Treeningvõistlus "Balti tee 2012" võistkonnale

Tallinnas, 4. novembril 2012

1. Kas leidub 2000 (mitte tingimata erinevat) reaalarvu, mis ei ole kõik nullid, nii, et kui moodustada 1000. astme polünoom pealiikme kordajaga 1, mille juurteks on suvalised 1000 arvu neist 2000st, siis selle polünoomi kordajateks (välja arvatud x^{1000} kordaja) on alati ülejäänud 1000 valitud arvu?

2. Leia kõik funktsioonid $f\colon R \to R$ nii, et
$$f(x + yf(x)) = f(xf(y)) - x + f(y + f(x))$$
iga $x, y \in R$ jaoks.

3. Leia suurim selline reaalarv k, et võrratus
$$\frac{2(a^2 + kab + b^2)}{(k+2)(a+b)} \geqslant \sqrt{ab}$$
kehtiks kõigi positiivsete reaalarvude a ja b korral.

4. Lahenda võrrand
$$\frac{1}{\sqrt{x-2012}+\sqrt{x-2010}} + \frac{1}{\sqrt{x-2010}+\sqrt{x-2008}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{x+2010}+\sqrt{x+2012}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

5. Leia järgmise võrrandisüsteemi kõik reaalarvulised lahendid.
$$\begin{aligned} x^4 + y^2 + 4 &= 5yz \\ y^4 + z^2 + 4 &= 5zx \\ z^4 + x^2 + 4 &= 5xy \end{aligned}$$

6. Nelinurgas $ABCD$ on tippude C ja D juures olevad sisenurgad suuremad kui 90°. Tippu A läbiv ja küljega BC paralleelne sirge lõikab sirget BD punktis E ning tippu B läbiv ja küljega AD paralleelne sirge lõikab sirget AC punktis F. Tõesta, et sirge EF on paralleelne nelinurga küljega CD.

7. Olgu antud ringjoon c. Väljaspool seda ringjoont vabalt valitud punktist P tõmmatakse läbi sirge, mis lõikab ringjoont c kahes erinevas punktis X ja Y. Olgu c_1 ja c_2 ringjooned, mis läbivad punkti P ning puutuvad ringjoont c vastavalt punktides X ja Y. Tõesta, et ringjoonte c_1 ja c_2 raadiuste vahe ei sõltu punktide P, X ja Y asukohast.

8. Teravnurkse kolmnurga ABC tippudest A, B ja C tõmmatud kõrguste aluspunktid on vastavalt D, E ja F. Tõesta, et $|DE| + |DF| \leqslant |BC|$. Millisel juhul kehtib siin võrdus?

9. Kõõlnelinurga $ABCD$ diagonaalid AC ja BD lõikuvad punktis E. Olgu P, Q, R ja S vastavalt selle nelinurga külgede AB, BC, CD ja DA keskpunktid. Tõesta, et kolmnurkade EPS ja EQR ümberringjooned on võrdse raadiusega.

10. Mitte-võrdkülgse kolmnurga üks sisenurkadest on 60°. Tõesta, et selle nurga poolitaja on risti kolmnurga kõrguste lõikepunkti ja ümberringjoone keskpunkti läbiva sirgega.

11. Tõesta, et mistahes viie täisarvu seas leiduvad kaks sellist, mille summa või vahe jagub 7-ga.

12. Leia kõik sellised täisarvud n, mille korral $n^2 + 20n + 11$ on mingi täisarvu ruut.

13. Tõesta, et mistahes naturaalarvu $k \geqslant 2$ korral arv $k^{k-1} - 1$ jagub arvuga $(k-1)^2$.

14. Olgu a, b, c, d, e, f ja m sellised täisarvud, et
$$a^n + b^n + c^n - d^n - e^n - f^n$$
jagub arvuga m iga $n = 1, 2, \ldots, 6$ korral. Tõesta, et siis $a^n + b^n + c^n - d^n - e^n - f^n$ jagub arvuga m iga positiivse täisarvulise astendaja n korral.

15. Iga positiivse täisarvu d korral tähistagu $f(d)$ vähimat sellist positiivset täisarvu, millel on täpselt d positiivset tegurit (arvestades ka 1 ja arvu $f(d)$ ennast).

Tõesta, et mistahes naturaalarvu k korral arv $f(2^{k+1})$ jagub arvuga $f(2^k)$.

16. Klassis on 20 õpilast. Iga päev kutsutakse mõni neist tahvli juurde. Milline on väikseim päevade arv, mille järel on võimalik, et klassi iga kahe õpilase jaoks leidub päev, mil üks neist kutsuti tahvli juurde, aga teine mitte?

17. Leia suurim võimalik arv malekuningaid, mida saab panna 12×12 malelauale nii, et iga kuningas hoiaks tules täpselt üht teist kuningat.

18. Klassis on $2n+1$ õpilast. Igaüks neist valib mittetühja hulga järjestikustest täisarvudest. Iga õpilase valitud hulgal on mittetühi ühisosa vähemalt n hulgaga teiste õpilaste valituist. Tõesta, et leidub õpilane, kelle valitud hulgal on mittetühi ühisosa kõigi teiste õpilaste valitud hulkadega.

19. Peol on teatud hulk inimesi. Iga kahe inimese jaoks, kes ei ole omavahel tuttavad, leidub peol täpselt kaks ühist tuttavat. A ja B tunnevad üksteist, kuid neil pole ühtegi ühist tuttavat. Tõesta, et A-l ja B-l on peol võrdne arv tuttavaid. Näita, et peol võib olla täpselt kuus inimest.

20. Laagrist võtab osa 90 last, kellest igaühel on ülejäänute hulgas vähemalt 30 sõpra. Tõesta, et lapsed saab jagada kolme võrdsesse rühma nii, et igal lapsel on temaga samas rühmas vähemalt üks sõber.

Treeningvõistlus “Balti tee 2012” võistkonnale

Tallinnas, 4. novembril 2012

Vastused ja lahendused

1. *Vastus:* Selliseid arve ei leidu.

   Oletame, et sellised arvud on olemas. Eeldame kõigepealt, et ükski neist arvudest ei ole 0. Märkame, et nende 2000 arvu seas on vähemalt 1000 positiivset või vähemalt 1000 negatiivset arvu. Kui on vähemalt 1000 negatiivset arvu, siis, pannes need 1000. astme polünoomi juurteks, saame polünoomi, mille kõik kordajad on positiivsed. Seega leidub nende arvude hulgas vähemalt 1000 positiivset arvu.

   Nüüd võtame 1000 positiivset arvu ja paneme ülejäänud polünoomi juurteks. Et kõik kordajad on positiivsed, peavad juured olema negatiivsed. Seega on täpselt 1000 positiivset ja 1000 negatiivset arvu. Kui me paneme need 1000 positiivset arvu polünoomi juurteks, siis on selle polünoomi kordajad vaheldumisi positiivsed ja negatiivsed. See on vastuolus eeldusega, et ülejäänud 1000 arvu on kõik negatiivsed. Seega peab vähemalt üks otsitavatest arvudest olema 0.

   Olgu meil otsitavate arvude hulgas olevate nullide arv k. Kui $k < 1000$, siis paneme kõik nullid ja suvalised $1000 - k$ muud arvu polünoomi juurteks. Juurte korrutis on 0, seega on polünoomi kordajate hulgas veel üks 0, mis on vastuolus meie eeldusega. Kui $k \geqslant 1000$, siis paneme polünoomi juurteks 1000 nulli. Tulemuseks saame polünoomi x^{1000}, seega on ka kõik ülejäänud arvud nullid.

2. *Vastus:* ainus selline funktsioon on $f(x) = 1 - x$.

   Võttes $x = y = 0$, saame, et $f(f(0)) = 0$. Võttes $x = y = 1$, saame $f(f(1)) = 1$. Võttes $x = 1$, $y = 0$, leiame, et $f(1) = f(f(0) - 1 + f(f(1))$, seega $f(1) = 0$ ja niisiis $f(0) = 1$.

   Võttes $x = 1$, saame esialgsest tingimusest $f(1) = f(f(y)) - 1 + f(y)$ iga reaalarvu y jaoks, ja seega $f(y) = 1 - f(f(y))$. Lõpuks, võttes $y = 0$, saame $f(x) = f(x) - x + f(f(x))$ iga reaalarvu x jaoks, mis annab meile $f(f(x)) = x$, järelikult $f(x) = 1 - x$. Kontroll näitab, et see funktsioon rahuldab tõepoolest ülesande tingimust.

3. *Vastus:* suurim selline arv on $k = 6$.

   Esialgsest võrratusest saame

   $$2(a^2 + kab + b^2) \geqslant (k + 2)(a + b)\sqrt{ab},$$

   jagades võrratuse mõlemaid pooli arvuga b^2, saame

   $$2\left(\frac{a^2}{b^2} + k\frac{a}{b} + 1\right) \geqslant (k + 2)\left(\frac{a}{b} + 1\right)\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

   Tähistame $\sqrt{a/b} = x$. Arvu x väärtuseks võib olla suvaline positiivne arv. Seega on ülesanne samaväärne ülesandega leida suurim k nii, et võrratus

   $$2(x^4 + kx^2 + 1) \geqslant (k + 2)(x^2 + 1)x$$

   kehtiks iga positiivse reaalarvu x jaoks. Teisendades saame

   $$\begin{aligned} k((x^2 + 1)x - 2x^2) &\leqslant 2(x^4 + 1 - (x^2 + 1)x), \\ k(x^3 - 2x^2 + x) &\leqslant 2(x^4 - x^3 - x + 1), \\ kx(x^2 - 2x + 1) &\leqslant 2(x^3(x - 1) - (x - 1)), \\ kx(x - 1)^2 &\leqslant 2(x - 1)^2(x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

   Kui $x = 1$, siis võrratus kehtib. Kui $x \neq 1$, siis jagades võrratuse pooled läbi positiivse arvuga $x(x - 1)^2$ saame

   $$k \leqslant \frac{2(x^2 + x + 1}{x} = 2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

   Et $x \neq 1$ puhul on avaldise $x + 1/x$ väärtused suuremad arvust 2 ja kuitahes lähedal sellele, siis on k suurimaks võimalikuks väärtuseks 6.

4. *Vastus:* võrrandi lahendiks on $x = 2024072,5$.

Teisendame võrrandit, korrutades iga murdu läbi sobiva arvuga:
$$\frac{\sqrt{x-2012}-\sqrt{x-2010}}{-2}+\frac{\sqrt{x-2010}-\sqrt{x-2008}}{-2}+\cdots+$$
$$+\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x}}{-2}+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{-2}+\cdots+\frac{\sqrt{x+2010}-\sqrt{x+2012}}{-2}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$
Korrutades mõlemat poolt kahega ja koondades sarnased liikmed, saame
$$\begin{aligned}\sqrt{x+2012}-\sqrt{x-2012} &= \sqrt{2}\\ \sqrt{x+2012} &= \sqrt{x-2012}+\sqrt{2}\\ x+2012 &= x-2012+2\sqrt{2(x-2012)}+2\\ 4022 &= 2\sqrt{2(x-2012)}\\ 2011^2 &= 2(x-2012)\\ x &= \frac{2011^2}{2}+2012=2024072,5.\end{aligned}$$

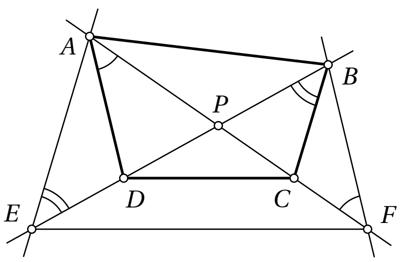
5. *Vastus:* võrrandisüsteemi lahendiks on kolmikud $(\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2})$ ja $(-\sqrt{2};-\sqrt{2};-\sqrt{2})$.

Hindame esimese võrrandi vasakut poolt. Et $0 \leqslant (x^2-2)^2$, siis iga reaalarvu korral kehtib $4x^2 \leqslant x^4+4$, kusjuures võrdus kehtib parajasti siis, kui $x=\pm\sqrt{2}$. Seega $4x^2+y^2 \leqslant x^4+y^2+4=5yz$. Analoogselt saame $4y^2+z^2 \leqslant 5zx$ ja $4z^2+x^2 \leqslant 5xy$. Liites võrratuste vastavad pooled, saame $x^2+y^2+z^2 \leqslant xy+yz+zy$, mis on samaväärne võrratusega $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \leqslant 0$. Seega $x=y=z=\sqrt{2}$ või $x=y=z=-\sqrt{2}$.

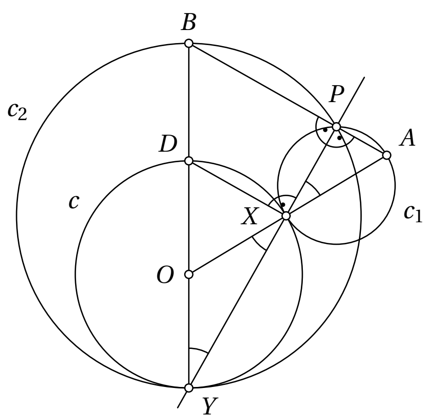
6. Olgu P diagonaalide AC ja BD lõikepunkt (vt joonist 1). Sirgete AE ja BC paralleelsusest saame, et $\angle AEP = \angle CBP$, mistõttu kolmnurgad AEP ja CBP on sarnased. Analoogiliselt saame sirgete BF ja AD paralleelsusest, et $\angle BFP = \angle DAP$ ning kolmnurgad BFP ja DAP on sarnased. Neist sarnastest kolmnurkadest leiame vastavalt, et $\frac{|PE|}{|PB|}=\frac{|PA|}{|PC|}$ ja $\frac{|PD|}{|PB|}=\frac{|PA|}{|PF|}$, kust $\frac{|PD|}{|PE|}=\frac{|PC|}{|PF|}$. Et lisaks $\angle DPC = \angle EPF$, siis on kolmnurgad PDC ja PEF sarnased ning sirged CD ja EF on seega paralleelsed.

7. Olgu ringjoonte c, c_1 ja c_2 raadiused vastavalt R, R_1 ja R_2. Näitame, et $|R_2-R_1|=R$ olenemata punktide P, X ja Y asukohast.

Lahendus 1. Üldisust kitsendamata eeldame, et $|PX|<|PY|$. Siis ringjoon c puutub ringjoont c_1 väliselt punktis X ja ringjoont c_2 sisemiselt punktis Y (vt joonist 2). Homoteetia keskpunktiga X ja teguriga $-\frac{R_1}{R}$ viib seega ringjoone c ringjooneks c_1 ning homoteetia keskpunktiga Y ja teguriga $\frac{R_2}{R}$ viib ringjoone c ringjooneks c_2. Esimene neist homoteetiatest viib lõigu XY lõiguks XP ning teine viib lõigu XY lõiguks PY. Seega $\frac{|PX|}{|XY|}=\frac{R_1}{R}$ ja $\frac{|PY|}{|XY|}=\frac{R_2}{R}$, kust $\frac{R_2-R_1}{R}=\frac{|PY|-|PX|}{|XY|}=1$.



Joonis 1



Joonis 2

Lahendus 2. Üldisust kitsendamata eeldame jällegi, et $|PX|<|PY|$. Olgu O ringjoone c keskpunkt. Lõigaku kiir OX ringjoont c_1 teistkordselt punktis A ning lõigaku kiir YO ringjoont c_2 teistkordselt punktis B

ja ringjoont c punktis D (vt joonist 2). Ringjoonte puutumise tõttu on XA ja YB vastavalt ringjoonte c_1 ja c_2 diameetrid, mistõttu $\angle APX = \angle BPY = \angle DXY = 90^\circ$. Olgu $\angle BYX = \angle OYX = \alpha$, siis ka $\angle OXY = \angle PXA = \alpha$. Täisnurksetest kolmnurkadest APX, BPY ja DXY saame vastavalt, et $2R_1 = \dfrac{|PX|}{\cos\alpha}$, $2R_2 = \dfrac{|PY|}{\cos\alpha}$ ning $2R = \dfrac{|XY|}{\cos\alpha}$. Seega $2(R_2 - R_1) = \dfrac{|PY| - |PX|}{\cos\alpha} = \dfrac{|XY|}{\cos\alpha} = 2R$, ehk $R_2 - R_1 = R$.

8. *Vastus:* võrdus kehtib parajasti siis, kui kolmnurk ABC on võrdhaarne alusega BC.

Lahendus 1. Et $\angle AEB = \angle ADB = 90^\circ$, siis $AEDB$ on kõõlnelinurk ning

$$\angle CDE = 180^\circ - \angle BDE = \angle BAE = \angle BAC = \angle A\,.$$

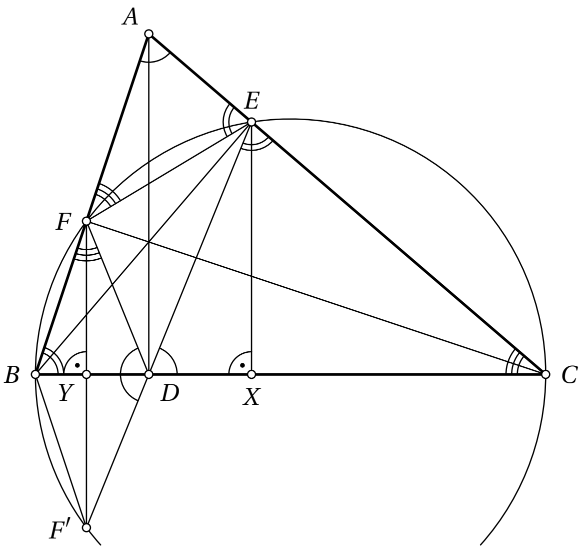
Analoogiliselt saame, et $\angle BDF = \angle A$.

Olgu F' punkti F peegeldus sirgest BC (vt joonist 3), siis $\angle BDF' = \angle BDF = \angle A = \angle CDE$, st punktid F', D ja E on ühel sirgel ning $|DE| + |DF| = |DE| + |DF'| = |EF'|$. Et aga $\angle BF'C = \angle BEC = 90^\circ$, siis $F'BEC$ on kõõlnelinurk ümberringjoone diameetriga BC ning seega $|EF'| \leqslant |BC|$.

Võrdus kehtib juhul, kui EF' on nelinurga $F'BEC$ ümberringjoone diameeter, st $\angle F'CE = 90^\circ$. Kuid

$$\angle F'CE = \angle F'CB + \angle ECB = \angle FCB + \angle ECB = (90^\circ - \angle B) + \angle C\,.$$

Seega kehtib võrdus parajasti siis, kui $\angle B = \angle C$, st kolmnurk ABC on võrdhaarne alusega BC.



Joonis 3

Lahendus 2. Samuti nagu eelmises lahenduses näitame esmalt, et $\angle CDE = \angle BDF = \angle A$.

Tähistame $|BC| = a$, $|CA| = b$ ja $|AB| = c$. Täisnurksest kolmnurgast BEC saame, et $|CE| = a \cdot \cos\angle C$. Siinusteoreem kolmnurgas CED annab nüüd, et

$$|DE| = \frac{|CE| \cdot \sin\angle C}{\sin\angle CDE} = \frac{a \cdot \cos\angle C \cdot \sin\angle C}{\sin\angle A}\,.$$

Siinusteoreemist kolmnurgas ABC saame, et $\dfrac{a}{\sin\angle A} = \dfrac{c}{\sin\angle C}$, seega $|DE| = c \cdot \cos\angle C$. Analoogiliselt leiame, et $|DF| = b \cdot \cos\angle B$.

Niisiis $|DE| + |DF| = c \cdot \cos\angle C + b \cdot \cos\angle B$, samal ajal kui $|BC| = |BD| + |DC| = c \cdot \cos\angle B + b \cdot \cos\angle C$. Seega

$$|DE| + |DF| - |BC| = c \cdot \cos\angle C + b \cdot \cos\angle B - c \cdot \cos\angle B - b \cdot \cos\angle C = (c - b)(\cos\angle C - \cos\angle B)\,.$$

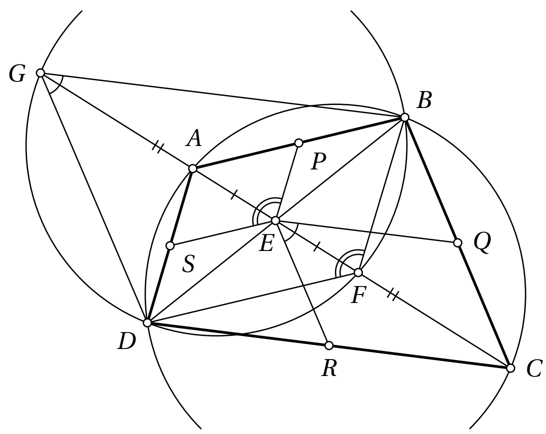
Kui $c > b$, siis $\angle C > \angle B$, st $\cos\angle C < \cos\angle B$. Kui $c < b$, siis $\angle C < \angle B$ ja $\cos\angle C > \cos\angle B$. Kui $c = b$, siis $\angle C = \angle B$ ja $\cos\angle C = \cos\angle B$. Niisiis alati $|DE| + |DF| - |BC| \leqslant 0$ ehk $|DE| + |DF| \leqslant |BC|$, kusjuures võrdus kehtib parajasti siis, kui $b = c$, st kolmnurk ABC on võrdhaarne alusega BC.

Lahendus 3. Olgu X ja Y vastavalt punktide E ja F ristprojektsioonid sirgele BC (vt joonist 3) ning tähistame $|BC| = a$. Samuti nagu eelmistes lahendustes näitame, et $\angle XDE = \angle YDF = \angle A$. Seega $|DE| = \dfrac{|DX|}{\cos\angle A}$ ja $|DF| = \dfrac{|DY|}{\cos\angle A}$, kust $|DE| + |DF| = \dfrac{|DX| + |DY|}{\cos\angle A} = \dfrac{|XY|}{\cos\angle A}$. Niisiis piisab näidata, et $|XY| \leqslant a \cdot \cos\angle A$.

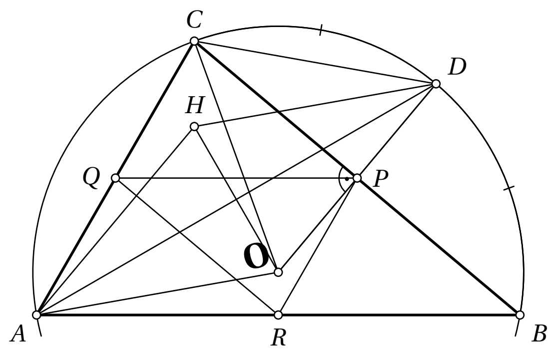
Punktide X ja Y konstruktsioonist tuleneb, et $|XY| \leqslant |EF|$. Sarnaselt lõigu DE pikkuse leidmisele eelmises lahenduses veendume, et $|EF| = a \cdot \cos\angle A$. Seega tõepoolest $|XY| \leqslant a \cdot \cos\angle A$, kusjuures võrdus kehtib parajasti siis, kui EF on paralleelne kolmnurga küljega BC. See tingimus on samaväärne võrdusega $\angle AFE = \angle ABC$. Kõõlnelinurgast $BFEC$ saame, et $\angle AFE = 180^\circ - \angle BFE = \angle BCE = \angle ACB$. Niisiis kehtib võrdus parajasti siis, kui $\angle ABC = \angle ACB$, st kolmnurk ABC on võrdhaarne alusega BC.

9. Valime sirgel AC punktid F ja G nii, et E on lõikude AF ja CG ühine keskpunkt (vt joonist 4). Siis homoteetia keskpunktiga A ja teguriga 2 viib kolmnurga PES kolmnurgaks BFD ning homoteetia keskpunktiga C ja teguriga 2 viib kolmnurga QER kolmnurgaks BGD. Niisiis piisab näidata, et kolmnurkade BFD ja BGD ümberringjooned on võrdse raadiusega.

Selleks näitame, et $BFDG$ on kõõlnelinurk, st kolmnurkade BFD ja BGD ümberringjooned langevad kokku. Tõepoolest, $|CE|\cdot|EA| = |BE|\cdot|ED|$, kuna $ABCD$ on kõõlnelinurk. Kuid $|CE|\cdot|EA| = |GE|\cdot|EF|$ punktide F ja G valiku tõttu ning seega $|GE| \cdot |EF| = |BE| \cdot |ED|$, st $BFDG$ on tõepoolest kõõlnelinurk.



Joonis 4



Joonis 5

10. Üldisust kitsendamata eeldame, et $\angle BAC = 60^\circ$ ja $|AB| > |AC|$ (et kolmnurk ei ole võrdkülgne, peavad tema 60° nurga lähisküljed olema erineva pikkusega). Olgu kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt O ja kõrguste lõikepunkt H ning lõigaku nurga BAC poolitaja kolmnurga ümberringjoont teistkordselt punktis D (vt joonist 5).

Et $|OC| = |OD|$ ja $\angle COD = 2\angle CAD = 60^\circ$, siis kolmnurk COD on võrdkülgne. Kuna punkt D poolitab kolmnurga ABC ümberringjoone kaare BC, siis asub ta külje BC keskristsirgel. Külje BC keskpunkt P asub seega lõigul OD ning CP on võrdkülgse kolmnurga OCD kõrgus ja ühtlasi ka mediaan. Seega $|OP| = |DP|$.

Vaatleme kolmnurka PQR, mille tippudeks on kolmnurga ABC külgede keskpunktid ja külgedeks kolmnurga ABC kesklõigud. Kolmnurk PQR on sarnane kolmnurgaga ABC sarnasusteguriga $\frac{1}{2}$ ning tema kõrgused paiknevad kolmnurga ABC külgede keskristsirgetel, seega O on kolmnurga PQR kõrguste lõikepunkt. Niisiis $|AH| = 2|PO| = |DO|$. Et nelinurga $AHDO$ vastasküljed AH ja DO on mõlemad risti lõiguga BC, siis on nad paralleelsed ning $AHDO$ on rööpkülik. Et lisaks $|AO| = |DO|$, siis $AHDO$ on romb ja tema diagonaalid AD ja OH on risti, mott.

11. Kui vaadeldava viie arvu hulgas leidub kaks sellist, mis annavad 7-ga jagamisel sama jäägi, siis nende kahe arvu vahe jagub 7-ga. Vaatleme nüüd juhtu, kus kõik viis arvu annavad 7-ga jagamisel erinevad jäägid. Jaotame võimalikud jäägid nelja alamhulka: $\{1, 6\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 4\}$ ja $\{0\}$. Vastavalt Dirichlet' printsiibile leidub kaks arvu, mille jäägid 7-ga jagamisel kuuluvad samasse alamhulka (ja vastavalt tehtud eeldusele on erinevad). Siis nende kahe arvu summa jagub 7-ga.

12. *Vastus:* 35 ja -55.

Olgu $n^2 + 20n + 11 = a^2$, siis $(n+10)^2 - a^2 = 100 - 11 = 89$, seega otsitavad lahendid vastavad üksteisest 89 võrra erinevate täisruutude paaridele.

Paneme tähele, et mistahes positiivse täisarvu n korral

$$n^2 = 1 + 3 + \ldots + (2n-1)\ ,$$

st n^2 on n esimese paaritu naturaalarvu summa (tõestuseks rakendame aritmeetilise jada osasumma valemit). Niisiis on mistahes kahe täisruudu positiivne vahe esitatav mingite järjestikuste paaritute naturaalarvude summana ning meil piisab seega leida arvu 89 kõik esitused niisuguse summana.

Et 89 on paaritu arv ja kõik liidetavad on paaritud, siis peab ka liidetavaid olema paaritu arv — see aga tähendab, et „keskmine“ neist liidetavatest on arvu 89 jagaja. Kuna aga 89 on algarv, siis on ainus võimalus, et summas ongi üksainus liidetav: arv 89 ise. Siit leiame, et $a^2 = 44^2$ ja $(n+10)^2 = 45^2$, ehk $n + 10 = \pm 45$, kust $n = 35$ või $n = -55$.

13. Et $k^{k-1} - 1 = (k-1)(1+k+k^2+\ldots+k^{k-2})$, siis piisab näidata, et $k-1$ liidetavaga summa $1+k+k^2+\ldots+k^{k-2}$ jagub arvuga $k-1$. Selleks kirjutame selle summa kujul

$$(1-1) + (k-1) + (k^2-1) + \ldots + (k^{k-2}-1) + (k-1)\cdot 1\ .$$

Näeme, et siin iga liidetav jagub arvuga $k-1$ ning seega jagub arvuga $k-1$ ka kogu summa.

14. Vaatleme polünoomi

$$P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)(x-f) = x^6 + p_5x^5 + p_4x^4 + p_3x^3 + p_2x^2 + p_1x + p_0\ ,$$

kus p_0, p_1, …, p_5 on mingid täisarvud. Paneme tähele, et a, b, c, d, e ja f on polünoomi P nullkohad, st $a^6 + p_5a^5 + p_4a^4 + p_3a^3 + p_2a^2 + p_1a + p_0 = 0$ ning

$$a^{6+r} + p_5a^{5+r} + p_4a^{4+r} + p_3a^{3+r} + p_2a^{2+r} + p_1a^{1+r} + p_0a^r = 0$$

mistahes positiivse täisarvu r korral, ehk

$$a^{6+r} = -(p_5a^{5+r} + p_4a^{4+r} + p_3a^{3+r} + p_2a^{2+r} + p_1a^{1+r} + p_0a^r)\ .$$

Analoogilised võrdused kehtivad ka b, c, d, e ja f jaoks. Niisiis

$$\begin{aligned}
a^{6+r} + b^{6+r} + c^{6+r} - d^{6+r} - e^{6+r} - f^{6+r} = {} & -(p_5a^{5+r} + p_4a^{4+r} + p_3a^{3+r} + p_2a^{2+r} + p_1a^{1+r} + p_0a^r) - \\
& -(p_5b^{5+r} + p_4b^{4+r} + p_3b^{3+r} + p_2b^{2+r} + p_1b^{1+r} + p_0b^r) - \\
& -(p_5c^{5+r} + p_4c^{4+r} + p_3c^{3+r} + p_2c^{2+r} + p_1c^{1+r} + p_0c^r) + \\
& +(p_5d^{5+r} + p_4d^{4+r} + p_3d^{3+r} + p_2d^{2+r} + p_1d^{1+r} + p_0d^r) + \\
& +(p_5e^{5+r} + p_4e^{4+r} + p_3e^{3+r} + p_2e^{2+r} + p_1e^{1+r} + p_0e^r) + \\
& +(p_5f^{5+r} + p_4f^{4+r} + p_3f^{3+r} + p_2f^{2+r} + p_1f^{1+r} + p_0f^r) = \\
= {} & -p_5(a^{5+r} + b^{5+r} + c^{5+r} - d^{5+r} - e^{5+r} - f^{5+r}) - \\
& -p_4(a^{4+r} + b^{4+r} + c^{4+r} - d^{4+r} - e^{4+r} - f^{4+r}) - \\
& -p_3(a^{3+r} + b^{3+r} + c^{3+r} - d^{3+r} - e^{3+r} - f^{3+r}) - \\
& -p_2(a^{2+r} + b^{2+r} + c^{2+r} - d^{2+r} - e^{2+r} - f^{2+r}) - \\
& -p_1(a^{1+r} + b^{1+r} + c^{1+r} - d^{1+r} - e^{1+r} - f^{1+r}) - \\
& -p_0(a^r + b^r + c^r - d^r - e^r - f^r)\ .
\end{aligned}$$

Siit näeme, et kui $a^n + b^n + c^n - d^n - e^n - f^n$ jagub arvuga m iga $n = r, r+1, \ldots, r+5$ korral, siis kehtib see jaguvus ka $n = r + 6$ korral. Lähtudes ülesande tingimusest (kus $r = 1$) saame nüüd induktsiooniga kergesti näidata, et nõutud jaguvus kehtib iga positiivse täisarvulise astendaja n korral.

15. Olgu $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{a_r}$, kus $p_1, p_2, \ldots, p_r$ on paarikaupa erinevad algarvud ning $a_i \geqslant 0$ (edaspidise huvides lubame, et astendajate a_i hulgas võib olla ka nulle). Siis arvu n erinevate positiivsete tegurite arv on $(a_1+1) \cdot (a_2+1) \cdot \ldots \cdot (a_r+1)$.

Olgu nüüd $n = f(2^k)$, siis arvul n on täpselt 2^k positiivset tegurit, mistõttu iga $i = 1, 2, \ldots, r$ korral $a_i + 1 = 2^{b_i}$, ehk $a_i = 2^{b_i} - 1$, kus $b_i \geqslant 0$ on mingid täisarvud ning $b_1 + b_2 + \ldots + b_r = k$.

Olgu p_i ja p_j arvu n mistahes kaks erinevat algtegurit. Asendades arvu n kanoonilises esituses p_i astendaja $2^{b_i} - 1$ astendajaga $2^{b_i+1} - 1$ ja p_j astendaja $2^{b_j} - 1$ astendajaga $2^{b_j-1} - 1$, saame mingi arvu n', millel on samuti täpselt k positiivset tegurit. Arvu $f(2^k)$ minimaalsuse tingimuse tõttu $n < n'$, ehk

$$p_i^{2^{b_i}-1} \cdot p_j^{2^{b_j}-1} < p_i^{2^{b_i+1}-1} \cdot p_j^{2^{b_j-1}-1}$$

ehk samaväärselt

$$p_j^{2^{b_j-1}} < p_i^{2^{b_i}} . \tag{1}$$

Olgu nüüd $f(2^{k+1}) = p_1^{c_1} \cdot p_2^{c_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{c_r}$ (kuna lubame ka astendajaid 0, siis võime eeldada, et algarvud p_i on siin samad mis $n = f(2^k)$ esituses), kus $c_i = 2^{d_i} - 1$ iga $i = 1, 2, \ldots, r$ korral ning $d_i \geqslant 0$ on mingid täisarvud.

Et $d_1 + \ldots + d_r = k + 1 > k = b_1 + \ldots + b_r$, siis peab leiduma selline indeks s, et $d_s \geqslant b_s + 1$. Olgu nüüd $t \neq s$ mistahes teine indeks, siis rakendades võrdust (1) paaridele (p_s, p_t) ja (p_t, p_s) saame:

$$p_t^{2^{d_t}} > p_s^{2^{d_s-1}} \geqslant p_s^{2^{b_s}} > p_t^{2^{b_t-1}} .$$

Niisiis $d_t > b_t - 1$, st $d_t \geqslant b_t$ iga $t = 1, 2, \ldots, r$ korral, mis näitab, et arv $f(2^{k+1})$ jagub arvuga $f(2^k)$.

16. *Vastus:* viis päeva.

Kasutame iga õpilase poolt tahvli juures käidud päevade ülesmärkimiseks kahendesitust, kus n. positsioonil on number 1, kui õpilane käis n. päeval tahvli juures ja 0, kui ei käinud. Ülesande tingimus tähendab siis seda, et kõikide õpilaste kahendarvud peavad olema erinevad. Et ühekohalisi kahendarve on 2, kahekohalisi 4, kolmekohalisi 8 ja neljakohalisi 16, siis Dirichlet' printsiibi põhjal pole 20 õpilase puhul vähem kui viie päevaga sellist olukorda võimalik saavutada. Viie päeva jaoks sobib näide, kus õpilaste tahvli juures käidud päevade jadadele vastavad arvude 1 kuni 20 kahendesitused.

17. *Vastus:* nõutud viisil on võimalik malelauale panna kuni 56 kuningat.

Lisame malelauale 0. rea ja 0. veeru, et saada 13×13 malelaud. Iga lauale, ruudule $(i; j)$ asetatud kuninga jaoks märgistame ruudud $(i; j)$, $(i-1; j)$, $(i; j-1)$ ja $(i-1; j-1)$. On kerge märgata, et iga teineteist ründava kuningapaari jaoks oleme laual märgistanud vähemalt kuus ruutu; lisaks ei saa ükski ruut olla märgistatud rohkem kui ühe kuningapaari jaoks. Seega saab laual olla ülimalt $2 \cdot \lfloor 169/6 \rfloor = 56$ kuningat. Näiteks võime kuningad asetada väljadele A1, A2, A4, A5, A7, A8, A10, B10, A12, B12, C1, C2, C4, C5, C7, C8, D10, E10, D12, E12, E1, E2, E4, E5, E7, E8, G1, G2, G4, G5, G7, G8, G19, H10, G12, H12, I1, I2, I4, I5, I7, I8, J11, J12, K1, L1, K3, L3, K5, L5, K7, L7, K9, L9, L11, L12.

18. Märkame, et iga kahe õpilaste poolt valitud ühisosata hulga A ja B jaoks peab leiduma kolmanda õpilase poolt valitud hulk S, millel on mittetühi ühisosa nii hulgaga A kui ka hulgaga B. Nimelt, kui need n hulka, millega hulgal A on mittetühi ühisosa, ja need n hulka, millega hulgal B on mittetühi ühisosa, oleksid kõik erinevad, peaks kokku olema vähenalt $2n + 2$ hulka, mis pole võimalik, kuna õpilasi on vaid $2n + 1$.

Valime nüüd hulga A nii, et tema maksimaalne element a oleks vähim kõikide hulkade maksimaalsetest elementidest, ning hulga B nii, et tema minimaalne element b oleks suurim kõikide hulkade minimaalsetest elementidest. Olgu neil hulkadel mittetühi ühisosa. Siis $b \leqslant a$. Igal hulgal X ülejäänutest peab olema minimaalne element $x_{min} \leqslant b$ ja maksimaalne element $x_{max} \geqslant a$, seega sisaldavad kõik hulgad endas kõiki arve $b \leqslant x \leqslant a$ ja igal hulgal on kõigi ülejäänud hulkadega mittetühi ühisosa.

Vaatleme lõpuks juhtu, kus hulkadel A ja B ühisosa pole, ehk $b > a$. Siis leidub eelneva põhjal hulk S, mis sisaldab kindlasti elemente a ja b. Ei saa leiduda sellist hulka X, mille elemendid oleksid kõik väiksemad hulga S elementidest, kuna siis hulga X maksimaalne element oleks väiksem arvust a; sarnaselt ei saa leiduda hulka, mille elendendid oleksid kõik suuremad arvust a. Seega on hulgal S mittetühi ühisosa kõigi ülejäänud hulkadega.

19. Olgu M_A inimese A tuttavate hulk ja M_B vastavalt B tuttavate hulk. Näitame, et $|M_A| \geqslant |M_B|$. Ükski inimene hulgast M_A ei tunne B-d (muidu oleks A-l ja B-l ühine tuttav), seega on igal inimesel $X \in M_A$ täpselt kaks ühist tuttavat B-ga, kellest üks on A ja teine peab kuuluma hulka M_B, olgu see X_B. Iga kahe erineva A tuttava X ja Y jaoks peab olema $X_B \neq Y_B$, vastasel juhul oleksid X, Y ja B inimeste X_B ja A (kes üksteist ei tunne) kolm ühist tuttavat. Seega $|M_A| \geqslant |M_B|$, ja analoogse arutluse järeldusena $|M_B| \geqslant |M_A|$, seega $|M_A| = |M_B|$.

Kuue inimese A, B, C, D, E ja F puhul on tingimused täidetud, kui tuttavad on omavahel järgmised paarid: $A-B$, $A-C$, $A-D$, $B-E$, $B-F$, $C-D$, $C-F$, $D-E$, $E-F$.

20. Lapsi saab 30 kaupa kolme rühma jagada $V = C_{90}^{30} \cdot C_{60}^{30} \cdot \frac{1}{3!}$ viisil.

Nimetame laste jaotust *halvaks lapse A tõttu*, kui selle jaotuse puhul ei ole lapsel A oma rühmas ühtki sõpra. Näitame, et halbade jaotuste koguarv on väiksem kui kõigi jaotusviiside arv V.

Tähistame lapse A tõttu halbade jaotuste arvu Z_A. Kui A-l on laste hulgas kokku n sõpra, siis leidub C_{89-n}^{29} sellist 30-lapselist rühma, mis sisaldavad endas A ja veel 29 last, kes pole A sõbrad. Iga sellise rühma jaoks saab ülejäänud lapsed jagada kahte võrdsesse rühma $C_{60}^{30} \cdot \frac{1}{2}$ viisil. Võttes arvesse, et $n \geqslant 30$ ehk $89 - n \leqslant 59$, võime hinnata lapse A tõttu halbade jaotuste arvu järgmiselt:

$$Z_A = C_{89-n}^{29} \cdot C_{60}^{30} \cdot \frac{1}{2} \leqslant C_{59}^{29} \cdot C_{60}^{30} \cdot \frac{1}{2}.$$

Kõige halbade jaotuste arv ei ole kindlasti suurem kui iga lapse jaoks eraldi arvutatud halbade jaotuste summa. Kuna lapsi on 90, saame $Z \leqslant 90 \cdot C_{59}^{29} \cdot C_{6}^{30}0 \cdot \frac{1}{2}$. Seega piisab $Z < V$ jaoks näitamisest, et

$$90 \cdot C_{59}^{29} \cdot C_{60}^{30} \cdot \frac{1}{2} < C_{90}^{30} \cdot C_{60}^{30} \cdot \frac{1}{3!}.$$

Samaväärsete teisenduste abil saame, et

$$\begin{aligned} 45 \cdot C_{59}^{29} &< C_{90}^{30} \frac{1}{3!}, \\ 6 \cdot 45 \cdot \frac{59!}{29! \cdot 30!} &< \frac{90!}{30! \cdot 60!}, \\ 6 \cdot 45 \cdot 59 \cdot 58 \cdot \ldots \cdot 30 &< 90 \cdot 89 \cdot \ldots \cdot 61, \\ 6 \cdot 45 &< \frac{90}{59} \cdot \frac{89}{58} \cdot \ldots \cdot \frac{61}{30}. \end{aligned}$$

Iga võrratuse parema poole murd on suurem kui 1,5, seega on võrratuse parem pool suurem kui $1{,}5^{30} = 2{,}25^{15} > 2^15 > 270 = 6 \cdot 45$, mida oligi tarvis näidata.