Окружность, проходящая через вершины  $A$  и  $B$  треугольника  $ABC$ , пересекает его стороны  $AC$  и  $BC$  соответственно в точках  $D$  и  $E$ . Лучи  $BA$  и  $ED$  пересекаются в точке  $F$ , а прямые  $BD$  и  $CF$  пересекаются в точке  $M$ . Доказать, что  $|MF| = |MC|$  тогда и только тогда, когда  $|MB| \cdot |MD| = |MC|^2$ .
10. Окружность с центром  $I$ , вписанная в треугольник  $ABC$ , касается его сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно в точках  $P$  и  $Q$ . Прямые  $BI$  и  $CI$  пересекают прямую  $PQ$  соответственно в точках  $K$  и  $L$ . Доказать, что окружность, описанная около треугольника  $ILK$ , касается вписанную окружность треугольника  $ABC$  тогда и только тогда, когда  $|AB| + |AC| = 3 \cdot |BC|$ .

11. При каких действительных числах  $x \neq 0$  значение выражения

$$x^8 - x^5 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4}$$

является наименьшим? Найти это наименьшее значение.

12. Лучи  $y = x$  и  $y = 2x$  (где  $x \geq 0$ ) выделяют две дуги параболы  $y = x^2 + px + q$  (т.е. каждая из рассматриваемых дуг параболы расположена между этими двумя лучами). Доказать, что разность длин проекций этих дуг на ось  $x$  не зависит от выбора  $p$  и  $q$ , и найти эту разность.
13. Пусть  $f(x) = x^2 + ax + b \cos x$ . Найти все значения  $a$  и  $b$ , при которых уравнения  $f(x) = 0$  и  $f(f(x)) = 0$  имеют одно и то же непустое множество действительных решений.
14. Доказать, что найдется ровно одна такая последовательность положительных целых чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , где  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ ,  $a_4 = 12$  и  $a_{n+1}a_{n-1} = a_n^2 \pm 1$  при каждом  $n \geq 2$ .
15. Джон и Джэк играют в следующую игру. Джон выбирает одно число из множества  $A = \{1, 2, \dots, 144\}$ . Джэк старается узнать выбранное Джоном число, подбирая по одному некоторые подмножества  $B_i$  множества  $A$  и задавая вопросы “Принадлежит ли выбранное число подмножеству  $B_i$ ?”. За каждый ответ “да” Джэк должен заплатить Джону 2 доллара, а за каждый ответ “нет” — 1 доллар. Если Джэк узнает выбранное Джоном число, то он выиграл и получит уплаченные Джону деньги обратно в двукратной сумме. Если же у Джэка деньги заканчиваются до того, как он узнает число, то он проиграл и деньги останутся у Джона. Сколько должен Джэк по меньшей мере иметь денег, чтобы он наверняка смог выиграть эту игру?
16. В 2004 ячейках памяти компьютера сначала записаны числа  $1, 2, 4, \dots, 2^{2003}$ . Два программиста по очереди будут изменять эти числа, выбирая на каждом ходу некоторые 7 ячеек и уменьшая число в каждом из них на 1. Если число в некоторой ячейке становится отрицательным, то компьютер сломается и программист, последним изменявший числа, проиграет. Какой из программистов имеет выигрышную стратегию?
17. Найти все способы записания чисел от 1 до 9 в клетки  $3 \times 3$  таблицы так, чтобы при каждом из 6 квадратов, имеющих все свои вершины в центрах клеток таблицы, сумма чисел в соответствующих клетках будет одна и та же.
18. На бесконечной клетчатой бумаге находится замкнутая несамопересекающаяся ломаная, все звенья которой расположены на линиях бумаги. Каждый единичный отрезок этой ломаной (т.е. отрезок, расположенный между двумя соседними клетками бумаги) раскрасят в черный или белый цвет соответственно цвету клетки, расположенной рядом с этим отрезком внутри ломаной. Пусть внутри ломаной имеется всего  $M$  черных и  $V$  белых клеток. Найти разность количества черных и белых единичных отрезков на ломаной.
19. На плоскости выбраны  $n \geq 9$  точек. Для любых 9 выбранных точек найдутся такие две окружности, которые вместе содержат все эти 9 точек. Доказать, что найдутся такие две окружности, которые вместе содержат все  $n$  выбранных на плоскости точек.
20. Дана связная фигура, состоящая из 101 клеток (т.е. с любой клетки этой фигуры можно двигаться на любую другую клетку, на каждом шагу перемещаясь с некоторой клетки на клетку, имеющую с ней общую сторону). Известно, что из куски клетчатой бумаги размером  $102 \times 102$  можно вырезать максимально  $n$  экземпляров данной фигуры. Найти наименьшее возможное значение  $n$ .