Treeningvõistlus “Balti tee 2010” võistkonnale

Tartus, 31. oktoobril 2010

1. Leia võrrandi

$$\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{x+4}=0$$

reaalarvulised lahendid.

2. Olgu x, y, z sellised positiivsed reaalarvud, et $x+y+z=1$. Tõesta, et

$$\sqrt{xy+z}+\sqrt{yz+x}+\sqrt{zx+y}\geqslant 1+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\,.$$

3. Leia kõik sellised reaalarvud x, mille korral

$$x\cdot\Big\lfloor x\cdot\lfloor x\cdot\lfloor x\rfloor\rfloor\Big\rfloor=88\,.$$

(Siin $\lfloor a\rfloor$ tähistab reaalarvu a täisosa, st suurimat sellist täisarvu n, et $n\leqslant a$.)

4. Leia võrrandisüsteemi

$$\begin{cases}\sin^2 x+\cos^2 y &= y^2\\ \sin^2 y+\cos^2 x &= x^2\end{cases}$$

reaalarvulised lahendid.

5. Täisarvude jada $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ iga liige peale a_0 on määratud seosega

$$a_{n+1}=|a_n-\overline{a_n}|\,,$$

kus $\overline{a_n}$ tähistab arvu, mis saadakse arvust a_n tema numbrite järjekorra muutmisel vastupidiseks (arv $\overline{a_n}$ võib alata ka numbriga 0).

Leia vähim positiivne täisarv a_0, mille korral selle jada ükski liige ei ole 0.

6. Olgu kolmnurga ABC külgede BC, CA ja AB keskpunktid vastavalt L, M ja N. Tõesta, et $\angle LAC=\angle ABM$ parajasti siis, kui $\angle ANC=\angle ALB$.

7. Olgu ABC võrdkülgne kolmnurk ja D mingi punkt selle tipust A küljele BC tõmmatud kõrgusel. Valime punkti E nii, et E ja B on sirgest AD erineval pool ning $|AE|=|ED|=|BD|$. Leia nurga CBE suurus.

8. Asugu punkt A väljaspool võrdkülgse kolmnurga PQR ümberringjoont ω. Olgu sirgete AP, AQ ja AR teised lõikepunktid ringjoonega ω vastavalt U, V ja W. Tõesta, et avaldise

$$\frac{|AP|}{|AU|}+\frac{|AQ|}{|AV|}+\frac{|AR|}{|AW|}$$

väärtus sõltub ainult punkti A ja ringjoone ω keskpunkti vahelisest kaugusest, mitte aga tema paiknemisest kolmnurga tippude P, Q ja R suhtes.

9. Olgu antud kumer n-nurk, mille tippudest ükski nelik ei asu ühel ringjoonel. Kolmnurka, mille tippudeks on selle n-nurga mingid kolm tippu, nimetame *tihedaks*, kui kõik ülejäänud $n-3$ tippu paiknevad tema ümberringjoone sees, ja *hõredaks*, kui kõik ülejäänud $n-3$ tippu paiknevad tema ümberringjoonest väljaspool.

Tõesta, et tihedaid ja hõredaid kolmnurki on ühepalju.

10. Olgu H teravnurkse kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt ning asugu punkt P selle kolmnurga ümberringjoone sellel kaarel BC, mis ei sisalda punkti A, kusjuures AP ei ole ümberringjoone diameeter. Sirgega BP paralleelne ja punkti A läbiv sirge lõikugu sirgega CH punktis Q ning sirgega CP paralleelne ja punkti A läbiv sirge lõikugu sirgega BH punktis R. Tõesta, et sirged QR ja AP on paralleelsed.

11. Tõesta, et kui positiivsed täisarvud a, b, c ja d on sellised, et $ab = cd$, siis $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ on kordarv.

12. Olgu täisarvude jada (F_n) antud valemiga $F_n = 2^{2^n} + 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Tõesta, et selle jada ükski liige ei ole mingi täisarvu kuup.

13. Leia kõik positiivsete täisarvude paarid (m, n), mille korral kehtib võrdus $(n!)^{m!} - (m!)^{n!} = 28$.

14. Kas leiduvad kolm sellist erinevat nullist erinevat täisarvu a, b ja c, mille korral $a + b + c = 0$ ning $a^{13} + b^{13} + c^{13}$ on täisarvu ruut?

15. Olgu n naturaalarv, $n \geqslant 2$. Tõesta, et jada

$$2, \quad 2^2, \quad 2^{2^2}, \quad 2^{2^{2^2}}, \ldots$$

mingist liikmest alates annavad kõik liikmed arvuga n jagamisel sama jäägi.

16. Banaania kohtus on asitõendiks 5 väliselt ühesugust münti, millest 2 on võltsitud. Kohtunik teab juba, et õiged mündid on üheraskused ning võltsmünte on täpselt kaks, need on samuti üheraskused ja õigetest müntidest kaalu poolest erinevad. Ekspert teab lisaks, millised kaks münti on võltsitud, ja et need on õigetest müntidest kergemad.

Näita, et ekspert saab kahe kaalumise abil vihtideta kangkaaludel tõestada kohtunikule, et just need kaks münti on võltsitud. (Igal kaalumisel saab kummalegi kaalukausile panna ühe või mitu münti ja veenduda, kas need mündihulgad on üheraskused või kumb neist on raskem.)

17. Banaania politsei asub püüdma tagaotsitavat, kes põgeneb mägiteed mööda ühes suunas külast külasse liikudes. Politsei teab, et tagaotsitav liigub igal ööl edasi järgmisse külasse ja redutab seal terve päeva, et järgmisel ööl jälle edasi liikuda; jõudes viimasesse, n. külasse, kust tee enam edasi ei lähe, jääb ta sinna paigale — kuid pole teada, mitmendasse külasse tagaotsitav on püüdeoperatsiooni alguseks juba jõudnud. Politsei tahab tagaotsitava võimalikult kiiresti tabada, kuid saab selleks iga päev teha haarangu ainult ühes vabalt valitud külas, ning kui tagaotsitav viibib sel päeval selles külas, saadakse ta kätte.

Leia vähim päevade arv, millega politsei saab tagaotsitava kindlasti kinni püüda.

18. Banaania suurimas istanduses, mis koosneb $m \times m$ ühesuurusest ruudust, algab banaanikoristus. Esimesel päeval koristab igaüks m brigaadist ühe ruudu, kusjuures need m ruutu peavad paiknema ruudustiku erinevates ridades ja erinevates veergudes. Igal järgneval päeval koristab iga brigaad mõne sellise veel koristamata ruudu, millel on ühine külg tema eelmisel päeval koristatud ruuduga; kui sellist ruutu ei leidu, siis see brigaad lõpetab töö, ning kui samale ruudule on mitu pretendenti, siis heidetakse liisku, kes selle koristab.

Tõesta, et kui m on täisarvu ruut, siis on võimalik esimesel ja igal järgneval päeval koristatavad ruudud niiviisi valida, et m päevaga saavad kogu istanduses banaanid koristatud.

19. Banaania linnad on algselt mingil viisil ühendatud kahesuunalise liiklusega teedega (iga tee ühendab mingit kaht linna, ei läbi teisi linnu ega ristu teiste teedega). Igast linnast saab neid teid mööda liikuda igasse teise linna, ning see võimalus säilib ka siis, kui mistahes üks tee liikluseks sulgeda.

Võimuvõitluse käigus hakkavad Banaania teedeminister ja transpordiminister kordamööda olemasolevaid teid ühesuunaliseks muutma: igal sammul käsib minister ühesuunaliseks muuta täpselt ühe veel kahesuunalise tee. See minister, kelle käsu tulemusena ei ole mingist linnast mingisse teise linna enam võimalik liikuda, on kaotaja ja sunnitud tagasi astuma.

Kas emmal-kummal ministritest leidub strateegia, millega ta saab sundida oma vastase tagasi astuma?

20. Igal Banaania ärimehel on ülejäänute seas ülimalt 5 äripartnerit. Et äri paremini edeneks, otsustavad ärimehed asuda toetama kaht suuremat võimulolevat erakonda, nii et iga ärimees toetab täpselt üht neist kahest erakonnast.

Tõesta, et ärimehed saavad toetatavad erakonnad valida nii, et vähemalt $\frac{3}{5}$ kõigist äripartnerite paaridest toetab kumbki partner erinevat erakonda.