Treeningvõistlus “Balti tee 2010” võistkonnale

Tartus, 31. oktoobril 2010

Vastused ja lahendusideed

1. *Vastus:* $x = -3$.

Paneme tähele, et $x = -3$ on võrrandi lahend. Kuna funktsioonid $f(x) = x + c$ ja $g(y) = \sqrt[3]{y}$ on kogu reaalarvude hulgal kasvavad, siis on see lahend ainus.

2. Tõestame võrratuse $\sqrt{xy+z} \geqslant \sqrt{xy} + z$; analoogiliselt $\sqrt{yz+x} \geqslant \sqrt{yz} + x$ ja $\sqrt{zx+y} \geqslant \sqrt{zx} + y$. Nende kombineerimisel, arvestades tingimust $x + y + z = 1$, saame tõestatava võrratuse.

Et x, y, z on positiivsed, piisab tõestada, et $xy + z \geqslant (\sqrt{xy} + z)^2$, ehk $z - z^2 \geqslant 2z\sqrt{xy}$, ehk $x + y \geqslant 2\sqrt{xy}$ (sest $x + y + z = 1$). See aga tuleneb ilmselt kehtivast võrratusest $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geqslant 0$.

3. *Vastus:* $x = \frac{22}{7}$.

Paneme tähele, et funktsioon $f(x) = x \cdot \left\lfloor x \cdot \lfloor x \cdot \lfloor x \rfloor \rfloor \right\rfloor$ on mittekahanev, kui $x > 0$, ja mittekasvav, kui $x < 0$. Et $f(3) = f(-3) = 81$, siis piisab uurida juhte $x < -3$ ja $x > 3$.

Kui $x < -3$, siis $\lfloor x \rfloor \leqslant -4$, kust $\lfloor x \cdot \lfloor x \rfloor \rfloor \geqslant 12$, $\left\lfloor x \cdot \lfloor x \cdot \lfloor x \rfloor \rfloor \right\rfloor \leqslant -37$ ja $x \cdot \left\lfloor x \cdot \lfloor x \cdot \lfloor x \rfloor \rfloor \right\rfloor \geqslant 111$, st selles piirkonnas lahendeid ei ole.

Olgu nüüd $x > 3$. Kui x on võrrandi lahend, siis $x = \frac{88}{n}$, kus $n = \left\lfloor x \cdot \lfloor x \cdot \lfloor x \rfloor \rfloor \right\rfloor$. Et $n < \frac{88}{3}$ ja on täisarv, siis $n \leqslant 29$. Vaatame n võimalikke väärtusi.

Kui $n = 29$, siis $x = \frac{88}{29}$, kust $\lfloor x \rfloor = 3$, $\lfloor x \cdot \lfloor x \rfloor \rfloor = \left\lfloor \frac{264}{29} \right\rfloor = 9$ ja $n = \left\lfloor x \cdot \lfloor x \cdot \lfloor x \rfloor \rfloor \right\rfloor = \left\lfloor \frac{792}{29} \right\rfloor = 27$, vastuolu.

Kui $n = 28$, siis $x = \frac{88}{28} = \frac{22}{7}$, kust $\lfloor x \rfloor = 3$, $\lfloor x \cdot \lfloor x \rfloor \rfloor = \left\lfloor \frac{66}{7} \right\rfloor = 9$ ja $n = \left\lfloor x \cdot \lfloor x \cdot \lfloor x \rfloor \rfloor \right\rfloor = \left\lfloor \frac{198}{7} \right\rfloor = 28$, st $n = 28$ sobib ja $x = \frac{22}{7}$ on võrrandi lahend.

Kui $n = 27$, siis $x = \frac{88}{27}$, kust $\lfloor x \rfloor = 3$, $\lfloor x \cdot \lfloor x \rfloor \rfloor = \left\lfloor \frac{264}{27} \right\rfloor = 9$ ja $n = \left\lfloor x \cdot \lfloor x \cdot \lfloor x \rfloor \rfloor \right\rfloor = \left\lfloor \frac{792}{27} \right\rfloor = 29$, vastuolu.

Et n kahanemisel x kasvab ja eelmises lõigus veendusime, et $n = 27$ korral $f(x) = \frac{88}{27} \cdot 29 > 88$, siis rohkem lahendeid ei ole, sest funktsioon $f(x)$ on vaadeldavas piirkonnas mittekahanev.

4. *Vastus:* $(1,1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$ ja $(-1,-1)$.

Võrrandisüsteemi kuju tõttu võime piirduda juhu $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ uurimisega ning üldisust kitsendamata eeldada, et $0 \leqslant x \leqslant y$.

Liites võrrandid kokku, saame $x^2 + y^2 = 2$, kust $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$.

Lahutades esimesest võrrandist teise, asendades $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ja $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$ ning lahutades vasakul pool ruutude vahe teguriteks, saame

$$2(\sin x + \sin y)(\sin x - \sin y) = y^2 - x^2 .$$

Et funktsioon $\sin x$ on vahemikus $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ mittenegatiivne ja kasvav ning $x \leqslant y$, siis saadud võrduse vasak pool on mittepositiivne ja parem pool mittenegatiivne. Võrdus kehtib, kui mõlemad pooled on võrdsed nulliga, ehk $x = y = 1$.

5. *Vastus:* 1012.

Et jada liikmeks mingil kohal ei tuleks 0, ei tohi jada sisaldada palindroome, sh ühekohalisi arve.

Kui jada mingi liige on kahekohaline arv $\overline{ab}$, siis järgmine liige on $|\overline{ab} - \overline{ba}| = 9|a - b|$, st 9-ga jaguv ülimalt kahekohaline arv. On lihtne kontrollida, et kõik sellised arvud viivad hiljemalt nelja sammu järel ühekohalise liikmeni 9. Seega ei tohi jada sisaldada ka kahekohalisi arve.

Kui jada mingi liige on kolmekohaline arv $\overline{abc}$, siis järgmine liige on $|\overline{abc} - \overline{cba}| = 99|a - c|$, st 99-ga jaguv ülimalt kolmekohaline arv. On jällegi lihtne kontrollida, et kõik sellised arvud viivad hiljemalt nelja sammu järel kahekohalise liikmeni 99. Seega ei tohi jada sisaldada ka kolmekohalisi arve.

Olgu nüüd jada mingi liige neljakohaline arv $\overline{abcd}$, siis järgmine liige on

$$|\overline{abcd} - \overline{dcba}| = |999(a - d) + 90(b - c)| .$$

Kui $b = c = 0$ (st vaadeldav arv on 1000 kuni 1009), siis järgmine liige on 999-ga jaguv ülimalt neljakohaline arv ning siingi on lihtne kontrollida, et kõik sellised arvud viivad hiljemalt nelja sammu järel kolmekohalise liikmeni 999. Arvud 1010 ja 1011 annavad kohe järgmiseks liikmeks vastavalt 909 ja 90, st ei sobi samuti. Arvu 1012 korral on aga järgmised liikmed

$$1089,\ 8712,\ 6534,\ 2178,\ 6534,\ \ldots$$

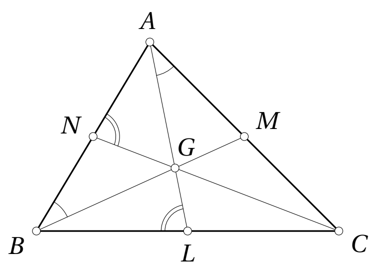
ning kuna jada iga liige määrab üheselt järgmise liikme, siis siitmaalt edasi sisaldab jada ainult liikmeid 2178 ja 6534.

6. Olgu kolmnurga mediaanide lõikepunkt G ning kolmnurga nurgad $\angle A$, $\angle B$ ja $\angle C$.

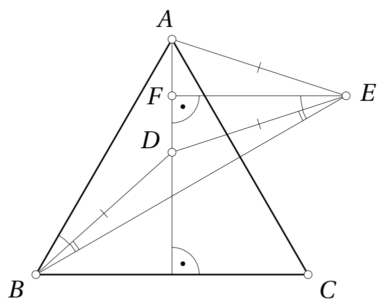
Et $\angle LAC = 180^\circ - \angle ALC - \angle C = \angle ALB - \angle C = \angle ALN$ (sest $NL \parallel AC$, vt joonist 1), siis tingimus $\angle LAC = \angle ABM$ on samaväärne tingimusega $\angle ALN = \angle ABM$, ehk $\angle GLN = \angle GBN$, st sellega, et $BLGN$ on kõõlnelinurk.

Kuna $\angle ANC = 180^\circ - \angle GNB$, siis on tingimus $\angle ANC = \angle ALB$ samuti samaväärne sellega, et $BLGN$ on kõõlnelinurk.

Niisiis $\angle LAC = \angle ABM$ parajasti siis, kui $\angle ANC = \angle ALB$.



Joonis 1



Joonis 2

7. *Vastus:* 30°.

Olgu lõigu AD keskpunkt F ning tähistame $a = |AE| = |ED| = |BD|$ (vt joonist 2). Siinusteoreemist kolmnurgas ABD saame, et $|AD| = 2a \sin\angle ABD$. Täisnurksest kolmnurgast EFD leiame, et $\frac{|AD|}{2} = |FD| = a \sin\angle DEF$, st $|AD| = 2a \sin\angle DEF$. Et mõlemad vaadeldavad nurgad on teravnurgad, siis $\angle ABD = \angle DEF$. Kuna ka $\angle DBE = \angle DEB$, siis $\angle EBA = \angle FEB = \angle EBC$, mis tähendab, et $\angle CBE = 30^\circ$.

8. Olgu punktist A tõmmatud puutujalõigu pikkus p, siis $|AP| \cdot |AU| = |AQ| \cdot |AV| = |AR| \cdot |AW| = p^2$. Niisiis

$$\frac{|AP|}{|AU|} + \frac{|AQ|}{|AV|} + \frac{|AR|}{|AW|} = \frac{1}{p^2}(|AP|^2 + |AQ|^2 + |AR|^2) .$$

Olgu ringjoone ω keskpunkt O ja raadius r; üldisust kitsendamata võime eeldada, et punkt A asub kiirtega OP ja OR piiratud tasandi sektoris (vt joonist 3). Olgu $\angle AOP = \alpha$, siis $\angle AOQ = 120^\circ + \alpha$ ja $\angle AOR = 120^\circ - \alpha$ ning koosinusteoreemi abil kolmnurkadest APO, AQO ja ARO saame

$$\begin{aligned}
|AP|^2 &= |AO|^2 + |OP|^2 - 2|AO| \cdot |OP| \cdot \cos\alpha , \\
|AQ|^2 &= |AO|^2 + |OQ|^2 - 2|AO| \cdot |OQ| \cdot \cos(120^\circ + \alpha) , \\
|AR|^2 &= |AO|^2 + |OR|^2 - 2|AO| \cdot |OR| \cdot \cos(120^\circ - \alpha) .
\end{aligned}$$

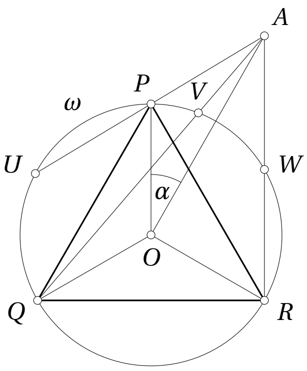
Et $|OP| = |OQ| = |OR| = r$ ning

$$\cos(120^\circ + \alpha) + \cos(120^\circ - \alpha) = 2\cos 120^\circ \cos\alpha = -\cos\alpha\ ,$$

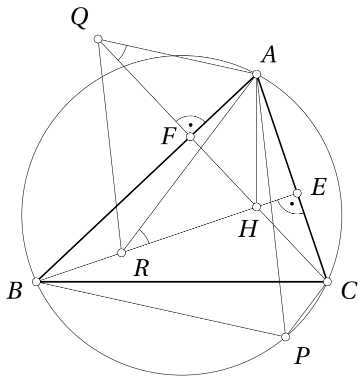
siis

$$|AP|^2 + |AQ|^2 + |AR|^2 = 3|AO|^2 + 3r^2\ ,$$

st avaldise $\dfrac{|AP|}{|AU|} + \dfrac{|AQ|}{|AV|} + \dfrac{|AR|}{|AW|}$ väärtus sõltub ainult arvudest p, r ja $|AO|$, kus p on omakorda üheselt määratud r ja $|AO|$ väärtustega.



Joonis 3



Joonis 4

9. Näitame, et nii tihedaid kui ka hõredaid kolmnurki on täpselt $n-2$.

Kui $n = 3$, siis ainus vaadeldav kolmnurk on ühtaegu tihe ja hõre. Olgu edaspidi $n > 3$.

Valime esmalt n-nurga ühe suvalise külje otspunktid ning ülejäänud tippude hulgast sellise, millest see külg paistab vähima nurga all. Need kolm tippu moodustavad tiheda kolmnurga. Kui $n > 3$, siis vähemalt üks selle kolmnurga külgedest on n-nurga diagonaal. Vaatleme nüüd n-nurga kõiki neid tippe, mis asuvad selle diagonaaliga määratud sirgest teisel pool kui eespool leitud tiheda kolmnurga kolmas tipp, ning valime nende hulgast sellise, millest see diagonaal paistab vähima nurga all. See tipp koos vaadeldava diagonaali otspunktidega moodustab uue tiheda kolmnurga, ning seni valitud 4 tippu moodustavad kaheks tihedaks kolmnurgaks tükeldatud kumera nelinurga. Kui $n > 4$, siis vähemalt üks selle nelinurga külgedest on jällegi n-nurga diagonaal, ja saame samal viisil jätkata. Kokkuvõttes leiame niiviisi n-nurga tükelduse $n-2$ tihedaks kolmnurgaks.

Veendume, et rohkem tihedaid kolmnurki ei ole. Tõepoolest: n-nurga iga külg on täpselt ühe tiheda kolmnurga küljeks, ning iga diagonaal, mis on mingi tiheda kolmnurga küljeks, on seda täpselt kahe tiheda kolmnurga jaoks, mis paiknevad sellest diagonaalist erineval pool. Seega lähtudes mistahes tihedast kolmnurgast saame samm-sammult konstrueerida seda sisaldava n-nurga tükelduse $n-2$ tihedaks kolmnurgaks — ning kuna n-nurga iga külje jaoks on seda sisaldav tihe kolmnurk üheselt määratud ja ka igal järgmisel sammul on tükeldus tihedateks kolmnurkadeks ainult üheselt jätkatav, siis on saadav tükeldus igal juhul üks ja sama.

Analoogiliselt saame leida ka n-nurga tükelduse $n-2$ hõredaks kolmnurgaks (vaadeldes igal sammul tippu, millest vaadeldav külg või diagonaal paistab suurima nurga all), ning näidata, et hõredaid kolmnurki rohkem ei ole.

10. Olgu E ja F vastavalt tippudest B ja C tõmmatud kõrguste aluspunktid (vt joonist 4). Näitame, et $\angle ARH = \angle AQH$, millest järeldub, et $QAHR$ on kõõlnelinurk. Tõepoolest,

$$\begin{aligned} \angle ARH &= \angle ARE = 90^\circ - \angle RAE = 90^\circ - \angle RAP - \angle PAC = \\ &= 90^\circ - \angle APC - \angle PAC = 90^\circ - (180^\circ - \angle ACP) = \\ &= 90^\circ - \angle ABP = 90^\circ - \angle QAF = \angle AQH\ . \end{aligned}$$

Kuna H on kõrguste lõikepunkt, siis $\angle QHR = \angle CAB$ ja $\angle QHA = \angle CBA$. Et $QAHR$ on kõõlnelinurk, siis

$$\angle QAR = \angle QHR = \angle CAB$$

ning

$$\angle QRA = \angle QHA = \angle CBA,$$

mis tähendab, et kolmnurgad ARQ ja ABC on sarnased ning $\angle AQR = \angle ACB$. Niisiis

$$\begin{aligned}\angle AQR + \angle QAP &= \angle ACB + \angle QAR + \angle RAP = \angle ACB + \angle CAB + \angle APC = \\ &= \angle ACB + \angle CAB + \angle ABC = 180^\circ ,\end{aligned}$$

st sirged QR ja AP on paralleelsed.

11. Olgu $m = \text{SÜT}(a,c)$. Siis leiduvad positiivsed täisarvud u ja v nii, et $\text{SÜT}(u,v) = 1$ ning $a = mu$ ja $c = mv$. Kuna $ab = cd$, siis $mub = mvd$, järelikult $ub = vd$. Kuna $\text{SÜT}(u,v) = 1$, siis d jagub arvuga u, st leidub positiivne täisarv n nii, et $d = nu$. Et $ub = vnu$, siis $b = nv$. Kokkuvõttes

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = m^2u^2 + n^2v^2 + m^2v^2 + n^2u^2 = (u^2 + v^2)(m^2 + n^2) .$$

12. Olgu mittenegatiivsed täisarvud k ja n sellised, et $2^{2^n} + 1 = k^3$. Siis k peab olema paaritu arv. Tegurdame:

$$2^{2^n} = k^3 - 1 = (k-1)(k^2 + k + 1) .$$

Olgu $k - 1 = 2^s$ ja $k^2 + k + 1 = 2^t$, kus s ja t on positiivsed täisarvud ja $s + t = 2^n$. (Kui $s = 0$, siis $k = 2$, mis on võimatu; kui $t = 0$, siis $k = 0$, mis on samuti võimatu.)

Seega $2^{2s} = (k-1)^2 = k^2 - 2k + 1$ ja

$$2^t - 2^{2s} = (k^2 + k + 1) - (k^2 - 2k + 1) = 3k ,$$

mis annab vastuolu, sest $2^t - 2^{2s}$ on paarisarv ja $3k$ paaritu.

13. *Vastus:* $(3,2)$.

Ilmselt $m \neq n$. Kui $m > n$, siis võime kirjutada $m! = an$ ja $n! = bn$, kus a ja b on mingid positiivsed täisarvud. Nüüd

$$(n!)^{m!} - (m!)^{n!} = (bn)^{an} - (an)^{bn} = n^n \cdot K ,$$

kus K on mingi positiivne täisarv. Niisiis arv $28 = 2^2 \cdot 7$ jagub arvuga n^n, millest järeldub, et $n = 1$ või $n = 2$. Ilmselt $n \neq 1$; kui $n = 2$, siis saame võrrandi $2^k - k^2 = 28$, kus $k = m!$. Kui $k > 6$, siis on $2^k > k^2 + 28$; kontroll näitab, et $k \leqslant 6$ variantidest sobib ainult $k = 6$, kust $m = 3$. Seega üks lahend on $(m,n) = (3,2)$.

Kui $n > m$, siis analoogiliselt saame, et 28 jagub arvuga m^m. Niisiis $m = 1$ või $m = 2$. Kui $m = 1$, siis peaks olema $n! = 29$, mis pole võimalik; kui $m = 2$, siis $l^2 - 2^l = 28$, kus $l = n!$. Et aga $l^2 - 2^l \leqslant 0$ iga $l \geqslant 1$ korral, siis siit lahendeid juurde ei tule.

14. *Vastus:* jah.

Valime $a = 3t$, $b = -t$ ja $c = -2t$, siis $a + b + c = 0$. Et $a^{13} + b^{13} + c^{13} = t^{13}(3^{13} - 1 - 2^{13})$ oleks täisarvu ruut, võime valida näiteks $t = 3^{13} - 1 - 2^{13}$, siis $a^{13} + b^{13} + c^{13} = t^{14} = (t^7)^2$.

15. Tähistame jada k-nda liikme d_k, siis $d_k = 2^{2^{\cdots^2}}$ (kus avaldises on k kahte). Tõestame väite induktsiooniga n järgi. Kui $n = 2^s$, siis väite kehtivus on ilmne. Olgu nüüd $n > 2$, kus n ei ole arvu 2 aste, ja eeldame, et väide kehtib kõigi arvust n väiksemate naturaalarvude jaoks.

Kui n on paarisarv, siis valime $n = 2^m l$, kus $m \geqslant 1$ ja l on 1-st suurem paaritu arv. Arvude 2^m ja l jaoks väide kehtib: leiduvad indeksid k_1 ja k_2, nii et $d_k \equiv d_{k+1}$ mooduli 2^m järgi, kui $k \geqslant k_1$, ja $d_k \equiv d_{k+1}$ mooduli l järgi, kui $k \geqslant k_2$. Et arvud 2^m ja l on ühistegurita, siis $d_k \equiv d_{k+1}$ mooduli $2^m l = n$ järgi, kui $k \geqslant \max\{k_1, k_2\}$.

Kui n on paaritu arv, siis Euleri teoreemist saame, et $2^{\varphi(n)} \equiv 1$ mooduli n järgi (ja $\varphi(n) < n$). Induktiivse eelduse tõttu leidub selline indeks k_0, et $d_k \equiv d_{k+1}$ mooduli $\varphi(n)$ järgi, kui $k \geqslant k_0$. Niisiis võime kirjutada $d_k = m_k\varphi(n) + d_{k_0}$, kus $k \geqslant k_0$ ja m_k on mingid naturaalarvud. Nüüd

$$d_{k+1} = 2^{d_k} = 2^{m_k\varphi(n) + d_{k_0}} = (2^{\varphi(n)})^{m_k} \cdot 2^{d_{k_0}} \equiv 2^{d_{k_0}}$$

mooduli n järgi. See tähendab, kui $k \geqslant k_0 + 1$, siis kehtib $d_k \equiv 2^{d_{k_0}} \equiv d_{k+1}$ mooduli n järgi.

16. Tähistame mündid kergematest alates naturaalarvudega 1 kuni 5 ning olgu i-nda mündi mass m_i, siis $m_1 = m_2 < m_3 = m_4 = m_5$ (st 1 ja 2 on võltsmündid).

Ekspert võib esimesel kaalumisel võrrelda münte 1 ja 3 ja teisel kaalumisel mündipaare $\{2,3\}$ ja $\{4,5\}$. Kuna kohtunik teab, et mündid on kahe erineva raskusega, siis esimene kaalumine tõestab talle, et münt 1 on „kerge“ ja münt 3 „raske“. Teine kaalumine aga tõestab, et müntide 2 ja 3 hulgas on „raskeid“ vähem kui müntide 4 ja 5 hulgas — millest järeldub, et kuna münt 3 on „raske“, siis münt 2 on „kerge“ ja mündid 4 ja 5 mõlemad „rasked“. Kokkuvõttes on meil kaks „kerget“ (1 ja 2) ning kolm „rasket“ münti, mistõttu võltsmündid peavad olema 1 ja 2.

17. *Vastus:* $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$.

Nummerdame külad tagaotsitava liikumise suunas naturaalarvudega 1 kuni n.

Tehes haarangud järjest külades $1, 3, 5, \ldots, 2k-1, 2k$ (kui $n = 2k$) või $1, 3, 5, \ldots, 2k-1, 2k+1$ (kui $n = 2k+1$), saab politsei tagaotsitava igal juhul kätte. Tõepoolest, olgu tagaotsitav esimesel haarangupäeval m. külas. Kui $m \leqslant k$, siis saadakse ta kätte m. päeval, vastasel korral aga viimasel, $(k+1)$. haarangupäeval, mil ta on jõudnud viimasesse, n. külasse.

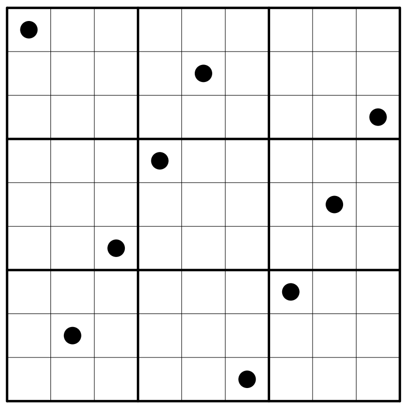
Näitame, et vähemast arvust päevadest ei piisa. Olgu $n = 2k$ või $n = 2k+1$ ja haarangupäevade arv ülimalt k. Olgu tagaotsitav esimesel päeval m. külas, kus $1 \leqslant m \leqslant k+1$ — siis igal i. päeval, kus $i = 1, \ldots, k$, on ta vastavalt $(m+i-1)$. külas. Igal haarangupäeval on niisiis $k+1$ võimalust tagaotsitava asukoha jaoks (vastavalt erinevatele m väärtustele) ning mistahes küla valik, kus haarang teha, tagab tema kättesaamise sel päeval ainult ülimalt ühe sellise m väärtuse korral. Et päevi on k ja erinevaid m väärtusi $k+1$, siis mistahes külade valiku korral leidub mingi m väärtus, mille korral ei saada tagaotsitavat kätte ühelgi päeval.

18. Olgu $m = k^2$, siis saame kogu istanduse jaotada m alaks, millest igaüks koosneb $k \times k$ ruudust. Näitame esmalt, et esimesel päeval koristatavad ruudud saab valida nii, et eri brigaadide ruudud on erinevates alades ja iga selline ruut paikneb vastava ala peadiagonaalil (st ala vasakut ülemist ja paremat alumist nurka ühendaval diagonaalil).

Tõepoolest, tähistame kõik alad naturaalarvudega 1 kuni k nii, nagu näidatud joonisel 5, ning valime iga ala peadiagonaalil vasakust ülanurgast arvates i-nda ruudu, kui see ala on tähistatud arvuga i. On lihtne veenduda, et niiviisi valitavad ruudud asuvad $m \times m$ ruudustiku erinevates ridades ja erinevates veergudes, nagu nõutud (joonisel 6 on näidatud $k = 3$ korral valitavad ruudud).

1	2	3	$\cdots$	$k-1$	k
k	1	2	$\cdots$	$k-2$	$k-1$
$k-1$	k	1	$\cdots$	$k-3$	$k-2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
3	4	5	$\cdots$	1	2
2	3	4	$\cdots$	k	1

Joonis 5

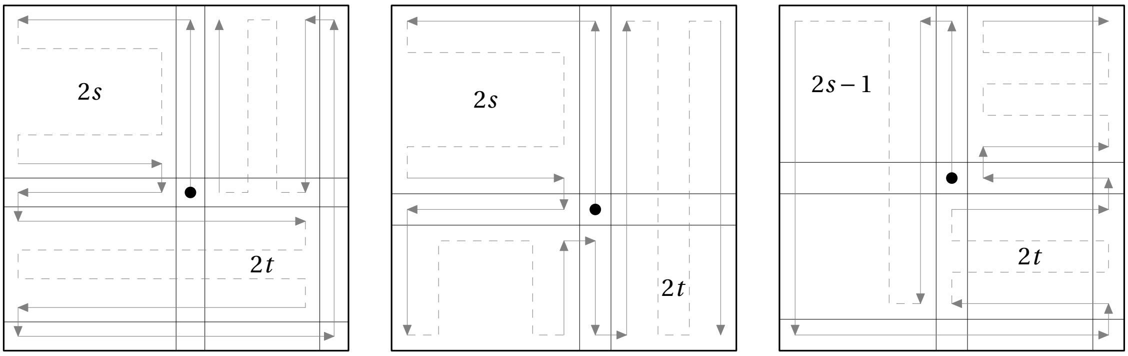


Joonis 6

Jääb üle näidata, et iga brigaad saab järgnevatel päevadel koristada kõik ruudud oma ala piires, st lähtudes $k \times k$ ruudustiku peadiagonaali mistahes ruudust on võimalik järjest läbi käia selle kõik ruudud, liikudes igal sammul mingist ruudust edasi sellega ühist külge omavasse ruutu. Olenevalt arvu k paarsusest ja paarituarvulise k korral ka lähteruudu asukohast diagonaalil saame siin kolm erinevat juhtu, mille jaoks sobivad läbimisjärjekorrad on näidatud joonisel 7.

19. *Vastus:* ei leidu.

Näitame, et mistahes käigul saab minister muuta *suvalise* veel kahesuunalise tee ühesuunaliseks nii, et jääb alles võimalus liikuda igast linnast igasse teise linna.



$k = 2(s+t+1)$ $\qquad$ $k = 2(s+t)+1, \quad i = 2s+1$ $\qquad$ $k = 2(s+t)+1, \quad i = 2s$

Joonis 7

Tõepoolest, olgu valitud tee t linnade a ja b vahel. Kui linnast a saab liikuda linna b (või linnast b linna a) ilma seda teed läbimata, siis võime muuta tee t ühesuunaliseks suunas $b \to a$ (või vastavalt $a \to b$). Niisiis piisab vaadelda juhtu, kus nii linnast a linna b kui ka vastupidi on võimalik liikuda ainult teed t kasutades (st otse), ja näidata, et see juht ei ole võimalik.

Olgu A kõigi nende linnade hulk, kuhu saab linnast a liikuda ilma teed t läbimata, ja B sarnane linnade hulk linna b jaoks. Et hulga A igast linnast peab saama liikuda linna b, siis vastavalt tehtud eeldusele peab see olema võimalik ainult teed t kasutades (muidu saaks ka linnast a linna b liikuda ilma seda teed kasutamata). Sellest aga järeldub, et hulga A igast linnast saab liikuda linna a ilma teed t kasutamata, ning järelikult saab ka hulga A piires mistahes linnast mistahes teise linna liikuda ilma seda teed kasutamata.

Samuti veendume, et hulga B piires saab mistahes linnast mistahes teise linna liikuda ilma teed t kasutamata. Järelikult hulgad A ja B ei lõiku (vastasel korral saaks nende ühisosasse kuuluva linna kaudu liikuda linnast a linna b ilma teed t kasutamata) ning iga Banaania linn kuulub ühte neist hulkadest (sest vastasel korral ei saaks sellesse linna ei linnast a ega linnast b liikuda ilma teed t kasutamata, millest järeldub, et emmast-kummast linnast ei saaks sinna üldse liikuda).

Et aga vastavalt ülesande tingimustele pidi enne teede ühesuunaliseks muutmist linnast a linna b pääsema ka ilma teed t kasutamata, siis peab veel mingi tee viima hulga A mingist linnast a' hulga B mingisse linna b'. Praeguseks on see tee võib-olla muudetud ühesuunaliseks, ent vähemalt ühes suunas saab teda pidi siiski liikuda — üldisust kitsendamata oletame, et see suund on $a' \to b'$. Siis aga saab linnast a linna b linnade a' ja b' kaudu liikuda ilma teed t kasutamata, mis on vastuolus tehtud eeldusega.

20. Paneme esmalt tähele, et kõik ärimehed saab jaotada 6 rühma nii, et ükski äripartnerite paar ei kuulu samasse rühma. Tõepoolest, määrame esimese ärimehe mingisse suvalisse rühma ning igal järgmisel sammul võtame suvalise veel paigutamata ärimehe ja määrame ta mistahes sellisesse rühma, mis erineb tema juba paigutatud äripartnerite rühmadest (selline rühm leidub, sest neid partnereid on ülimalt 5).

Vaatleme nüüd kõiki võimalusi jaotada need rühmad erakondade vahel nii, et kumbagi erakonda toetaks parajasti kolme rühma kuuluvad ärimehed. Selliseid võimalusi on kokku 10 (kombinatsioonide arv 6 elemendist 3 kaupa, jagatud 2-ga) ning on lihtne veenduda, et mistahes gruppide paar (ja järelikult ka mistahes äripartnerite paar) toetab üht ja sama erakonda 4 juhul neist 10-st, st 6 juhul 10-st toetavad nad erinevaid erakondi. Olgu äripartnerite paare k, siis loendades erinevaid erakondi toetavate äripartnerite paarid üle kõigi 10 võimaliku jaotuse, saame neid kokku $6k$. Niisiis leidub jaotus, mille korral selliseid paare on vähemalt $\frac{6k}{10} = \frac{3}{5}k$.