Treeningvõistlus „Balti tee 2011“ võistkonnale

Tallinnas, 30. oktoobril 2011

1. Lahenda võrrand

$$\cos \pi x = \left\lfloor \frac{x}{2} - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \frac{1}{2} \right\rfloor .$$

Siin $\lfloor a \rfloor$ tähistab reaalarvu a täisosa, st suurimat täisarvu, mis ei ole suurem arvust a.

2. Võrrandi $ax^4 + bx^2 + a = 1$ lahenditeks on mingi kasvava aritmeetilise jada neli järjestikust liiget. Üks neist on ühtlasi ka võrrandi $bx^2 + ax + a = 1$ lahend. Leia parameetrite a ja b kõik võimalikud väärtuste paarid.

3. Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis rahuldavad tingimust

$$f(x+y) = f(x-y) + 2f(y)\cos x$$

mistahes reaalarvude x ja y korral.

4. Olgu a, b ja c mingi kolmnurga külgede pikkused, kusjuures $ab + bc + ca = 1$. Tõesta, et kehtib võrratus

$$(a+1)(b+1)(c+1) < 4 .$$

5. Funktsioon f on defineeritud positiivsete täisarvude hulgal seostega:

$$f(1) = 1; \quad \begin{aligned} f(2n) &= f(n), \text{ kui } n \text{ on paaris,} \\ f(2n) &= 2f(n), \text{ kui } n \text{ on paaritu;} \end{aligned} \quad \begin{aligned} f(2n+1) &= 2f(n)+1, \text{ kui } n \text{ on paaris,} \\ f(2n+1) &= f(n), \text{ kui } n \text{ on paaritu.} \end{aligned}$$

Kui palju leidub selliseid 2011-st väiksemaid positiivseid täisarve, et $f(n) = f(2011)$?

6. Olgu tasandil antud lõik AB pikkusega 7, ja olgu P punkt, mille kaugus sirgest AB on 3. Leia $|AP| \cdot |BP|$ vähim võimalik väärtus.

7. Viis erinevat punkti A, M, B, C ja D asetsevad ringjoonel O selles järjekorras, kusjuures $|MA| = |MB|$. Olgu sirgete AC ja MD lõikepunkt P ning sirgete BD ja MC lõikepunkt Q. Lõigaku sirge PQ ringjoont O punktides X ja Y. Tõesta, et $|MX| = |MY|$.

8. Olgu korrapärase viisnurga $ABCDE$ sisepiirkonnas valitud punkt P nii, et $\angle ABP = 6^\circ$ ja $\angle AEP = 12^\circ$. Leia nurga PAC suurus.

9. Ringjoonel C_0 on antud kolm punkti A, M, B, kusjuures $|AM| = |MB|$. Punkti M mitte sisaldaval kaarel AB on valitud punkt P. Olgu C_1 ringjoon, mis puutub ringjoont C_0 punktis P ja lõiku AB punktis Q. Tõesta, et $|MP| \cdot |MQ|$ ei sõltu punkti P valikust.

10. Olgu ringjoonel Γ antud kaks punkti A ja B. Lõikugu neist punktidest tõmmatud puutujad punktis X. Lõigaku punktist X tõmmatud sirge ringjoont Γ punktides C ja D, kusjuures D asub C ja X vahel. Lõikugu sirged CA ja BD punktis F, CD ja AB punktis G ning lõigu GX keskristsirge ja BD punktis H. Tõesta, et kui $BF \perp CF$, siis punktid X, F, G ja H asuvad ühel ringjoonel.

11. Olgu m selline naturaalarv, et $m^2 - 1$ ja $(m-2)^2$ on mõlemad kolmekohalised arvud, kusjuures esimese sajaliste ja üheliste numbrite äravahetamisel saame teise. Leia kõik sobivad m väärtused.

12. Kas jada $10001, 100010001, 1000100010001, \ldots$ liikmete hulgas leidub algarve?

13. $2+1$ ja 2^2+1 on omavahel ühistegurita, samuti $2+1$ ja 2^4+1 ning 2^2+1 ja 2^4+1. Kas see kehtib ka üldiselt, ehk kas võib väita, et jada

$$2+1, 2^2+1, 2^{2^2}+1, 2^{2^3}+1, \ldots$$

kõik liikmed on paarikaupa ühistegurita?

14. Kui palju leidub naturaalarvude paare (m, n), mille korral $\frac{n}{m}$ on täisarv ja mis rahuldavad võrdust $7m + 3n = 10^{2011}$?

15. Tõesta, et iga ühest suurema naturaalarvu k korral leidub arvust k^4 väiksem k kordne, mille kümndendsüsteemi esituses ei esine rohkem kui 4 erinevat numbrit.

16. Jerryl on $n \geqslant 3$ urgu, mis paiknevad ühel sirgel, ning ta varjab end ühes neist. Tom saab pista käpa mistahes ühte urgu ja kui Jerry on parajasti seal, siis saab ta Jerry kätte; kui aga mitte, siis liigub Jerry kohe eelmisse või järgmisse urgu, nii et Tom seda ei näe. Kas Tomil on võimalik Jerry kindlasti kätte saada?

17. Jukul on suur kastitäis valgeid, siniseid ja punaseid nuppe, ning ta asetab 2011×2011 ruudustiku igale ruudule ühe nupu. Kaht sellist paigutust loeme erinevateks, kui nende korral vähemalt ühel ruudul on erinevat värvi nupp. Kumba liiki võimalikke paigutusi leidub rohkem — kas paaris või paaritu arvu punaste nuppudega? (Arvu 0 loeme paarisarvuks.)

18. Tasandil võetakse n punkti, millest ükski kolmik ei asu ühel sirgel. Tõesta, et pindalaga 1 kolmnurki, mille kõik tipud on nendes punktides, on mitte rohkem kui $\frac{2}{3}(n^2 - n)$.

19. Kui palju arve saab maksimaalselt valida naturaalarvude 1 kuni 255 hulgast nii, et ükski valitud arv ei ole mõne teise valitud arvu kahekordne?

20. Olgu a, b ja c sellised positiivsed täisarvud, et $2a + 1$, $2b + 1$ ja $2c + 1$ on paarikaupa ühistegurita. Mõõtmetega $(2a + 1) \times (2b + 1) \times (2c + 1)$ risttahuka igale tahule on joonistatud ühikruutudest ruudustik, mille keskmine ruut on mustaks värvitud.

Risttahukas asetatakse ühikruutudest koosnevale tasandile nii, et tema alumise tahu ruudud on kohakuti tasandi mingite ruutudega. Seejärel hakatakse risttahukat veeretama üle tema servade, nii et iga sammu järel on alumise tahu ruudud jälle kohakuti tasandi mingite ruutudega. Igal sammul värvub mustaks tasandi see ruut, mille peale asetub risttahuka alumise tahu must ruut.

Tõesta, et niiviisi on võimalik tasandi kõik ruudud mustaks värvida.