Treeningvõistlus “Balti tee 2009” võistkonnale

Tartus 25. oktoobril 2009

1. Nelinurga $ABCD$ diagonaal BD jaotab nelinurga teravnurkseks kolmnurgaks ABD ja võrdkülgseks kolmnurgaks BCD. Olgu O kolmnurga ABD ümberringjoone keskpunkt. Tõesta, et $AB \perp BC$ parajasti siis, kui $\triangle ABD \cong \triangle OCD$.

2. On antud teravnurkne kolmnurk ABC. Punkt E asub võrreldes punktiga B teisel pool sirget AC ja punkt D asub lõigul AE, kusjuures kolmnurgad ABD ja CED on sarnased. Tõesta, et $\angle ABE + \angle ACE = 180°$.

3. Kolmnurga ABC tippudest A, B ja C tõmmatud nurgapoolitajad lõikavad kolmnurga ümberringjoont vastavalt punktides P, Q ja R. Tõesta võrratus
$$|AP| + |BQ| + |CR| > |AB| + |BC| + |CA|.$$

4. Tasandil on antud lõplik hulk sirglõike kogupikkusega 2009. Tõesta, et selle tasandi iga punkti P jaoks leidub samal tasandil selline sirge l, et punkti P kaugus sirgest l pole suurem kui 720 ja l ei oma ühegi antud lõiguga ühiseid punkte.

5. Kolmnurga ABC mediaanil CD võetakse punkt E. Ringjoon $\mathscr{C}_1$ läbib punkti E ja puutub sirget AB punktis A ning ringjoon $\mathscr{C}_2$ läbib punkti E ja puutub sirget AB punktis B. Ringjooned $\mathscr{C}_1$ ja $\mathscr{C}_2$ lõikavad sirgeid AC ja BC teistkordselt vastavalt punktides M ja N. Tõesta, et puutujad, mis on ringjoontele $\mathscr{C}_1$ ja $\mathscr{C}_2$ tõmmatud vastavalt punktides M ja N, lõikuvad sirgel CD.

6. Mängijad A ja B seisavad ringjoonel koos 2009 teise mängijaga, kusjuures A ja B ei seisa kõrvuti. Igal oma käigul peavad A ja B täpselt ühe oma naabritest mängust välja saatma; ülejäänud mängijad käike ei tee. Mängijad A ja B käivad kordamööda, alustab A. See, kumb neist esimesena mängust välja läheb, on kaotaja. Kumb võidab teise suvalise strateegia korral?

7. Rahvusvahelisel konverentsil on 1985 osalejat. Iga kolmeliikmelise osavõtjate grupi seas leidub vähemalt kaks inimest, kes oskavad ühist keelt, aga ükski osalejatest ei räägi üle viie keele. Tõesta, et leidub vähemalt 200 konverentsist osavõtjat, kes kõnelevad sama keelt.

8. On antud $n \times n$ ruudustik $(n > 1)$. Mitu võimalust on paigutada ruudustikku $2n - 2$ nuppu nii, et ükski kaks neist ei asuks samal diagonaalil? (Ütleme, et kaks nuppu asuvad samal diagonaalil, kui nad asuvad samal ruudul või nende asukoharuutude keskpunkte ühendav sirge on paralleelne suure ruudu ühe diagonaaliga.)

9. Ühikruut jagatakse $n > 1$ ristkülikuks, mille küljed on paralleelsed antud ruudu külgedega. On teada, et iga sirge, mis on paralleelne antud ruudu mõne küljega ning lõikab selle ruudu sisepiirkonda, lõikab ka mõne jaotusse kuuluva ristküliku sisepiirkonda. Tõesta, et jaotuses leidub ristkülik, mille ükski külg ei asu algse ruudu küljel.

10. 100×100 ruudustikust on lõigatud välja 2×2 ruut. Kas ülejäänud osa saab jagada 1×3 ristkülikuteks, kui 2×2 ruut on välja lõigatud suure ruudu

   a) keskelt?

   b) nurgast?

11. Reaalarvuliste kordajatega ruutpolünoomil ei ole reaalarvulisi juuri ning kordajate summa on negatiivne. Tõesta, et ka vabaliige on negatiivne.

12. Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis rahuldavad järgmist kahte tingimust:

   a) $f(u) \geqslant 0$ kõigi reaalarvude u korral;

   b) $f(2u) = f(u+v)f(-u+v) + f(u-v)f(-u-v)$ kõigi reaalarvude u, v korral.

13. Tõesta, et kui x ja y on reaalarvud lõigult $[0, \frac{\pi}{2}]$, siis kehtib võrratus

$$\cos x + \cos y + |\cos(x+y)| \geqslant 1.$$

14. Olgu a, b ja c paarikaupa erinevad reaalarvud ning A, B ja C mingi reaalarvuliste kordajatega polünoomi $P(x)$ väärtused vastavalt kohtadel a, b, c. Leia jääk, mis tekib polünoomi $P(x)$ jagamisel polünoomiga $(x-a)(x-b)(x-c)$.

15. Olgu a, b ja c positiivsed reaalarvud, mille korral $a+b+c=1$. Tõesta võrratus

$$\sqrt{a^{1-a}b^{1-b}c^{1-c}} \leqslant \frac{1}{3}.$$

16. Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille korral n-st väiksemate temaga ühistegurita arvude summa on algarv.

17. Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille korral arv $8^n + n$ jagub arvuga $2^n + n$.

18. Iga positiivse täisarvu n korral olgu $f(n)$ vähim positiivne täisarv, millega n ei jagu. Tõesta, et suvalise n korral on vähemalt üks arvudest $f(n)$, $f(f(n))$, $f(f(f(n)))$ võrdne 2-ga.

19. Olgu a täisarv, $a > 1$. Tõesta, et iga positiivse täisarvu n korral jagub arv

$$n \cdot (2n+1) \cdot (3n+1) \cdot \ldots \cdot (an+1)$$

kõigi a-st väiksemate algarvudega.

20. Olgu n, a, b sellised positiivsed täisarvud, et

$$\frac{1}{\text{SÜT}(a,b)} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{n}{\text{VÜK}(a,b)}.$$

Tõesta, et n on paaritu.