Treeningvõistlus “Balti tee 2013” võistkonnale

Tartus, 30. oktoobril 2013

1. Lõpmatu pabeririba laiusega 2 cm murtakse pooleks. Leia kattuva paberiosa vähim võimalik pindala.

2. Olgu Γ_1 ringjoon keskpunktiga O. Ringjoon Γ_2 läbib punkti O ning lõikab ringjoont Γ_1 punktides A ja B. Olgu L suvaline O-st erinev punkt ringjoonel Γ_2. Sirged OL ja AB lõikuvad punktis M. Tõesta, et $|OM| \cdot |OL| = |OA|^2$.

3. Kolmnurgas ABC on $\angle A = 60^\circ$. Nurgapoolitajad BL ja CM lõikuvad punktis O. Tõesta, et $|OL| = |OM|$. Tõesta, et küljel BC leidub punkt M nii, et kolmnurk KLM on võrdkülgne.

4. Kõõlnelinurga $ABCD$ külg AB on ühtlasi ümberringjoone diameeter. Olgu S diagonaalide lõikepunkt ning T punktist S lõigule AB tõmmatud ristlõigu aluspunkt. Tõesta, et ST on nurga $\angle CTD$ poolitaja.

5. Kõõlnelinurga $ABCD$ küljed AB ja BC on võrdse pikkusega ning diagonaalid lõikuvad punktis K. Leia külje AB pikkus, kui $|BK| = b$ ja $|DK| = d$.

6. Kolm jooksjat jooksevad ümmargusel staadionil pikkusega $2L$. Nad startisid koos, neil on ühtlane tempo ent igal jooksjal on erinev kiirus. Tõesta, et leidub ajahetk, mil üks jooksjatest on kummastki ülejäänust kaugusel vähemalt $0.99L$.

7. Ümmarguse laua ääres istub 2013 last, kes on nummerdatud $1, 2, \ldots, 2013$. Lapsed hakkavad üle ühe laua tagant lahkuma: $2, 4, \ldots$. Mitmes laps lahkub lauast viimasena?

8. Ruudustik mõõtmetega $n \times n$ on täidetud arvudega, mille absoluutväärtus ei ületa arvu 1. Igas 2×2 ruudus asuva nelja arvu summa on 0. Leia kõigi ruudustikku kirjutatud arvude summa suurim võimalik väärtus, kui $n \in \{3, 7, 2013\}$.

9. Sipelgas on 100×100 ruudustiku alumises vasakpoolses nurgaruudus ning hakkab liikuma ülemisse parempoolsesse nurgaruutu. Seejuures liigub ta iga käiguga kas ühe ruudu võrra üles või paremale. Ruudustiku keskmised 2×2 ruutu on mürgised ning sinna sipelgas ei lähe. Mitme erineva teekonna vahel saab sipelgas valida?

10. Jalgpalliturniirist võtab osa 20 meeskonda. Esimesel päeval mängib iga meeskond ühe mängu. Teisel päeval veel ühe. Tõesta, et pärast teist päeva võib valida 10 meeskonda, kes pole omavahel mänginud mitte ühtegi mängu.

11. Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille korral

$$n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$$

on mingi täisarvu ruut.

12. Olgu a täisarv. Arvu $3a$ saab esitada kujul $x^2 + 2y^2$, kus x ja y on täisarvud. Tõesta, et arvu a saab samuti esitada sellel kujul.

13. Olgu n positiivne täisarv, mille korral arv $n(n + 2013)$ on mingi täisarvu ruut.

a) Näita, et n ei ole algarv.

b) Leia vähemalt üks selline n.

14. Leia kõik kolmikud (n, p, q), kus n on positiivne täisarv ning p ja q on algarvud, mille korral

$$2^n p^2 + 1 = q^5.$$

15. Olgu x positiivne reaalarv, mille korral vahed $x^{2013} - x^{1960}$ ja $x^{1960} - x^{1907}$ on täisarvud. Tõesta, et x on täisarv.

16. Tõesta, et iga positiivse täisarvu n korral kehtib

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(n + \frac{1}{n}\right) \leqslant 2 \cdot n!.$$

17. Ringjoonele on kirjutatud mitu positiivset arvu, mille korrutis on 1. Tõesta, et nende seas leiduvad 2 kõrvuti asetsevat arvu x ja y nii, et $x(y+1) \geqslant 2$.

18. Leia kõik sellised funktsioonid $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et kõikide reaalarvude x ja y korral kehtib

$$f(x)f(y) + f(x+y) = xy.$$

19. Leia kõik reaalarvuliste kordajatega polünoomid $P(x)$, mille korral

$$(x+1)P(x-1) - (x-1)P(x)$$

on konstantne polünoom.

20. a) Tõesta, et positiivsete reaalarvude u, v, x, y korral kehtib võrratus

$$\frac{u}{x} + \frac{v}{y} \geqslant \frac{4(uy+vx)}{(x+y)^2}.$$

b) Olgu $a, b, c, d > 0$. Tõesta, et

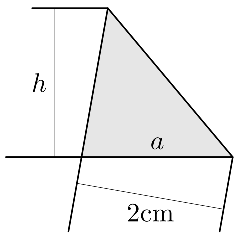
$$\frac{a}{b+2c+d} + \frac{b}{c+2d+a} + \frac{c}{d+2a+b} + \frac{d}{a+2b+c} \geqslant 1.$$

Treeningvõistlus “Balti tee 2013” võistkonnale

Tartus, 30. oktoobril 2013

Vastused ja lahendused

1. Kattuv paberiosa moodustab kolmnurga, mille kaks kõrgust on $h = 2$ cm ja pindala on $a \cdot h/2$. Kuna alus a on vähemalt sama pikk, kui pabeririba laius, siis on kattuva paberiosa pindala vähemalt $S = ah/2 \geqslant 2\text{cm} \cdot h/2 = 2\text{cm}^2$. Nii väike pindala on saavutatav, kui murda 45° nurga all.



Joonis 1

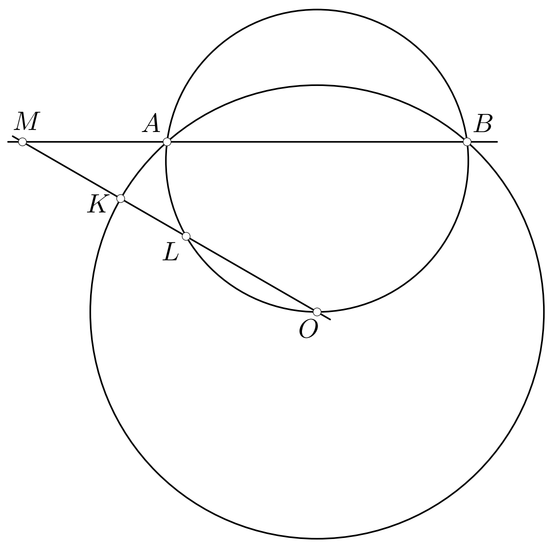
2. Olgu K kiire OL lõikepunkt ringjoonega Γ_1. Punkti M potents ringjoone Γ_2 suhtes on

$$|MA| \cdot |MB| = |ML| \cdot |MO| = |OM|^2 - |OM| \cdot |OL|$$

ja ringjoone Γ_1 suhtes

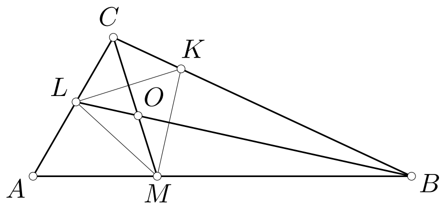
$$|MA| \cdot |MB| = |MK| \cdot (|MO| + |OK|) = |OM|^2 - |OK|^2.$$

Seega on $|OM| \cdot |OL| = |OK|^2 = |OA|^2$, mott.



Joonis 2

3. Vaatame nelinurka $ALOM$. Kuna $\angle LOM = 90^\circ + \angle A/2 = 120^\circ$, siis on nelinurga $ALOM$ vastasnurkade summa 180°, ehk ta on kõõlnelinurk. Kuna AO on nurgapoolitaja, siis $\angle LAO = \angle OAM$ ning nendele nurkadele toetuvad kõõlud on võrdsed ehk $LO = OM$.
Valime punkti K küljel BC selliselt, et $\angle KOL = 120^\circ$. Kolmnurkadel COL ja COK on ühine külg CO ning selle külje lähisnurgad on vastavalt võrdsed (nurk C on poolitaja, nurk O on 60°). Seega on need kolmnurgad võrdsed ning vastavad küljed $OL = OK$.
Kuna kolmnurgad OLK, OLM ja OKM on kõik võrdhaarsed tipunurgaga 120°, siis on $LK = LM = KM$ ehk kolmnurk KLM on võrdkülgne.

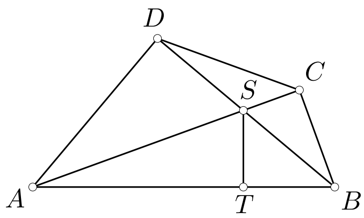


Joonis 3

4. *Lahendus 1.* Kuna $\angle ADB = 90^\circ = \angle STA$, siis $ADST$ on kõõlnelinurk. Analoogiliselt on $BCST$ kõõlnelinurk. Et ka $ABCD$ on kõõlnelinurk, siis saame

$$\angle STD = \angle SAD = \angle CAD = \angle CBD = \angle CBS = \angle CTS,$$

seega TS poolita nurga CTD.



Joonis 4

Lahendus 2. Vaatame kolmnurka ABS. Selle kõrgused on AC, BD, ST. On teada, et mistahes kolmnurga kõrgused on nende kõrguste aluspunktide poolt määratud kolmnurga nurgapoolitajad. Seega muuhulgas ST on nurga CTD poolitaja.

5. *Lahendus 1.* Tähistame $|AB| = x$. Kolmnurgad ADB ja KAB on sarnased, sest $\angle ADB = \angle BAC = \angle BAK$ ja nurk tipu B juures on ühine. Järelikult $\frac{x}{b+d} = \frac{b}{x}$, millest $x = \sqrt{b(b+d)}$.

Lahendus 2. Tähistame $|AB| = x$. Et kolmnurgad AKD ja BKC on sarnased, siis

$$\frac{x}{b} = \frac{|BC|}{|BK|} = \frac{|AD|}{|AK|} \quad \Rightarrow \quad |AD| = \frac{x}{b} \cdot |AK|.$$

Et kolmnurgad AKB ja DKC on sarnased, siis

$$\frac{x}{b} = \frac{|BA|}{|BK|} = \frac{|CD|}{|CK|} \quad \Rightarrow \quad |CD| = \frac{x}{b} \cdot |CK|.$$

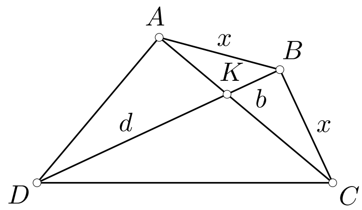
Kasutame Ptolemaiose teoreemi:

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| = x \cdot (|CD| + |AD|) = x \cdot (\frac{x}{b} \cdot |CK| + \frac{x}{b}|AK|) = \frac{x^2}{b} \cdot |AC|$$

Saame, et $(b+d) = |BD| = x^2/b$, millest $x = \sqrt{b(b+d)}$.

6. Me võime vaadelda jooksjaid esimese jooksja taustsüsteemis, seega võime üldisust kitsendamata eeldada, et esimene jooksja on paigal. Meil on kaks võimalust: leidub ajahetk $t > 0$, mil kõik jooksjad saavad uuesti kokku; või sellist hetke ei leidu.

Vaatame esmalt juhtu, kus jooksjad saavad uuesti kokku. Olgu esimene selline ajahetk t_1. Oletame, et selleks hetkeks on teine jooksja läbinud m täisringi, ning kolmas jooksja n täisringi. m ja n ei saa mõlemad olla paaris, sest siis oleksid jooksjad kohtunud ka hetkel $t_1/2$. Hetkel $t_1/2$ oli üks jooksjatest ülejäänud kahest jooksjast kaugusel L. Kui m ja n on mõlemad paaritud, siis on selleks jooksjaks paigalseisja. Kui vaid üks arvudest m ja n on paaritu, siis on otsitavaks jooksjaks see, kes ajaga t_1 suutis joosta paaritu arvu ringe.



Joonis 5

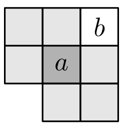
Nüüd vaatame juhtu, kus jooksjad korraga rohkem ei kohtu. Näitame, et leidub hetk, kui esimene jooksja on ülejäänutest vähemalt kaugusel $0.99L$. Kohtugu ülejäänud jooksjad teistkordselt hektel t. Seega kohtuvad nad ka hetkedel $2t, 3t, \ldots, 101t$. Nendest 101 kohtumisest peab leiduma kaks, mille puhul on kohtumispaigad üksteisele lähemal, kui $0.01L$. Seega leidub $0 < k \leqslant 101$ nii, et hetkel kt on teine ja kolmas jooksja koos, ning esimesele jookjale lähemal, kui $0.01L$. Seega leidub n, et hetkel nkt on teine ja kolmas jooksja koos ning esimesest jooksjast kaugemal, kui $0.99L$, aga lähemal kui L.

7. Tähistame $f(n)$ abil viimasena lahkujat, kui alguses on n last. Ilmselt $f(1) = f(2) = 1$. Samas on $f(2k) = 2f(k) - 1$, sest pärast k lahkujat on alles vaid paaritul kohal olevad lapsed, ning mäng algab justkui otsast peale. Samamoodi on $f(2k+1) = 2f(k) + 1$.

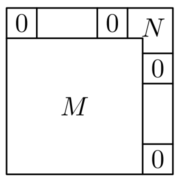
Niisiis on

$$\begin{aligned} f(2013) &= 2f(1006) + 1 = 4f(503) - 1 = 8f(251) + 3 = 16f(125) + 11 = 32f(62) + 27 = \\ &= 64f(31) - 5 = 128f(15) + 59 = 256f(7) + 187 = 512f(3) + 443 = \\ &= 1024f(1) + 955 = 1979. \end{aligned}$$

8. Tõestame induktsiooniga, et $(2k+1) \times (2k+1)$ ruudus olevate arvude summa on ülimalt $2k+1$. Ilmselt väide kehtib $k = 0$ korral. Induktsiooni samm $2k+3$ korral: Jaotame ruudu üheks ruuduks küljepikkuse-



Joonis 6



Joonis 7

ga $2k+1$, $2 \cdot k$ ruuduks küljepikkusega 2 ning üheks 8-ruuduliseks tükiks. Induktsiooni eelduse põhjal on $2k+1$ ruudus olevate arvude summa ülimalt $2k+1$. 8-ruudulises tükis olevate arvude summa on $b - a \leqslant |a| + |b| \leqslant 2$. Seega on kõigi arvude summa $M + N \leqslant 2k + 1 + 2 = 2k + 3$.

Piisab tuua näide, kus summa $2k+1$ on saavutatav: selleks sobib ruudustik, kus paaritut read on täidetud arvuga $+1$ ning paaris read arvuga -1.

9. Vastus: $\binom{198}{99} - 2 \cdot \binom{99}{49}^2$. Kui mürgitatud ruute ei oleks, siis tee valimiseks oleks $\binom{198}{99}$ võimalust. Tõepoolest, sipelgas peab tegema 198 suunavalikut, millest 99 on üles ning ülejäänud paremale.

Paneme tähele, et kõik sobimatud marsruudid läbivad ühte kahest mürgitatud ruudust kaugusel 99 sammu – mürgitatud ruute kaugusel 98 ja 100 võime ignoreerida. Sobimatuid teekondi läbi ühe mürgitatud ruudu kaugusel 99 on $\binom{99}{49} \cdot \binom{99}{50}$ ja läbi teise sama palju. Teekondi, mis läbiksid mõlemat ruutu, ei ole.

Niisiis on sobivaid teekondi $\binom{198}{99} - 2 \cdot \binom{99}{49}\binom{99}{50}$.

10. Vaatame graafi, kus tippudeks on meeskonnad, ning servadeks on mängitud mängud. Meil on graafis 20 tippu ja 20 serva. Igast tipust väljub täpselt 2 serva. Seega jaguneb graaf tsükliteks.

Näitame, et iga tsükli pikkus on paarisarv. Tõepoolest, kui meil oleks tsükkel pikkusega $2k+1$, siis need $2k+1$ meeskonda mängisid kahe päevaga omaette $2k+1$ mängu. Dirichlet printsiibi põhjal mängiti ühel päeval vähemalt $k+1$ mängu. Selleks on aga vaja $2k+2$ meeskonda. Vastuolu.

Sobivad 10 meeskonda saame, kui igast tsüklist valime üle ühe täpselt pooled meeskonnad.

11. Kuna

$$(n^2+n)^2 = n^4+2n^3+n^2 < n^4+2n^3+2n^2+2n+1 < n^4+2n^3+3n^2+2n+1 = (n^2+n+1)^2,$$

siis antud arv on rangelt kahe täisarvu ruudu vahel. Seega ta ise ei ole kunagi täisarvu ruut.

12. Väide järeldub võrdusest

$$a = \frac{3a}{3} = \frac{x^2+2y^2}{3} = \left(\frac{x \pm 2y}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{x \mp y}{3}\right)^2.$$

13. a) Kui n on algarv, siis $n(n+2013)$ peab jaguma arvuga n^2 ja $n+2013$ peab jaguma arvuga n. Seega 2013 jagub arvuga n, mistõttu $n \in \{3, 11, 61\}$. Ükski neist ei sobi selleks, et $n(n+2013)$ oleks täisarvu ruut.

b) Vastused: $196, 671, 976, 1875, 4575, 7396, 9251, 15616, 29700, 91091, 111556, 336675, 1012036$.
Näiteks: Proovime n kujul m^2. Siis m^2+2013 on täisarvu ruut. Kuna kahe järjestikuse ruudu m^2 ja $(m+1)^2$ vahe on $2m+1$, proovime $2m+1 = 2013$. Siis $m = 1006$ ja $n = 1006^2$ sobib.

14. Kuna $q-1 \mid q^5-1$, siis $q-1 = 2^m p^k$, kus $m \leqslant n$ ja $k \in \{0,1,2\}$. Seejuures

$$2^{n-m}p^{2-k} = \frac{q^5-1}{q-1} = q^4+q^3+q^2+q+1$$

on paaritu arv, mistõttu $m = n$. Siis

$$2^n p^2 + 1 = q^5 = (2^n p^k + 1)^5 > 2^{5n} p^{5k} + 1$$

ja $p^{2-5k} > 2^{4n} > 1$, mistõttu $2-5k > 0$ ehk $k = 0$.
Seega võrrand on taandatud kujule $2^n p^2 + 1 = (2^n+1)^5$ ehk

$$p^2 = 2^{4n} + 5\cdot 2^{3n} + 10\cdot 2^{2n} + 10\cdot 2^n + 5.$$

Kui $n \geqslant 2$, siis $p^2 \equiv 5 \pmod 8$, mis on võimatu.

Seega $n = 1$, $q = 2+1 = 3$ ja $p = \sqrt{\dfrac{3^5-1}{2}} = 11$.

15. Väide kehtib üldiselt, kui $x^n = x^{\frac{n+p}{2}} + N = x^p + P$, kus N ja P on täisarvud, $n < p$ ja $\text{SÜT}(n,p) = 1$. Kui $x^n \neq x^p$, siis $2N - P = (x^{\frac{n}{2}} - x^{\frac{p}{2}})^2 \neq 0$ ja

$$x^n = (x^{\frac{n}{2}})^2 = \left(\frac{x^n - x^{\frac{n-p}{2}}}{x^{\frac{n}{2}} - x^{\frac{p}{2}}}\right)^2 = \frac{N^2}{2N-P},$$

mistõttu x^n on ratsionaalarv ja seega ka x^p on ratsionaalarv. Kuna $\text{SÜT}(n,p) = 1$, siis leiduvad täisarvud u ja v nii, et $un + vp = 1$. Seega x on ratsionaalarv. Kui $x = \dfrac{A}{B}$ on taandumatu murd, siis $A^n = A^{\frac{n+p}{2}} B^{\frac{n-p}{2}} + NB^n$. Seega $B = 1$, kuna $n - p < 0$.

16. Arvutame:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(n+\frac{1}{n}\right) = n!\left(1+\frac{1}{1\cdot n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2\cdot n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n\cdot n}\right)$$

$$< n!\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2n-1}\right) = n!\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1} = 2\cdot n!.$$

17. *Lahendus 1.* Oletame, et väide ei kehti.

Olgu need arvud $t_1, \ldots, t_n$. Siis

$$\prod_{i=1}^{n}(t_i+1) = \prod_{i=1}^{n} t_i \cdot \prod_{i=1}^{n}(t_i+1) = \prod_{i=1}^{n} t_i(t_i+1) < 2^n.$$

Teiselt poolt aga, kuna $t+1 \geqslant 2\sqrt{t}$ iga positiivse t korral, saame, et

$$\prod_{i=1}^{n}(t_i+1) \geqslant 2^n \sqrt{\prod_{i=1}^{n} t_i} = 2^n.$$

Lahendus 2. Olgu need arvud $t_1, \ldots, t_n$ ning olgu $t_{n+1} = t_1$. Siis

$$\sum_{i=1}^{n} t_i(t_{i+1}+1) = \sum_{i=1}^{n} t_i t_{i+1} + \sum_{i=1}^{n} t_i \geqslant 2n,$$

kus viimane võrratus järeldub aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest. Dirichlet' printsiibi tõttu peab vähemalt üks neist olema vähemalt 2.

Märkus. Kirjutised $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ ja $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i$ tähistavad vastavalt arvude $a_1, \ldots, a_n$ summat ja korrutist.

18. Paneme tähele, et $f(x)$ ei ole alati 0. Võttes $f(x) \neq 0$ ja $y = 0$, näeme, et $f(0) = -1$. Võttes $x = 1$ ja $y = -1$ saame $f(1)f(-1) - 1 = -1$, mistõttu $f(1)f(-1) = 0$. Kui $f(1) = 0$, siis valides $y = 1$ ja $x = z - 1$, saame $f(z) = z - 1$ iga reaalarvu z korral. Kui $f(-1) = 0$, siis valides $y = -1$ ja $x = z + 1$, saame $f(z) = -z - 1$ iga reaalarvu z korral. Lihtne kontroll näitab, et mõlemad funktsioonid rahuldavad ülesande tingimust.

19. Olgu vastav konstant $2k$. Võttes $x = -1$ ja $x = 1$ saame, et $P(0) = P(-1) = k$. Seega $P(x) = x(x+1)Q(x)+k$, kus $Q(x)$ on mingi polünoom. Siis $P(x-1) = (x-1)xQ(x-1) + k$. Sellisel juhul ülesandes olev avaldis esitub kujul

$$(x+1)(x-1)(x)Q(x-1) + k(x+1) - (x-1)(x)(x+1)Q(x) - k(x-1)$$

$$= x(x-1)(x+1)(Q(x-1) - Q(x)) + 2k.$$

Kuna see on konstantne, siis $Q(x-1) = Q(x)$ iga arvu x korral, mistõttu $Q(x) = c$ on konstantne polünoom. Seega otsitav polünoom peab olema kujul $P(x) = cx(x+1) + k$, kus c ja k on konstantsed arvud. Lihtne kontroll näitab, et kõik sellised polünoomid rahuldavad ülesande tingimust.

20. a) Kuna kehtib võrratus $(x+y)^2 \geqslant 4xy$, siis

$$\frac{u}{x} + \frac{v}{y} = \frac{uy+vx}{xy} \geqslant \frac{4(uy+vx)}{(x+y)^2}.$$

b) Kasutades osa *a)* tulemust, saame

$$\frac{a}{b+2c+d} + \frac{c}{d+2a+b} \geqq \frac{4\{a(d+2a+b)+c(b+2c+d)\}}{\{(b+2c+d)+(d+2a+b)\}^2} = \frac{(a+c)(b+d)+2(a^2+c^2)}{(a+b+c+d)^2}$$
$$\geqslant \frac{(a+c)(b+d)+(a+c)^2}{(a+b+c+d)^2} = \frac{a+c}{a+b+c+d}.$$

Tehes analoogiliselt teise osa jaoks saame

$$\frac{a}{b+2c+d} + \frac{b}{c+2d+a} + \frac{c}{d+2a+b} + \frac{d}{a+2b+c} \geqslant \frac{a+c}{a+b+c+d} + \frac{b+d}{a+b+c+d} = 1.$$