Тренировочное соревнование для команды “Балтийского пути 2009”

Тарту, 25 октября 2009

1. Диагональ BD четырёхугольника $ABCD$ делит его на остроугольный треугольник ABD и равносторонний треугольник BCD. Пусть O − центр описанной окружности треугольника ABD. Доказать, что $AB \perp BC$ тогда и только тогда, когда $\triangle ABD \cong \triangle OCD$.

2. Дан остроугольный треугольник ABC. Точка E находится относительно точки B по другую сторону прямой AC, а точка D находится на отрезке AE, причём треугольники ABD и CED подобны. Доказать, что $\angle ABE + \angle ACE = 180^\circ$.

3. Биссектрисы углов A, B и C треугольника ABC пересекают описанную окружность треугольника соответственно в точках P, Q и R. Доказать неравенство
$$|AP| + |BQ| + |CR| > |AB| + |BC| + |CA| .$$

4. На плоскости дано конечное множество отрезков общей длиной 2009. Доказать, что для каждой точки P этой плоскости найдётся на этой плоскости прямая l, не имеющая ни с одним из данных отрезков общих точек, и расстояние до которой от точки P не превышает 720.

5. На медиане CD треугольника ABC берут точку E. Окружность $\mathscr{C}_1$ проходит через точку E и касается прямой AB в точке A, окружность $\mathscr{C}_2$ проходит через точку E и касается прямой AB в точке B. Окружности $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_2$ пересекают прямые AC и BC второй раз соответственно в точках M и N. Доказать, что касательные к окружностям $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_2$, проведённые соответственно через точки M и N, пересекаются на прямой CD.

6. Игроки A и B стоят на окружности с 2009 другими игроками, причём A и B не стоят рядом. При каждом своём ходе A и B должны удалить из игры одного из своих соседей; остальные игроки при этом ходов не совершают. Игроки A и B ходят по очереди, начинает A. Тот, кто из них первым покинет игру, проигрывает. Кто выиграет при произвольной стратегии другого игрока?

7. На международной конференции 1985 участников. Среди каждых трёх участников найдутся по крайней мере двое, которые знают один и тот же язык, но ни один из участников не говорит более чем на пяти языках. Доказать, что найдутся по крайней мере 200 участников конференции, говорящих на одном и том же языке.

8. Дано клетчатое поле $n \times n$, где $n > 1$. Сколькими способами можно расставить $2n - 2$ фишек так, чтобы никакие две из них не находились на одной диагонали? (две фишки находятся на одной диагонали, если они расположены на одной и той же клетке, или если прямая, соединяющая центры клеток, на которых они расположены, параллельна одной из диагоналей большого квадрата).

9. Единичный квадрат делят на $n > 1$ прямоугольников, стороны которых параллельны сторонам единичного квадрата. Известно, что каждая прямая, которая параллельна какой-то стороне единичного квадрата и пересекает его внутреннюю область, пересекает также внутреннюю область какого-то прямоугольника. Доказать, что найдётся прямоугольник, ни одна сторона которого не находится на стороне изначального квадрата.

10. Из клетчатого поля 100×100 вырезан квадрат 2×2. Можно ли оставшуюся часть разрезать на прямоугольники 1×3, если квадрат 2×2 вырезан из

а) центра клетчатого поля?

б) угла клетчатого поля?

11. У квадратного многочлена с действительными коэффициентами нет действительных корней, а сумма коэффициентов отрицательна. Доказать, что и свободный член отрицателен.

12. Найти все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие следующим двум условиям:

а) $f(u) \geqslant 0$ при всех действительных числах u;

б) $f(2u) = f(u+v)f(-u+v) + f(u-v)f(-u-v)$ при всех действительных числах u, v.

13. Доказать, что если x и y − действительные числа из отрезка $[0, \frac{\pi}{2}]$, то выполняется неравенство

$$\cos x + \cos y + |\cos(x+y)| \geqslant 1.$$

14. Пусть a, b и c − попарно различные действительные числа, а A, B и C − значения некоторого многочлена $P(x)$ с действительными коэффициентами соответственно при значениях переменной a, b и c. Найти остаток, который образуется при делении многочлена $P(x)$ на многочлен $(x-a)(x-b)(x-c)$.

15. Пусть a, b и c − положительные действительные числа, при которых $a+b+c=1$. Доказать неравенство

$$\sqrt{a^{1-a}b^{1-b}c^{1-c}} \leqslant \frac{1}{3}.$$

16. Найти все положительные целые числа n, при которых сумма чисел, меньших n и взаимно простых с n, является простым числом.

17. Найти все положительные целые числа n, при которых число $8^n + n$ делится на число $2^n + n$.

18. Для каждого положительного целого числа n пусть $f(n)$ обозначает наименьшее положительное целое число, на которое n не делится. Доказать, что при любом n по меньшей мере одно из чисел $f(n)$, $f(f(n))$, $f(f(f(n)))$ равно 2.

19. Пусть a − целое число, $a > 1$. Доказать, что при любом положительном целом n число

$$n \cdot (2n+1) \cdot (3n+1) \ldots \cdot (an+1)$$

делится на все простые числа, меньшие a.

20. Пусть n, a, b − такие положительные целые числа, что

$$\frac{1}{\text{НОД}(a,b)} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{n}{\text{НОК}(a,b)}.$$

Доказать, что n нечётно.