Treeningvõistlus “Balti tee 2008” võistkonnale

Tartus, 2. novembril 2008

Vastused ja lahendused

1. Kokku mängitakse turniiril $3 \cdot 10^2 = 300$ partiid, seega pärast 201 mängitud partiid on 99 eri võistkondadest pärit mängijate paari, kes pole omavahel mänginud.

   Oletame, et ülesandes nõutud kolme mängijat ei leidu. Siis iga erinevatesse võistkondadesse kuuluvate mängijate kolmik (neid kolmikuid on $10^3 = 1000$) sisaldab sellist mängijate paari, kes pole omavahel mänginud. Et iga selline paar osaleb 10 kolmikus, siis peaks neid paare olema vähemalt 100.

2. *Vastus:* rohkem on teid, mille mõlemad otspunktid on tipus A.

   Lahendus. Olgu a_n pikkusega n teede arv, mille algus ja lõpp on ühes fikseeritud tipus, ning b_n pikkusega n teede arv, mille algus ja lõpp on kahes fikseeritud tipus, mis on kuubi ühe tahu vastastipud. Ilmselt $a_0 = 1$ ja $b_0 = 0$.

   Vaatame nüüd, kus saab tee $X_0 X_1 \ldots X_n$ korral olla tipp X_{n-2}. On kaks põhimõtteliselt erinevat võimalust: kas $X_{n-2} = X_n$ või X_{n-2} ja X_n on kuubi mingi tahu vastastipud (mis annab kolm võimalust tipu X_{n-2} valikuks). Sellest lähtudes saame rekurrentsed seosed:

   $$a_n = 3a_{n-2} + 2(b_{n-2} + b_{n-2} + b_{n-2})$$

   ja

   $$b_n = 3b_{n-2} + 2(a_{n-2} + b_{n-2} + b_{n-2})$$

   kust $a_n - b_n = a_{n-2} - b_{n-2}$. Seega $a_{2008} - b_{2008} = a_2 - b_2 = 1$.

3. *Vastus:* teisena käival mängijal.

   Lahendus. Võitev strateegia on järgmine: kui leidub käik, mis tekitab nõutava võrdhaarse trapetsi, siis teha see võitev käik; vastasel korral käia alustaja viimase käiguga laua vertikaaltelje suhtes sümmeetriliselt.

   Näitame, et alustaja ei saa võita, kui tema vastane mängib sellise strateegia järgi. Oletame, et alustaja käigu järel ruudule a_0 tekib võrdhaarne trapets $a_0 a_1 a_2 a_3$. Olgu b_0, b_1, b_2 ja b_3 ruutudega a_0, a_1, a_2 ja a_3 laua vertikaaltelje suhtes sümmeetrilised ruudud. Siis alustaja võitva käigu eel on ruutudel a_1, a_2, a_3 ja b_1, b_2, b_3 nupud ning ruudud a_0 ja b_0 on tühjad. Kuna 2008 on paarisarv, siis $b_i \neq a_i$. Kui oleks $b_i = a_j$, siis ka $b_j = a_i$ ning $b_k = a_l$ ja $b_l = a_k$, kus indeksid i, j, k, l on 0, 1, 2, 3 mingis järjekorras — vastuolu.

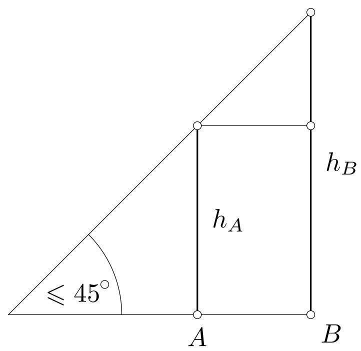
   Seega on ruudud a_0, a_1, a_2, a_3 ja b_0, b_1, b_2, b_3 kõik erinevad. Kuna alustaja vaadeldava käigu eel on ruutudel a_1, a_2, a_3 ja b_1, b_2, b_3 nupud, siis vähemalt ühel neist kolmikutest olid nupud juba vastase viimase käigu eel, st. vastasel oli võimalus teha võitev käik.

4. *Vastus:* parajasti siis, kui n on paarisarv.

   Lahendus. Kui n on paarisarv, siis kirjutame ühte veergu arvud -1 ja kõigisse ülejäänud ruutudesse arvud 1. Siis $a_i = -1$ ja $b_i = 1$ iga i korral ning nende summa on 0.

   Olgu nüüd n paaritu. Iga korrutis a_i ja b_j on kas 1 või -1. Olgu korrutiste a_i hulgas s korrutist -1 ja korrutiste b_j hulgas t korrutist -1. Oletame, et kõigi a_i ja b_j kogusumma on 0, siis peab korrutiste -1 arv s kõigi a_i hulgas olema võrdne korrutiste 1 arvuga $n - t$ kõigi b_j hulgas ning korrutiste -1 arv a_i ja b_j hulgas kokku peab olema $s + t = n$, st. paaritu arv. Teisalt aga on nii s kui ka t sama paarsusega nagu arvude -1 koguarv ruudustikus — vastuolu.

5. Tähistagu h_X maapinna punktis X paikneva hoone kõrgust (tähistame seda hoonet ennast samuti tähega X). Siis tingimus, et ükski hoone ei domineeri ühegi teise üle, tähendab, et mistahes kahe hoone A ja B korral on $|h_A - h_B| \leqslant |AB|$ (joonis 1).



Joonis 1

Ehitatagu uus hoone mingisse punkti P: näitame, et sellele leidub sobiv kõrgus $h > 0$, mis rahuldab tingimust $|h - h_X| \leqslant |XP|$ iga olemasoleva hoone X korral. Kuna hoonete arv on lõplik, siis leidub hoone A, mille korral $h_A + |AP| = \min\{h_X + |XP|\}$ Olgu nüüd $h = h_A + |AP|$, siis $h - h_X \leqslant |XP|$ iga X korral. Jääb üle näidata, et ka $h_X - h \leqslant |XP|$ iga X korral. Oletame vastuväiteliselt, et mingi hoone B korral $h_B - h > |BP|$, st. $h < h_B - |BP|$. Siis aga

$$h_A + |AP| = h < h_B - |BP| \ ,$$

kust

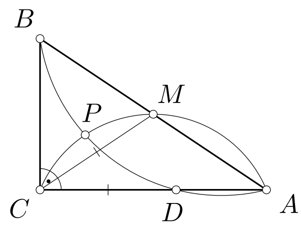
$$h_B - h_A > |AP| + |BP| \geqslant |AB| \ ,$$

mis on vastuolus ülesande tingimustega.

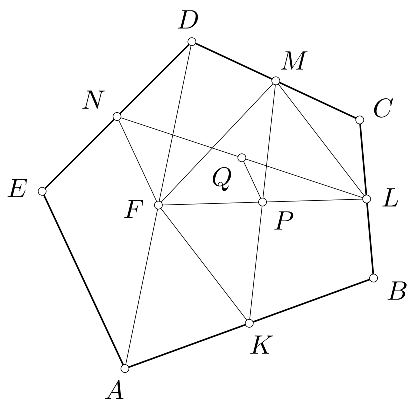
6. Kuna $ADPB$ on kõõlnelinurk, siis $\angle PBA = \pi - \angle PDA = \angle PDC$ (joonis 2). Kuna $AMPC$ on kõõlnelinurk, siis $\angle PCA = \pi - \angle PMA = \angle PMB$. Et lisaks $|CD| = |CM| = |BM|$, siis kolmnurgad BPM ja DPC on kongruentsed. Seega on nende kõrgused võrdsed, ehk punkt P asub võrdsel kaugusel nurga BAC haaradest.

7. Olgu F lõigu AD keskpunkt (joonis 3). Nelinurk $KFML$ on rööpkülik, sest $KF \parallel BD \parallel LM$ ning $KL \parallel AC \parallel FM$. Et rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteise, siis diagonaali KM keskpunkt P on ühtlasi ka diagonaali LF keskpunkt. Kolmnurgast LFN saame nüüd, et $PQ \parallel FN$ ja $|PQ| = \frac{1}{2} \cdot |FN|$. Analoogiliselt saame kolmnurgast ADE, et $FN \parallel AE$ ja $|FN| = \frac{1}{2} \cdot |AE|$. Kokkuvõttes $PQ \parallel AE$ ja $|PQ| = \frac{1}{4} \cdot |AE|$.

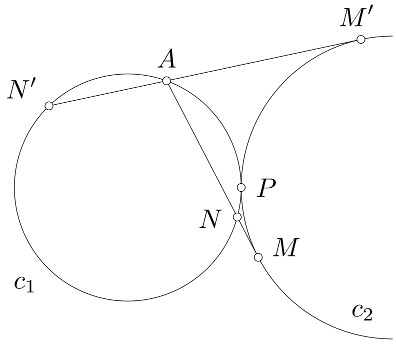
8. Olgu ringjoonte c_1 ja c_2 raadiused vastavalt R_1 ja R_2 (joonis 4). Homoteetia keskpunktiga P ja teguriga $k = -\frac{R_2}{R_1}$ viib ringjoone c_1 ringjooneks c_2. Olgu Q ja Q' vastavalt punktide N ja N' kujutised selle homoteetia korral.



Joonis 2



Joonis 3



Joonis 4

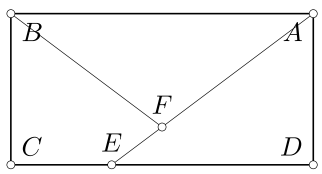
Et $|PQ| = -k \cdot |NP|$, siis $|NQ| = (1-k) \cdot |NP|$ ja $|NM|^2 = |NP| \cdot |NQ| = (1-k) \cdot |NP|^2$, kust $|NM| = \sqrt{1-k} \cdot |NP|$. Analoogiliselt $|N'M'| = \sqrt{1-k} \cdot |N'P|$ ning seega

$$\frac{|NM|}{|NP|} = \sqrt{1-k} = \frac{|N'M'|}{|N'P|} \,,$$

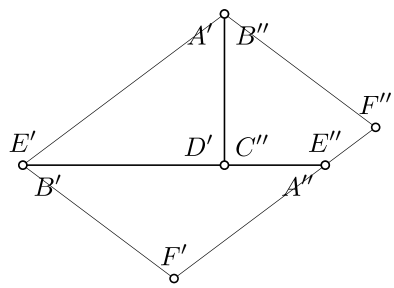
mis on samaväärne tõestatava võrdusega.

9. a) Näitame, et mistahes ristküliku $ABCD$, kus $|AB| > |AD|$ (joonis 5), saab moondada temaga võrdpindseks ristkülikuks, mille pikem külg on lühem ristküliku $ABCD$ pikemast küljest. Selleks valime küljel CD mingi punkti E ja teeme lõike AE, saades tulemuseks kolmnurga $A'E'D$ ja nelinurga $A''BCE''$; seejärel valime nelinurga $A''BCE''$ küljel $A''E''$ mingi punkti F ja teeme lõike BF, saades tulemuseks kolmnurga $A''B'F'$ ja nelinurga $F''B''CE''$. Nüüd kleebime esmalt kokku kolmnurga $A'E'D$ külje $A'D$ nelinurga $F''B''CE''$ küljega $B''C$ ning saadud nelinurga $F''A'E'E''$ külje $E'E''$ kleebime seejärel kokku kolmnurga $A''B'F'$ küljega $B'A''$. Tulemuseks on rööpkülik $F''A'B'F'$ pikema külje pikkusega $|F''A'| = |B'F'| = |BF| < |AB|$ (joonis 6). Lõpuks saame ühe ilmse lõike ja kleepimisega moondada selle rööpküliku sama pika pikema küljega ristkülikuks.

Kui ühest kirjeldatud sammust ei piisa, siis saame uue ristküliku omakorda moondada sellega võrdpindseks ristkülikuks, mille pikem külg on veel lühem, jne, kuni ruuduni välja.



Joonis 5



Joonis 6

b) Vaatleme hulknurga külgi vektoritena, mille summa on nullvektor. Fikseerime mistahes sirge ja paneme tähele, et vaadeldavad operatsioonid säilitavad selle sirgega paraleelsete küljevektorite summa (jättes muud küljevektorid kõrvale). Tõepoolest, lõikel kas ei muutu midagi või tuleb juurde kaks antud sirgega paralleelset vektorit, mille summa on nullvektor; kleepimisel kas ei muutu midagi või kaovad ära kaks antud sirgega paralleelset vektorit, mille summa on nullvektor; nihutamisel ei muutu midagi.

Seega peab kahe teineteiseks moondatava kolmnurga korral ühe kolmnurga igale küljele vastama samasihiline ja sama pikk külg teises kolmnurgas.

10. Olgu H sirgete FG ja AB lõikepunkt ning J nurga BAC poolitaja aluspunkt küljel BC (joonis 7). Kuna $FG \parallel AJ$, siis

$$\angle HGA = \angle GAJ = \angle BAJ = \angle AHG \,,$$

st. kolmnurk AHG on võrdhaarne ja $|AH| = |AG|$.

Rakendades Menelaose teoreemi kolmnurgale AEC ja sirgele GF saame, et

$$\frac{|AH|}{|HE|} \cdot \frac{|EF|}{|FC|} \cdot \frac{|CG|}{|GA|} = 1\,,$$

ning samast teoreemist kolmnurga AEC ja sirge BF jaoks saame, et

$$\frac{|AB|}{|BE|} \cdot \frac{|EF|}{|FC|} \cdot \frac{|CD|}{|DA|} = 1\,.$$

Et $|AH| = |AG|$ ja $|BE| = |CD|$, siis järeldame siit, et $\frac{|CG|}{|HE|} = \frac{|FC|}{|EF|} = \frac{|AB|}{|DA|}$, ehk

$$\frac{|CD| + |DG|}{|HA| + |AE|} = \frac{|AE| + |EB|}{|DG| + |GA|}\,,$$

kust $|AE|^2 + |AE| \cdot (|HA| + |EB|) = |DG|^2 + |DG| \cdot (|CD| + |GA|)$ (sest $|HA| \cdot |EB| = |GA| \cdot |CD|$). Et ka $|HA| + |EB| = |CD| + |GA|$, siis saame siit lihtsustades, et

$$(|AE| - |DG|) \cdot (|AE| + |DG| + |EB| + |HA|) = 0\,,$$

kust $|AE| = |DG|$ ja $|AB| = |AE| + |EB| = |DG| + |CD| = |CG|$.

11. Olgu $5n + 1 = m^2 \equiv 1 \pmod 5$. Siis $m = 5k \pm 1$ mingi k korral ning

$$n + 1 = \frac{m^2 + 4}{5} = \frac{(5k \pm 1)^2 + 4}{5} = 5k^2 \pm 2k + 1 = 4k^2 + (k \pm 1)^2\,,$$

mis annab nõutava esituse.

Märkus. Kui $n \neq 3$, siis on toodud esituses kõik liidetavad nullist erinevad. Juhul $n = 3$ on ainsad võimalikud esitused $4 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2$ ja $4 = 2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$, st. vähemalt üks liidetav on võrdne nulliga.

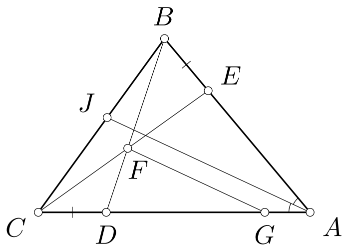
12. *Vastus:* ei.

Lahendus. Mistahes positiivse täisarvu neljas aste annab 3-ga jagamisel jäägi 0 või 1, seega $a^4 + 1 \equiv 1 \pmod 3$ või $a^4 + 1 \equiv 2 \pmod 3$. Niisiis selleks, et arv $(a^4 + 1)(b^2 - 1)$ jaguks 3-ga, peab $b^2 - 1$ jaguma 3-ga. Kuna $b^2 - 1$ ei jagu 39-ga, siis peab arv $a^4 + 1$ jaguma 13-ga.

Lihtne on aga kontrollida, et mistahes positiivse täisarvu a korral arv $a^4 + 1$ annab 13-ga jagamisel jäägi 1, 2, 4 või 10. Seega nõutava omadusega arve a ja b ei leidu.

13. Teeme jäägiga jagamise, st. leiame täisarvud q' ja r', nii et $a = q'b + r'$ ning $0 < r' < |b|$. Kui $r' \leqslant \frac{|b|}{2}$, siis sobivad arvud $q = q'$ ja $r = r'$. Kui aga $r' > \frac{|b|}{2}$, siis võtame $r = r' - |b|$ ja $q = q' \pm 1$, kus märgi $+$ või $-$ valime vastavalt arvu b märgile.

Märkus. Vaadeldes kõikvõimalikke ülesandes kirjeldatud omadusega funktsioone $\Delta : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ (st. alati, kui $b \neq 0$ ja a ei jagu arvuga b, leiduvad sellised arvud q ja r, et $a = qb + r$ ja $\Delta(r) < \Delta(b)$) saab näidata, et ülesandes mainitud funktsioon δ on minimaalne selliste funktsioonide seas, st. $\delta(n) \leqslant \Delta(n)$ mistahes täisarvu $n \neq 0$ ja ülalkirjeldatud omadusega funktsiooni Δ korral.



Joonis 7

14. *Vastus:* $p = 2$ on ainus selline algarv.

Lahendus. Kui taandumatu murd $\frac{a}{b}$ on täisarvuliste kordajatega polünoomi nullkoht, siis a peab olema polünoomi vabaliikme jagaja ja b tema pealiikme kordaja jagaja. Seega ülesandes vaadeldava polünoomi ratsionaalarvulised nullkohad saavad olla ainult ± 1, $\pm p$, $\pm\frac{1}{2}$ ja $\pm\frac{p}{2}$. Arvutades leiame, et $q(1) = 3 - 2p$, $q(-1) = -3$, $q(p) = p(2-p)$, $q(-p) = p^2(1-4p)$, $q\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, $q\left(-\frac{1}{2}\right) = p - \frac{3}{4}$, $q\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{-p^3 - 2p^2 + 6p}{4}$ ja $q\left(-\frac{p}{2}\right) = \frac{-3p^3 + 2p^2 + 2p}{4}$.

Kui p on paaritu algarv, siis ei saa ükski neist arvudest võrduda nulliga (kaks viimast murdu sellepärast, et nende lugejad on paaritud arvud). Teisalt on lihtne veenduda, et $p = 2$ korral $q(2) = 0$.

15. *Vastus:* vähim võimalik numbrite summa on 9, kui $p = 2$ või $p = 5$.

Lahendus. Kui $p = 2$, siis $n = 9$; kui $p = 3$, siis $n = 49$; kui $p = 5$, siis $n = 513$. Et viie järjestikuse naturaalarvu korrutis $(p-2)(p-1)p(p+1)(p+2)$ jagub alati 5-ga ning üks arvudest $p+1$ ja $p+2$ jagub alati 2-ga, siis algarvu $p > 5$ korral on $(p^2-1)(p^2-4) = (p-2)(p-1)(p+1)(p+2)$ alati 10-ga jaguv positiivne arv. Seega arv $(p^2-1)(p^2-4)+9$ on $p > 5$ korral vähemalt kahekohaline ja lõpeb numbriga 9, st. tema numbrite summa on suurem kui 9.

16. *Vastus:* $(1, 1)$ ja $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \sqrt[3]{9}\right)$.

Lahendus. Teisest võrdusest saame $y = x^{-2}$, mis esimesse võrdusesse asendades annab

$$x^{x+x^{-2}} = x^{-2(x-x^{-2})}.$$

Kui $x = 1$, siis ka $y = 1$. Kui $x \neq 1$, siis peab kehtima võrdus $x + x^{-2} = -2(x - x^{-2})$, kust $3x^3 = 1$ ning $x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ ja $y = \sqrt[3]{9}$.

17. *Vastus:* 1.

Lahendus. Tähistame

$$S_n = \frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \cdots + \frac{1}{x_n+1}.$$

Antud rekurrentse seose $x_{k+1} = x_k^2 + x_k$ võime kirjutada kujul

$$\frac{1}{x_k+1} = \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Seega

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \cdots + \frac{1}{x_n+1} = \\ &= \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) + \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}}\right) = \\ &= \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{n+1}} = 2 - \frac{1}{x_{n+1}}. \end{aligned}$$

Kuna $x_k > 0$ iga $k = 1, 2, 3, \ldots$ korral, siis $S_n < 2$. Et S_n liidetavad $\frac{1}{x_k+1}$ on kõik positiivsed ja juba $S_2 > 1$, siis ka $S_{2008} > 1$ ning seetõttu $\lfloor S_{2008} \rfloor = 1$.

18. *Vastus:* sellised polünoomid, kus $|a_n| = 2^n$, on $P(x) = \pm(2x-1)^n$.

Lahendus. Olgu $x_1, \ldots, x_n$ polünoomi $P(x)$ nullkohad. Siis

$$P(x) = a_n(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n).$$

Kuna polünoomi $P(x)$ kordajad on täisarvud, siis ka $P(0)$ ja $P(1)$ on täisarvud. Et kõik nullkohad asuvad 0 ja 1 vahel, siis on $P(0)$ ja $P(1)$ nullist erinevad. Seega $1 \leqslant |P(0)| = |a_n| \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ ja $1 \leqslant |P(1)| = |a_n| \cdot (1 - x_1) \cdot \ldots \cdot (1 - x_n)$. Nende võrratuste vastavate poolte korrutamisel saame

$$1 \leqslant |a_n|^2 \cdot x_1(1-x_1) \cdot x_2(1-x_2) \cdot \ldots \cdot x_n(1-x_n).$$

Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest saame

$$\sqrt{x_k(1-x_k)} \leqslant \frac{x_k + (1-x_k)}{2} = \frac{1}{2}\,,$$

seega $x_k(1-x_k) \leqslant \frac{1}{4}$. Nüüd

$$1 \leqslant |a_n|^2 \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{|a_n|}{2^n}\right)^2,$$

millest $|a_n| \geqslant 2^n$.

Võrdus kehtib parajasti juhul, kui kõigis AK-GK võrratustes leiab aset võrdus, st. $x_k = 1 - x_k$ kõigi $k = 1, \ldots, n$ korral, mis tähendab, et polünoomi $P(x)$ kõik nullkohad on võrdsed arvuga $\frac{1}{2}$. Seega

$$P(x) = \pm 2^n \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^n = \pm(2x-1)^n\,.$$

19. Esitades vahe $f(x) - 2008 \cdot f\left(\frac{x}{2008}\right)$ summana 2007 liidetavast saame, et

$$\begin{aligned}
&\left|f(x) - 2008 \cdot f\left(\frac{x}{2008}\right)\right| = \\
&\quad = \left|\left(f\left(\frac{2008x}{2008}\right) - f\left(\frac{x}{2008}\right) - f\left(\frac{2007x}{2008}\right)\right) + \right.\\
&\quad\quad + \left(f\left(\frac{2007x}{2008}\right) - f\left(\frac{x}{2008}\right) - f\left(\frac{2006x}{2008}\right)\right) + \\
&\quad\quad \left. + \ldots + \left(f\left(\frac{2x}{2008}\right) - f\left(\frac{x}{2008}\right) - f\left(\frac{x}{2008}\right)\right)\right| \leqslant \\
&\quad \leqslant \left|f\left(\frac{2008x}{2008}\right) - f\left(\frac{x}{2008}\right) - f\left(\frac{2007x}{2008}\right)\right| + \\
&\quad\quad + \left|f\left(\frac{2007x}{2008}\right) - f\left(\frac{x}{2008}\right) - f\left(\frac{2006x}{2008}\right)\right| + \\
&\quad\quad + \ldots + \left|f\left(\frac{2x}{2008}\right) - f\left(\frac{x}{2008}\right) - f\left(\frac{x}{2008}\right)\right| < \\
&\quad < 2007 \cdot 1 = 2007\,.
\end{aligned}$$

Jagades läbi arvuga 2008, saame

$$\left|\frac{f(x)}{2008} - f\left(\frac{x}{2008}\right)\right| < \frac{2007}{2008} < 1\,.$$

20. *Vastus:* $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n$.

Lahendus. Tähistame $y_i = \sin^2 x_i$, siis järeldub ülesande tingimusest, et

$$y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n = (1-y_1)^2(1-y_2)^2 \cdot \ldots \cdot (1-y_n)^2\,.$$

Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest saame, et

$$\begin{aligned}
\left(y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n\right)^{\frac{1}{2n}} &= \left((1-y_1)(1-y_2)\cdot \ldots \cdot (1-y_n)\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \\
&\leqslant \frac{1 - y_1 + 1 - y_2 + \ldots + 1 - y_n}{n} = \\
&= 1 - \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n} \leqslant \\
&\leqslant 1 - \left(y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n\right)^{\frac{1}{n}}\,.
\end{aligned}$$

Tähistame $a = \left(y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n\right)^{\frac{1}{2n}} = |\sin x_1 \cdot \sin x_2 \cdot \ldots \cdot \sin x_n|^{\frac{1}{n}}$, siis $a \leqslant 1 - a^2$, mis kehtib juhul, kui $-\frac{\sqrt{5}+1}{2} \leqslant a \leqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Seega

$$\sin x_1 \cdot \sin x_2 \cdot \ldots \cdot \sin x_n \leqslant a^n \leqslant \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n .$$

Võrdus kehtib näiteks juhul, kui $\sin x_1 = \sin x_2 = \ldots = \sin x_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.