Тренировочное соревнование для “Балтийского пути 2010”

Тарту, 31. октября 2010

1. Найти действительные решения уравнения

$$\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{x+4}=0.$$

2. Пусть x, y, z такие положительные действительные числа, что $x+y+z=1$. Доказать, что

$$\sqrt{xy+z}+\sqrt{yz+x}+\sqrt{zx+y}\geqslant 1+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\,.$$

3. Найти все действительные числа x, при которых

$$x\cdot\Big\lfloor x\cdot\lfloor x\cdot\lfloor x\rfloor\rfloor\Big\rfloor=88\,.$$

(Здесь $\lfloor a\rfloor$ обозначает целую часть действительного числа a, то есть наибольшее целое число n такое, что $n\leqslant a$.)

4. Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases}\sin^2 x+\cos^2 y &= y^2\\ \sin^2 y+\cos^2 x &= x^2\end{cases}.$$

5. Каждый член последовательности целых чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ кроме a_0 задан соотношением

$$a_{n+1}=|a_n-\overline{a_n}|\,,$$

где $\overline{a_n}$ обозначает число, полученное при записи цифр числа a_n в обратном порядке (число $\overline{a_n}$ может начинаться и с цифры 0).

Найти наименьшее положительное целое число a_0, при котором ни один член этой последовательности не равен 0.

6. Середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC обозначены соответственно как L, M и N. Доказать, что $\angle LAC=\angle ABM$ тогда и только тогда, когда $\angle ANC=\angle ALB$.

7. На высоте равностороннего треугольника ABC, проведённой из вершины A на сторону BC, выбрана точка D. Выберем точку E так, чтобы E и B оказались по разные стороны прямой AD, а также $|AE|=|ED|=|BD|$. Найти величину угла CBE.

8. Точка A лежит вне окружности ω, описанной вокруг равностороннего треугольника PQR. Прямые AP, AQ и AR пересекают окружность ω еще раз соответственно в точках U, V и W. Доказать, что значение выражения

$$\frac{|AP|}{|AU|}+\frac{|AQ|}{|AV|}+\frac{|AR|}{|AW|}$$

зависит только от расстояния между точкой A и центром окружности ω и не зависит от её расположения относительно вершин P, Q и R.

9. Дан выпуклый n-угольник такой, что любые его четыре вершины не лежат на одной окружности. Треугольник, вершинами которого являются какие-то три вершины данного n-угольника, будем называть *плотным*, если все оставшиеся $n-3$ вершины лежат внутри его описанной окружности, и *разреженным*, если все оставшиеся $n-3$ вершины лежат вне его описанной окружности.

Доказать, что плотных треугольников столько же, сколько и разреженных.

10. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка P лежит на дуге BC описанной окружности этого треугольника, не содержащей точку A, причём AP не является диаметром. Прямая, параллельная прямой BP и проходящая через точку A, пересекает прямую CH в точке Q, а прямая, параллельная прямой CP и проходящая через точку A, пересекает прямую BH в точке R. Доказать, что прямые QR и AP параллельны.

11. Доказать, что если для положительных целых чисел a, b, c и d выполняется $ab = cd$, то число $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ составное.

12. Последовательность целых чисел (F_n) задана формулой $F_n = 2^{2^n} + 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Доказать, что ни один член этой последовательности не является кубом целого числа.

13. Найти все пары положительных целых чисел (m, n), при которых имеет место равенство $(n!)^{m!} - (m!)^{n!} = 28$.

14. Существуют ли такие три различных и отличных от нуля целых числа a, b и c, что $a + b + c = 0$, а число $a^{13} + b^{13} + c^{13}$ является квадратом целого числа?

15. Пусть n натуральное число, $n \geqslant 2$. Доказать, что, начиная с какого-то её члена, все члены последовательности

$$2, \quad 2^2, \quad 2^{2^2}, \quad 2^{2^{2^2}}, \ldots$$

дают один и тот же остаток при делении на n.

16. На судебном процессе в Банании в виде вещественных доказательств фигурируют 5 на вид одинаковых монет, 2 из которых подделаны. Судья уже знает, что подлинные монеты одинакового веса, а поддельных монет ровно две, они имеют также одинаковый вес и отличаются по весу от подлинных монет. Эксперт знает точно, которые монеты поддельные, а также то, что они легче подлинных.

Показать, что с помощью двух взвешиваний эксперт может доказать судье, что именно эти две монеты подделаны. (При каждом взвешивании на обе чаши весов можно положить одну или несколько монет и убедиться, что эти множества монет весят одинаково, или узнать, которое из них тяжелее.)

17. Полиция Банании начинает ловить беглеца, который бежит по горной дороге в одну сторону от деревни к деревне. Полиция знает, что беглец каждую ночь бежит в следующую деревню и скрывается там целый день. Прибывая в последнюю n-ую деревню, где дорога кончается, он остается там. Неизвестно, в какой деревне уже находится беглец на момент начала операции. Полиция хочет поймать беглеца как можно быстрее, но каждый день она может выбрать только одну деревню, в которой сделает облаву. Если беглец в этот день находится в этой деревне, то его поймают.

Найти наименьшее количество дней, за которое полиция обязательно сможет поймать беглеца.

18. На главной плантации Банании, которая состоит из $m \times m$ одинаковых квадратов, начинается уборка бананов. В первый день каждая из m бригад убирает один квадрат, причём эти m квадратов должны быть расположены на разных рядах и разных столбцах поля. В каждый следующий день каждая бригада убирает такой еще не убранный квадрат, который имеет общую сторону с квадратом, убранным ей в предыдущий день; если такого нет, то бригада заканчивает работу. Если на один квадрат претендуют несколько бригад, то бросается жребий.

Доказать, что если m - квадрат целого числа, то можно выбрать квадраты, убираемый в первый и во все последующие дни так, что за m дней все бананы на поле будут убраны.

19. Города Банании соединены между собой двухсторонними дорогами (каждая дорога соединяет какие-то два города, не проходит через остальные города и не пересекает других дорог). По этим дорогам из каждого города возможно попасть в любой другой, причем эта возможность остается даже в том случае, если перекрыть движение по одной произвольной дороге.

В ходе борьбы за власть министр дорог и министр транспорта по очереди превращают дороги в односторонние: на своём ходу министр приказывает сделать односторонней ровно одну из двухсторонних дорог. Тот министр, в результате хода которого, из какого-либо города больше нельзя будет попасть в какой-либо другой город, проигрывает и будет вынужден подать в отставку.

Найдется ли у одного из министров стратегия, с помощью которой он может заставить противника подать в отставку?

20. У каждого бизнесмена Банании есть не более 5 деловых партнёров. Чтобы дело шло лучше, бизнесмены решают поддерживать две наиболее влиятельные партии так, что каждый бизнесмен должен будет поддерживать ровно одну из этих двух партий.

Доказать, что бизнесмены могут выбрать свои партии так, что по крайней мере $\frac{3}{5}$ пар деловых партнёров будут такие, что партнёры в этой паре будут поддерживать разные партии.