Treeningvõistlus “Balti tee 2008” võistkonnale

Tartus, 2. novembril 2008

1. Maleturniiril võistlevad kolm 10-liikmelist võistkonda. Iga mängija mängib parajasti ühe partii kummagi vastasvõistkonna iga mängijaga, st. kokku 20 partiid. Tõesta, et kui turniiril on ühtekokku mängitud 201 partiid, siis leiduvad kolm niisugust mängijat, kellest igaüks on juba kohtunud mõlema ülejäänuga.

2. Olgu A ja O ühikkuubi ühe tahu kaks vastastippu. Nimetame *teeks pikkusega* n järjendit $X_0X_1\ldots X_n$, kus X_i on ühikkuubi tipud ning iga i korral X_iX_{i+1} on ühikkuubi serv.

   Kumba liiki teid on pikkusega 2008 teede hulgas rohkem: kas neid, mille algus- ja lõpp-punkt on mõlemad tipus A, või neid, mille alguspunkt on tipus A ja lõpp-punkt tipus O?

3. Kaks mängijat asetavad kordamööda nuppe 2008×2008 mängulauale. Igal käigul peab mängija asetama ühe nupu mingi veel tühja ruudu keskele. Võidab mängija, kelle käigu järel tekib esmakordselt seis, kus neli nuppu on sellise võrdhaarse trapetsi (aga mitte ristküliku) tippudes, mille alused on paralleelsed mängulaua külgedega.

   Kummal mängijal on võitev strateegia?

4. Mõõtmetega $n \times n$ ruudustiku igasse ruutu kirjutatakse arv 1 või -1. Olgu a_i ruudustiku i. reas asuvate arvude korrutis ja b_j ruudustiku j. veerus asuvate arvude korrutis, kus $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Milliste n korral on võimalik kirjutada arvud ruudustikku nii, et

   $$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + b_1 + b_2 + \ldots + b_n = 0\ ?$$

5. Vaatleme linna territooriumi horisontaalse tasandina ja hooneid vertikaalsete sirglõikudena, mille alumine otspunkt on sellel tasandil. Ütleme, et üks hoone *domineerib* teise üle, kui ta on teisest kõrgem ning neile vastavate lõikude ülemisi otspunkte läbiv sirge lõikab tasandit suurema kui 45° nurga all.

   Tõesta, et kui linnas on lõplik arv hooneid ning ükski neist ei domineeri ühegi teise üle, siis saab mistahes etteantud kohta ehitatava uue hoone kõrguse valida nii, et endiselt ükski hoone ei domineeriks ühegi teise üle.

6. Olgu M täisnurkse kolmnurga ABC hüpotenuusi AB keskpunkt ning D selline punkt kaatetil AC, et $|CD| = |CM|$. Olgu P kolmnurkade AMC ja ADB ümberringjoonte teine lõikepunkt. Tõesta, et punkt P asub nurga BAC poolitajal.

7. Olgu $ABCDE$ kumer viisnurk, kusjuures K, L, M ja N on vastavalt lõikude AB, BC, CD ja DE keskpunktid. Olgu P ja Q vastavalt lõikude KM ja LN keskpunktid. Tõesta, et PQ ja AE on paralleelsed ning $|AE| = 4|PQ|$.

8. Ringjooned c_1 ja c_2 puutuvad teineteist väliselt punktis P. Olgu A suvaline punktist P erinev punkt ringjoonel c_1 ning M ja M' punktist A ringjoonele c_2 tõmmatud puutujate puutepunktid ringjoonega c_2. Lõigaku sirged AM ja AM' ringjoont c_1 teistkordselt vastavalt punktides N ja N'. Tõesta, et $|PN| \cdot |M'N'| = |PN'| \cdot |MN|$.

9. Ütleme, et hulknurk P on *moondatav* hulknurgaks Q, kui Q on hulknurgast P saadav järgmiste toimingute tulemusena:
   - lõikame hulknurga P sirgjooneliste lõigetega tükkideks;
   - nihutame neid tükke (pöörata ega ümber pöörata ei tohi);
   - kleebime tükid uues asendis servipidi kokku (tükid ei tohi üksteist osaliselt ega täielikult katta).

   Tõesta, et:

   a) mistahes kaks võrdse pindalaga ristkülikut on teineteiseks moondatavad;

   b) kaks kolmnurka on teineteiseks moondatavad ainult siis, kui nad on võrdsed ja üksteisest saadavad nihutamise teel.

10. Teravnurkses kolmnurgas ABC on $|AC| > |AB|$. Valime külgedel AC ja AB vastavalt punktid D ja E nii, et $|CD| = |BE|$. Olgu F lõikude BD ja CE lõikepunkt ning G selline punkt küljel AC, et sirge GF on paralleelne nurga BAC poolitajaga. Tõesta, et $|CG| = |AB|$.

11. Olgu n selline positiivne täisarv, et $5n+1$ on täisarvu ruut. Tõesta, et arv $n+1$ on esitatav viie liidetava summana, millest igaüks on mingi täisarvu ruut.

12. Kas leiduvad sellised positiivsed täisarvud a ja b, mille korral arvud a^4+1 ja b^2-1 kumbki ei jagu 39-ga, ent arv $(a^4+1)(b^2-1)$ jagub 39-ga?

13. Täisarvu n korral tähistagu $\delta(n)$ arvu $|n|$ kahendesituse numbrite arvu. Tõesta, et mistahes täisarvude a ja b korral, kus $b \neq 0$ ning a ei jagu arvuga b, leiduvad sellised täisarvud q ja r, et $a = qb + r$ ning $\delta(r) < \delta(b)$.

14. Leia kõik algarvud p, mille korral polünoomil

$$q(x) = 2x^3 - 2px^2 + (1-p)x + p$$

on vähemalt üks ratsionaalarvuline nullkoht.

15. Milline on arvu $n = (p^2-1)(p^2-4)+9$ vähim võimalik numbrite summa, kui p on algarv? Milliste algarvude p korral see vähim summa esineb?

16. Leia kõik sellised positiivsete reaalarvude paarid (x, y), mis rahuldavad tingimusi $x^{x+y} = y^{x-y}$ ja $x^2 \cdot y = 1$.

17. Jada (x_n) on määratud järgmiste tingimustega:

$$x_1 = \frac{1}{2}, \qquad x_{k+1} = x_k^2 + x_k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Leia arvu

$$\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \cdots + \frac{1}{x_{2008}+1}$$

täisosa.

18. Olgu n positiivne täisarv ja $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ täisarvuliste kordajatega polünoom, millel on (kordsusi arvestades) n reaalarvulist nullkohta, mis kõik asuvad vahemikus $(0, 1)$. Tõesta, et $|a_n| \geqslant 2^n$ ning leia kõik sellised polünoomid, mille korral $|a_n| = 2^n$.

19. Olgu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktsioon, mis rahuldab mistahes reaalarvude x ja y korral tingimust

$$\left| f(x+y) - f(x) - f(y) \right| < 1 .$$

Tõesta, et $\left| f\left(\frac{x}{2008}\right) - \frac{f(x)}{2008} \right| < 1$ iga reaalarvu x korral.

20. Olgu $x_1, \ldots, x_n$ sellised arvud vahemikust $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, et

$$\tan x_1 \cdot \tan x_2 \cdot \ldots \cdot \tan x_n = \cos x_1 \cdot \cos x_2 \cdot \ldots \cdot \cos x_n .$$

Leia avaldise $\sin x_1 \cdot \sin x_2 \cdot \ldots \cdot \sin x_n$ suurim võimalik väärtus.