Treeningvõistlus „Balti tee 2011“ võistkonnale

Tallinnas, 30. oktoobril 2011

Vastused ja lahendusideed

1. *Vastus:* $x = \frac{3}{2} + 2n$, kus $n \in \mathbb{Z}$.

   Tähistame $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor$, arvu a murdosa, ning kirjutame antud võrrandi kujul

   $$\cos \pi x = \left\lfloor \left\{ \frac{x}{2} \right\} - \frac{1}{2} \right\rfloor .$$

   Ilmselt $0 \leqslant \left\{ \frac{x}{2} \right\} < 1$ iga reaalarvu x korral.

   Vaatleme kõigepealt juhtu, kus $0 \leqslant \left\{ \frac{x}{2} \right\} < \frac{1}{2}$. Sel korral $-\frac{1}{2} \leqslant \left\{ \frac{x}{2} \right\} - \frac{1}{2} < 0$, mis annab, et $\left\lfloor \left\{ \frac{x}{2} \right\} - \frac{1}{2} \right\rfloor = -1$. Niisiis sellel juhul saame võrrandi $\cos \pi x = -1$, mille lahendid on $x = 2k+1$, kus $k \in \mathbb{Z}$. Ent selliste arvude x korral saame $\left\{ \frac{x}{2} \right\} = \left\{ k + \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2}$, mis on vastuolus eeldusega $\left\{ \frac{x}{2} \right\} < \frac{1}{2}$. Seega sellel juhul lahendid puuduvad.

   Olgu nüüd $\frac{1}{2} \leqslant \left\{ \frac{x}{2} \right\} < 1$. Sel korral $0 \leqslant \left\{ \frac{x}{2} \right\} - \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$, mis annab, et $\left\lfloor \left\{ \frac{x}{2} \right\} - \frac{1}{2} \right\rfloor = 0$. Niisiis sellel juhul saame võrrandi $\cos \pi x = 0$, mille lahendid on $x = k + \frac{1}{2}$, kus $k \in \mathbb{Z}$. Nende reaalarvude x korral kehtib

   $$\left\{ \frac{x}{2} \right\} = \left\{ \frac{1}{4} + \frac{k}{2} \right\} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & k = 2n, \\ \frac{3}{4}, & k = 2n+1. \end{cases}$$

   Et oleks täidetud tingimus $\frac{1}{2} \leqslant \left\{ \frac{x}{2} \right\}$, peab kehtima $k = 2n+1$, millest $x = \frac{3}{2} + 2n$, kus $n \in \mathbb{Z}$.

2. *Vastus:* $(a, b) \in \left\{ \left(-\frac{1}{8}, \frac{5}{4} \right), \left(\frac{9}{8}, -\frac{5}{4} \right) \right\}$.

   Vastavalt ülesande tingimustele on esimesel võrrandil neli erinevat lahendit, mis annab, et $a \neq 0$. Olgu x_0 mõlema võrrandi ühine lahend. Asetades x_0 võrranditesse ja lahutades võrrandid, saame seose $ax_0^4 - ax_0 = 0$ ehk $ax_0(x_0^3 - 1) = 0$. Siit järeldub, et ühine lahend saab olla vaid 0 või 1.

   Kui $x_0 = 0$, siis esimesest võrrandist järeldub, et $a = 1$. Ent võrrandil $x^4 + bx^2 = 0$ on vähemalt kahekordne lahend 0, mis pole võimalik.

   Niisiis $x_0 = 1$. Ükskõik kummast võrrandist järeldame, et $b = 1 - 2a$ ning esimene võrrand on seega kujul $ax^4 + (1-2a)x^2 + a - 1 = 0$. Vahetult on näha, et $x = -1$ on samuti selle võrrandi lahend ning tegurdamine annab, et esimene võrrand on

   $$(x-1)(x+1)(ax^2 - a + 1) = 0.$$

   Võrrandil $ax^2 - a + 1 = 0$ peab nüüd olema kaks erinevat reaalarvulist lahendit ξ ja $-\xi$, mis on võimalik ainult juhtudel $a > 1$ või $a < 0$. (Vastasel korral on selle ruutvõrrandi diskriminant mittepositiivne.) Kuna algse võrrandi neli lahendit moodustavad aritmeetilise jada, on ainsad võimalused $\xi = \frac{1}{3}$ või $\xi = 3$. Esimesel juhul $a = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{9}{8}$, millest $b = 1 - 2a = -\frac{5}{4}$. Teisel juhul $a = \frac{1}{1 - 3^2} = -\frac{1}{8}$, millest $b = 1 - 2a = \frac{5}{4}$.

   Märkus. Selle, et esimese võrrandi lahendid avalduvad sümmeetriliselt nullpunkti ümber kujul $-3d$, d, d ja $3d$, kus $2d$ on aritmeetilise jada vahe, saab juba lahenduse alguses kindlaks teha ka Viète'i valemite abil: lahendite summa peab olema 0. Muidugi on ka kohe siit näha, et $x_0 = 0$ ei saa olla selle võrrandi lahendiks.

3. *Vastus:* $f(x) = a \sin x$, kus a on suvaline reaalarv.

Võtame lähtevõrrandis $x = 0$ ning saame, et $f(y) = f(-y) + 2f(y)$, millest $f(-y) = -f(y)$ iga $y \in \mathbb{R}$ korral, st f on paaritu funktsioon. Võtame nüüd lähtevõrrandis $x = \frac{\pi}{2}$ ning saame, et $f\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$ iga $y \in \mathbb{R}$ korral. Niisiis $f\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = f\left(-\left(y - \frac{\pi}{2}\right)\right) = -f\left(y - \frac{\pi}{2}\right)$ iga $y \in \mathbb{R}$ korral.

Võtame nüüd lähtevõrrandis $y = \frac{\pi}{2}$ ning saame, et

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos x = -f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos x,$$

millest $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos x$, seega tähistades $a = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, saame, et

$$f(x) = a\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = a \sin x.$$

Teiselt poolt on lihtne veenduda, et iga funktsioon kujul $f(x) = a \sin x$ rahuldab lähtevõrrandit.

4. Näitame kõigepealt, et $a, b, c < 1$. Oletame väitevastaselt, et $a \geqslant 1$, siis kolmnurga võrratuse põhjal kehtib $b + c > a \geqslant 1$, mistõttu

$$ab + bc + ca = a(b + c) + bc > 1 + bc > 1,$$

vastuolu. Analoogiline vastuolu tekib oletusest $b \geqslant 1$ või $c \geqslant 1$. Niisiis peab kehtima $a, b, c < 1$.

Nüüd $(1 - a)(1 - b)(1 - c) > 0$, millest saame, et

$$1 + ab + bc + ca > a + b + c + abc.$$

Järelikult

$$\begin{aligned}(a + 1)(b + 1)(c + 1) &= 1 + a + b + c + ab + bc + ca + abc = 2 + a + b + c + abc < \\ &< 3 + ab + bc + ca = 4.\end{aligned}$$

5. *Vastus:* 455.

Olgu $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funktsioon, mille väärtused arvutatakse järgmise reegliga: $g(n)$ leidmiseks asendada arvu n kahendesituses plokid $00\ldots0$ ja $11\ldots1$ vastavalt plokkidega 0 ja 1. Näitame induktsiooniga, et $f(n) = g(n)$ iga n korral.

Baas. Vahetult arvutades näeme, et kehtivad võrdused $f(1) = g(1) = 1$, $f(2) = g(2) = 2$ ja $f(3) = g(3) = 1$.

Samm. Oletame, et võrdus $f(k) = g(k)$ kehtib kõigi naturaalarvude $k < n$ korral. Näitame, et $f(n) = g(n)$.

Vaatleme juhtu $n = 2k$.

- Kui k on paarisarv, siis $2k$ ja k kahendesitused lõpevad vastavalt numbritega 00 ja 0. Seega $g(2k) = g(k)$. Järelikult $f(n) = f(2k) = f(k) = g(k) = g(2k) = g(n)$.
- Kui k on paaritu arv, siis $2k$ kahendesitus lõpeb numbritega 10. Niisiis arvu $g(2k)$ saame, kui lisame arvu $g(k)$ kahendesituse lõppu numbri 0, mistõttu $g(2k) = 2g(k)$. Järelikult $f(n) = f(2k) = 2f(k) = 2g(k) = g(2k) = g(n)$.

Vaatleme juhtu $n = 2k + 1$.

- Kui k on paaritu arv, siis $2k + 1$ ja k kahendesitused lõpevad vastavalt numbritega 11 ja 1. Seega $g(2k + 1) = g(k)$. Järelikult $f(n) = f(2k + 1) = f(k) = g(k) = g(2k + 1) = g(n)$.
- Kui k on paarisarv, siis $2k + 1$ kahendesitus lõpeb numbritega 01. Niisiis $g(2k + 1)$ saame, kui lisame arvu $g(k)$ kahendesituse lõppu 1, mistõttu $g(2k + 1) = 2g(k) + 1$. Järelikult $f(n) = f(2k + 1) = 2f(k) + 1 = 2g(k) + 1 = g(2k + 1) = g(n)$.

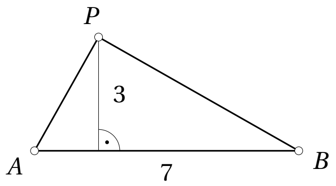
Nüüd $f(2011) = f(11111011011_2) = 10101_2 = 21$ ning võrdus $f(n) = f(2011)$ kehtib parajasti siis, kui arvu n kahendesituses on täpselt 5 numbrimuutust (arvu kahendesituse alguses eeldame olevat lõpmata palju nulle, mis tähendab, et kahendesituse vasakult esimese 1 ees on kindlasti üks numbrimuutus). Arvusid $n < 2048 = 2^{11}$, mille kahendesituses on täpselt 5 numbrimuutust, on $\binom{11}{5} = \frac{11!}{5!6!} = 462$ (kuna iga numbrimuutuse võib paigutada ükskõik millise kahendnumbri ette 11 kahendnumbri seast).

Sellistest arvudest n seitse tükki pole väiksemad kui 2011, nimelt 11111011011_2, 11111011101_2, 11111100101_2, 11111101001_2, 11111101011_2, 11111101101_2 ja 11111110101_2.

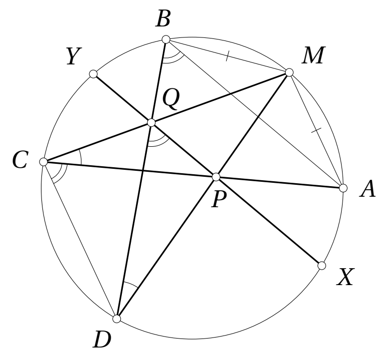
Kokkuvõttes arvusid $n < 2011$, mille korral $f(n) = f(2011)$, on $462 - 7 = 455$ tükki.

6. *Vastus:* 21.

Olgu $\angle APB = \alpha$. Siis ühelt poolt on kolmnurga APB (vt joonist 1) pindala $S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 = \frac{21}{2}$, teiselt poolt aga $S = \frac{1}{2} \cdot |AP| \cdot |BP| \cdot \sin\alpha$, millest $|AP| \cdot |BP| = \frac{21}{\sin\alpha}$. Kuna siinusfunktsiooni maksimaalne väärtus on 1, on $|AP| \cdot |BP|$ minimaalne võimalik väärtus 21. See on ka saavutatav, kuna ringjoonel diameetriga $|AB|$ leidub punkt, mis asub sirgest AB kaugusel 3 (kuna selle ringjoone raadius on kolmest suurem). Võttes selle punkti P-ks, on $\angle APB = 90^\circ$ ja seega $\sin\alpha = 1$.



Joonis 1

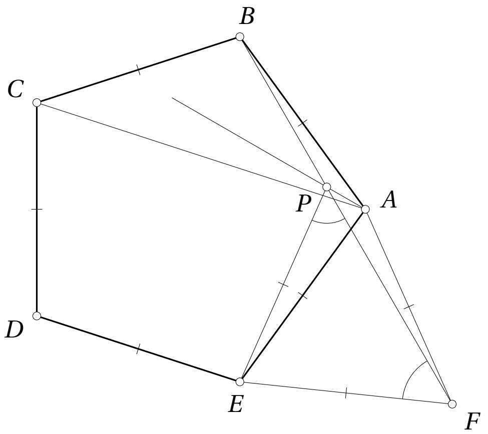


Joonis 2

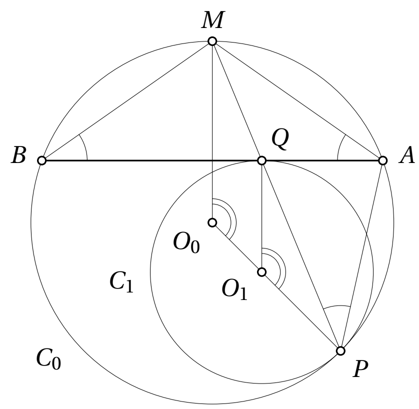
7. Kuna $|MA| = |MB|$, siis $\angle PCQ = \angle ACM = \angle BDM = \angle PDQ$ (vt joonist 2), millest järeldub, et punktid C, D, P ja Q asetsevad ühel ringjoonel. Seega $\angle PQD = \angle PCD = \angle ACD = \angle ABD$ (piirdenurgad), mistõttu $AB||XY$, ja kuna M on kaare AB keskpunkt, peab ta seega olema ka kaare XY keskpunkt, millest järeldub, et $|MX| = |MY|$.

8. *Vastus:* 12°.

Valime viisnurga välispiirkonnas punkti F nii, et kolmnurk AFE on võrdkülgne (vt joonist 3). Siis, kuna $\angle BAF = 108^\circ + 60^\circ$ ja $|AB| = |AF|$, on $\angle ABF = (180^\circ - 168^\circ) : 2 = 6^\circ$ ja järelikult asuvad punktid B, P ja F ühel sirgel. Seega $\angle EFP = 60^\circ - 6^\circ = 54^\circ$, $\angle FEP = 60^\circ + 12^\circ = 72^\circ$ ja $\angle EPF = 180^\circ - 54^\circ - 72^\circ = 54^\circ$, millest järeldub, et kolmnurk EPF on võrdhaarne kolmnurk haaradega EF ja EP. Kuna $|EP| = |EF| = |EA|$, on ka kolmnurk AEP võrdhaarne, ja seega $\angle EAP = (180^\circ - 12^\circ) : 2 = 84^\circ$. Järelikult, kuna $\angle EAC = 72^\circ$, on $\angle PAC = 84^\circ - 72^\circ = 12^\circ$.



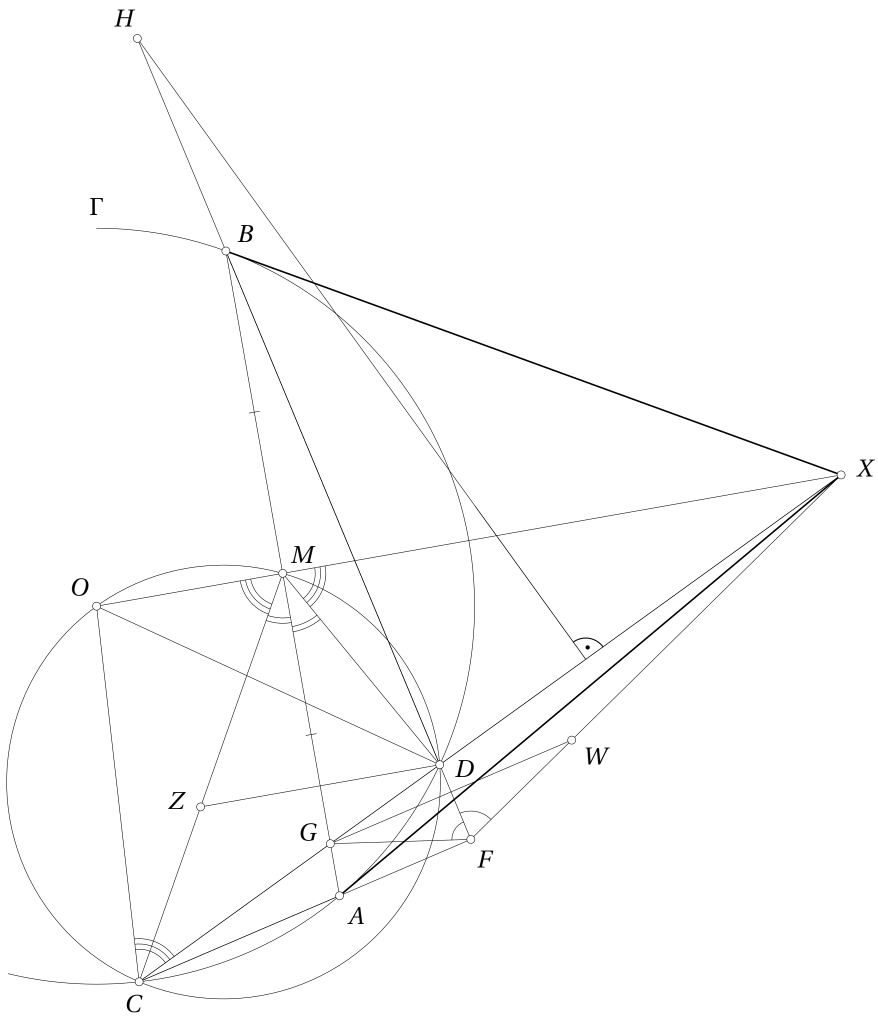
Joonis 3



Joonis 4

9. Olgu ringjoonte C_0 ja C_1 keskpunktid vastavalt O_0 ja O_1 (vt joonist 4). Kuna P on C_0 ja C_1 puutepunkt, asuvad punktid O_0, O_1 ja P ühel sirgel. Kuna Q on C_1 ja AB puutepunkt, on $O_1Q \perp AB$, ja kuna M on kaare AB keskpunkt, on ka $O_0M \perp AB$, millest järeldub $O_1Q||O_0M$. Järelikult $\angle PO_1Q = \angle PO_0M$, ja kuna $|O_1P| = |O_1Q|$ ning $|O_0P| = |O_0M|$, on kolmnurgad PO_0M ja PO_1Q sarnased, mistõttu ka punktid P, Q ja M asetsevad ühel sirgel.

Järgmisena vaatleme kolmnurki MPA ja MAQ. Kuna $|MA| = |MB|$, on neile kaartele toetuvad piirdenurgad võrdsed, ja seega $\angle MPA = \angle MBA = \angle MAB = \angle MAQ$. Kuna nurk PMA on neil ühine, on $\triangle MPA \sim \triangle MAQ$. Järelikult $|MP| : |MA| = |MA| : |MQ|$, millest $|MP| \cdot |MQ| = |MA|^2$, mis tõepoolest ei sõltu punkti P valikust.



Joonis 5

10. Olgu Γ keskpunkt O ja OX ning AB lõikepunkt M (vt joonist 5). Kuna $\triangle XOA \sim \triangle XAM$, on $|XO| \cdot |XM| = |XA|^2$. Teisest küljest, punkti X potentsist saame, et $|XC| \cdot |XD| = |XA|^2$, seega asuvad punktid M, O, D ja C ühel ringjoonel. Järelikult $\angle XMD = \angle OCD = \angle ODC = \angle OMC$. Lisaks, kuna $XO \perp AB$, on $\angle GMC = \angle GMD$.

Valime lõigul CM punkti Z nii, et $DZ || MX$. Siis DMZ on võrdhaarne kolmnurk haaradega MZ ja MD. Järelikult, kuna MG on nurga CMD poolitaja, on $|CG| : |GD| = |CM| : |MD| = |CM| : |MZ| = |CX| : |DX|$, millest $|CG| \cdot |XD| = |GD| \cdot |CX|$.

Valime lõigul GX sellise punkti X', et $\angle GFD = \angle DFX'$, ja lõigul $X'F$ sellise punkti W, et $CF || GW$. Kuna $CF \perp BF$, on ka $GW \perp BF$, ja järelikult langevad kolmnurgas GFW kõrgus ja nurgapoolitaja kokku, ning seega on tegu võrdhaarse kolmnurgaga ning $|GF| = |FW|$. Seega $|X'D| : |DG| = |X'F| : |FG| = |X'F| : |FW| = |X'C| : |CG|$, millest $|CG| \cdot |X'D| = |X'C| \cdot |GD|$.

Eelmises kahes lõigus saadud võrdustest järeldub, et $\dfrac{|XD|}{|XC|} = \dfrac{|X'D|}{|X'C|}$, millest $X = X'$, järelikult $\angle GFD = \angle XFD$. Kuna $\dfrac{|DG|}{|XD|} = \dfrac{|CG|}{|XC|} < 1$, siis $\angle XDB = \angle CDF < 90^\circ$, ja seega asub punkt H sirgest CX punkti B-ga samal pool. Tähistame kolmnurga GFX ümberringjoone punktist F erineva lõikepunkti sirgega BD tähega H'. Kuna $GFXH'$ on kõõlnelinurk, on $\angle H'XG = \angle H'FG = \angle H'FX = \angle H'GX$, millest järeldub, et $\triangle H'GX$ on võrdhaane kolmnurk haaradega $H'G$ ja $H'X$. Seega H' asub lõigu GX keskristsirgel, ja järelikult $H' = H$. Seega asuvad punktid G, F, X ja H tõepoolest ühel ringjoonel.

11. *Vastus:* 26.

Olgu $m^2 - 1 = 100a + 10b + c$, siis vastavalt ülesande tingimustele $(m-2)^2 = 100c + 10b + a$. Lahutades esimesest võrdusest teise, saame, et $4m - 5 = 99(a - c)$, seega $4m - 5$ peab olema arvu 99 kordne. Kuna $100 \leqslant (m-2)^2, m^2 - 1 \leqslant 999$, on $12 \leqslant m \leqslant 31$, ja seega $43 \leqslant 4m - 5 \leqslant 119$, millest $4m - 5 = 99$ ja $m = 26$. Kuna $26^2 - 1 = 675$ ja $(26-2)^2 = 576$, rahuldab $m = 26$ ülesande tingimusi.

12. *Vastus:* ei.

Paneme tähele, et selle jada n-s liige esitub kujul

$$\begin{aligned} 10^{4n} + 10^{4n-4} + \cdots + 10^4 + 1 &= \frac{10^{4(n+1)} - 1}{10^4 - 1} \\ &= \frac{10^{2(n+1)} + 1}{10^2 + 1} \cdot \frac{10^{2(n+1)} - 1}{10^2 - 1} \\ &= \frac{(10^{2(n+1)} + 1)(10^{2n} + 10^{2(n-1)} + \cdots + 1)}{101} \end{aligned}$$

Kuna 101 on algarv, peab vähemalt üks arvudest $10^{2(n+1)} + 1$ ja $10^{2n} + 10^{2(n-1)} + \cdots + 1$ jaguma 101-ga. Kui $n > 1$, on mõlemad arvud 101-st suuremad, ja seega pole jada n-s liige algarv. Kuna $10001 = 73 \cdot 137$, ei ole ka $n = 1$ korral tegu algarvuga, ja seega antud jadas algarve ei leidu.

13. *Vastus:* jah.

Võrdustest

$$\begin{aligned} 2^{2^n} + 1 &= (2^{2^n} - 1) + 2 \text{ ja} \\ 2^{2^n} - 1 &= (2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^{n-1}} - 1) \\ &= (2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^{n-2}} + 1)(2^{2^{n-2}} - 1) \\ &= \cdots \\ &= (2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^{n-2}} + 1) \cdots (2^2 + 1)(2 + 1)(2 - 1) \end{aligned}$$

saame, et

$$2^{2^n} + 1 = (2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^{n-2}} + 1) \cdots (2 + 1) + 2.$$

Oletame, et mingite naturaalarvude $m, n (n > m)$ korral $\text{SÜT}(2^{2^m} + 1, 2^{2^n} + 1) = d > 1$. Siis, kuna tegur $2^{2^m} + 1$ esineb eelneva võrduse paremas pooles olevas korrutises, peab $d = 2$. See aga pole võimalik, kuna antud jada kõik liikmed on paaritud arvud. Seega tõepoolest on antud jada kõik liikmed paarikaupa ühistegurita.

14. *Vastus:* 2024070.

Ülesande tingimuste kohaselt on $\dfrac{n}{m} = k$ täisarv. Asendades antud võrdusesse $n = km$, saame võrduse $(7+3k)m = 2^{2011} \cdot 5^{2011}$. Järelikult on $7+3k = 2^i \cdot 5^j$ mingite mittenegatiivsete 2011-st väiksemate täisarvude i, j korral. Et selline naturaalarv k leiduks, peab $2^i \cdot 5^j$ olema 10-st suurem arv, mis annab kolmega jagades jäägiks 1. Seega, kuna

$$2^i \cdot 5^j \equiv 2^i \cdot 2^j = 2^{i+j} \equiv \begin{cases} 2 & \text{kui } i + j \text{ on paaritu} \\ 1 & \text{kui } i + j \text{ on paaris} \end{cases} \pmod 3,$$

on k leidumiseks tarvilik ja piisav, et $i + j$ on paarisarv ja $(i, j) \neq (0, 0), (i, j) \neq (2, 0)$. Niisiis on sobiva paari (i, j) valikuks võimalusi $1006^2 + 1006^2 - 2 = 2024070$, ja kuna iga paar (i, j) määrab täpselt ühe paari (m, n), on ka ülesande tingimustele vastavaid paare (m, n) 2024070 tükki.

15. Kui $k < 10000$, on k enda esituses kõige rohkem neli erinevat numbrit, nii et piisab juhu $k \geqslant 10000$ vaatlemisest. Olgu n selline naturaalarv, mille korral $2^{n-1} \leqslant k < 2^n$. Tähistame S-ga kõigi ülimalt n-kohaliste naturaalarvude hulga, mille kümnendesituses esinevad ainult numbrid 1 ja 0. Hulga S elementide arv on siis $2^n > k$. Dirichlet' printsiibi kohaselt leiduvad seega naturaalarvud $a, b \in S, a > b$ nii, et $a \equiv b (\mathrm{mod}\ k)$. Siis $c = a - b$ on k kordne, mille kümnendesituses esinevad ainult numbrid 0,1,8 ja 9. Lisaks, $c \leqslant a < 10^n < 16^{n-1} = (2^{n-1})^4 \leqslant k^4$ (kolmas võrratus kehtib seepärast, et $k \geqslant 10000$ tõttu $n \geqslant 14$). Seega on c ülesande tingimustega sobiv k kordne.

16. *Vastus:* jah.

Nummerdame urud vasakult paremale arvudega 1 kuni n ning defineerime urgude i ja j vahekauguse $i - j$ (vahekaugus võib olla ka negatiivne).

Kõigepealt kontrollib Tom järjest läbi kõik urud 1 kuni n. Kui esimest urgu kontrollides on Jerry paaritu numbriga urus, siis Tom saab Jerry selle kontrollimise käigus kätte. Nimelt sel juhul esimest urgu kontrollides on Jerry uru ja kontrollitava uru vahekaugus mittenegatiivne paarisarv ning see vahekaugus kas ei muutu (kui Jerry liigub paremale) või väheneb 2 võrra (kui Jerry liigub vasakule). Viimase uru kontrollimisel (kui Jerryt juba kätte saadud pole) on see vahekaugus ilmselt mittepositiivne. Järelikult leidub urg, mille kontrollimisel on Jerry uru ja kontrollitava uru vahekaugus 0.

Kui urgusid 1 kuni n kontrollides Tom veel Jerryt kätte ei saanud, siis n-ndat urgu kontrollides asub Jerry urus, mille numbri paarsus on n-st erinev ning pärast seda liigub Jerry urgu, mille number on n-ga sama paarsusega. Nüüd kontrollib Tom järjest läbi kõik urud n kuni 1 ning analoogilise argumendi tõttu (kontrollimise alguses on Jerry uru ja kontrollitava uru vahekaugus mittepositiivne paarisarv, kontrollimise lõpus mittenegatiivne paarisarv) leidub urg, mille kontrollimisel see vahekaugus on 0.

17. *Vastus:* paarisarvu punaste nuppudega paigutusi on rohkem.

Antud ruudustikus on $m = 2011^2$ ruutu. Võimalusi valida nende hulgast n ruutu (kuhu asetada punane nupp) on $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$. Üle jääb $m - n$ ruutu ning nendest igal ruudul võib olla kas valge või sinine nupp. Järelikult n punase nupuga paigutusi on kokku $\binom{m}{n} 2^{m-n}$ tükki.

Paarisarvu punaste nuppudega paigutusi on niisiis kokku

$$\binom{m}{0}2^m + \binom{m}{2}2^{m-2} + \binom{m}{4}2^{m-4} + \ldots + \binom{m}{m-3}2^3 + \binom{m}{m-1}2^1$$

ning paaritu arvu punaste nuppudega paigutusi kokku

$$\binom{m}{1}2^{m-1} + \binom{m}{3}2^{m-3} + \binom{m}{5}2^{m-5} + \ldots + \binom{m}{m-2}2^2 + \binom{m}{m}2^0.$$

Binoomvalemist saame, et

$$(2-1)^m = \binom{m}{0}2^m - \binom{m}{1}2^{m-1} + \binom{m}{2}2^{m-2} - \ldots - \binom{m}{m}2^0.$$

Niisiis

$$1^m + \binom{m}{1}2^{m-1} + \ldots + \binom{m}{m}2^0 = \binom{m}{0}2^m + \ldots + \binom{m}{m-1}2^1.$$

Siit järeldub, et paarisarvu punaste nuppudega paigutusi on ühe võrra rohkem kui paaritu arvu punaste nuppudega paigutusi.

18. Paneme kõigepealt tähele, et kui tasandil on antud kaks punkti A ja B, mille vaheline kaugus on d, ning leidub punkt C nii, et kolmnurga ABC pindala on 1, siis punkti C kaugus sirgest AB on $\frac{2}{d}$. Järelikult selliste punktide C geomeetriline koht on kaks sirgega AB paralleelset sirget, mis asuvad sirgest AB kaugusel $\frac{2}{d}$.

Paneme veel tähele, et kolmnurkade, mille kaks tippu A ja B on antud punktides ning mille pindala on 1, arv on ülimalt 4. Nimelt, kui selliseid kolmnurki oleks rohkem kui 4, siis peaks Dirichlet' printsiibi põhjal asuma antud (vähemalt 5) punktide seast vähemalt kolm punkti ühel sirgel (mille kaugus sirgest AB on $\frac{2}{d}$), mis on vastuolus ülesande tingimusega.

Nagu ülal põhjendatud, saab iga punktipaari kohta olla ülimalt 4 kolmnurka. Vaadeldes kõiki punktipaare, loendame iga kolmnurka kolmekordselt (iga külje juures). Järelikult on nõutava omadusega kolmnurki mitte rohkem kui $\frac{\binom{n}{2}\cdot 4}{3} = \frac{2n(n-1)}{3}$.

19. *Vastus:* 170.

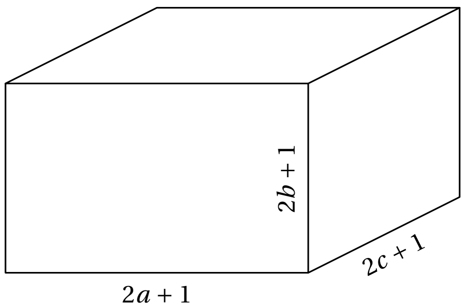
Grupeerime vaadeldavad naturaalarvud järgmistesse hulkadesse: $A_0 = \{1\}$, $A_1 = \{2,3\}$, $A_2 = \{4,5,6,7\}$, $A_3 = \{8,9,\ldots,15\}$, $A_4 = \{16,17,\ldots,31\}$, $A_5 = \{32,33\ldots,63\}$, $A_6 = \{64,65,\ldots,127\}$, $A_7 = \{128,129,\ldots,255\}$. Igas hulgas A_k on 2^k elementi, kus $k = 0,1,\ldots,7$.

Paneme tähele, et iga $n = 1,2,\ldots,127$ korral arvud n ja $2n$ kuuluvad vastavalt mingitesse hulkadesse A_k ja A_{k+1}. Valides kõik arvud hulkadest A_1, A_3, A_5 ja A_7, saame kokku $2+8+32+128 = 170$ arvu, millest ükski pole teise kahekordne.

Näitame teiselt poolt, et rohkem kui 170 arvu sellisel moel valida pole võimalik. Hulgast A_k valitagu a_k arvu, kus $k = 0,1,\ldots,7$.

Kui $k = 0,2,4,6$, siis iga arvu $m \in A_k$ korral kehtib $2m \in A_{k+1}$, kusjuures paaride $(m,2m)$ koguarv on 2^k. Igast sellisest paarist valitakse ülimalt üks arv. Lisaks saab hulgast A_{k+1} valida veel ülejäänud 2^k (paaritut) arvu, mistõttu kokku hulkadest A_k ja A_{k+1} valitakse ülimalt $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ arvu.

Oleme saanud, et $a_0 + a_1 \leqslant 2^1$, $a_2 + a_3 \leqslant 2^3$, $a_4 + a_5 \leqslant 2^5$ ja $a_6 + a_7 \leqslant 2^7$. Võrratuste liitmisel saame, et $a_0 + a_1 + \ldots + a_7 \leqslant 170$.



Joonis 6

20. Asugu risttahukas tasandil joonisel 6 näidatud viisil. Veeretades risttahukat „alla“, „paremale“, „üles“, „vasakule“, „üles“ ja „paremale“, oleme risttahukat nihutanud vektori $(2a+1, 2a+1)$ võrra, kusjuures alumine tahk on sama. Kuna alumise tahu suhtes on servad pikkusega $2a+1$ ja $2c+1$ sümmeetrilised, saab sarnasel viisil risttahukat nihutada ka vektori $(2c+1, 2c+1)$ võrra, kusjuures alumine tahk on sama.

Veeretades risttahuka algseisust „üles“, siis nihutades vektori $(2b+1, 2b+1)$ võrra ning siis veeretades „alla“, oleme nihutanud risttahukat vektori $(2b+1, 2b+1)$ võrra ning alumine tahk on sama mis algseisus.

Ülaltoodud nihutamistest (neid saab läbi viia ka tagurpidises järjekorras) järeldub, et kui on võimalik värvida ruut koordinaatidega (x, y), siis on võimalik värvida ka ruudud koordinaatidega $(x+2a+1, y+2a+1)$, $(x+2b+1, y+2b+1)$ ja $(x+2c+1, y+2c+1)$. Näitame, et saame värvida ka ruudu koordinaatidega $(x+1, y+1)$. Kuna $2a+1$ ja $2c+1$ on ühistegurita, siis leiduvad täisarvud r ja s nii, et $r(2a+1)+s(2c+1) = 1$, seega

$$(x \pm 1, y \pm 1) = (x \pm r(2a+1) \pm s(2c+1), y \pm r(2a+1) \pm s(2c+1)),$$

mistõttu ruut koordinaatidega $(x \pm 1, y \pm 1)$ on samuti värvitav.

Olgu algseisus alumise tahu keskmise ruudu koordinaadid $(0,0)$, siis ülaltoodud arutelu korduvalt kasutades saame värvida kõik ruudud koordinaatidega (x, y), kus $x + y$ on paarisarv.

Mingid kaks arvudest a, b ja c on sama paarsusega, seega nende summa on paarisarv. Veeretame risttahuka üle serva $2a+1$; kui $a+c+1$ on paaritu, siis võrreldes seisuga enne veeretamist on nüüd alumise tahu keskmise ruudu koordinaatide summa paaritu. Kui $a+c+1$ on paaris, siis veeretame risttahuka üle serva $2b+1$ ja uurime $a+b+1$ paarsust: kui on paaritu, siis on nüüd alumise tahu keskmise ruudu koordinaatide summa paaritu; kui aga paaris, peab $b+c+1$ olema paaritu ning on jäänud veeretada risttahukas üle serva $2c+1$.

Eelneva tegevuse tulemusel on nüüd alumise tahu keskmise ruudu (x, y) jaoks $x+y$ paaritu arv. Seetõttu saame ka värvida kõik ruudud, mille koordinaatide summa on paaritu arv.