Тренировочное соревнование для команды “Балтийского пути 2008”

Тарту, 2 ноября 2008

1. В шахматном турнире принимают участие три команды по 10 человек. Каждый шахматист играет ровно одну партию с каждым шахматистом из обеих команд-соперниц, т.е. итого 20 партий. Доказать, что если на турнире всего сыграна 201 партия, то найдутся три шахматиста, каждый из которых уже сыграл с обоими другими.

2. Пусть A и O – две противоположные вершины одной грани единичного куба. *Путём длины* n назовём последовательность $X_0X_1\dots X_n$, где X_i – вершины единичного куба, а X_iX_{i+1} при каждом i является ребром куба.

   Каких путей больше среди всех путей длины 2008: таких, у которых начальная и конечная точка обе находятся в вершине A, или таких, у которых начальная точка находится в вершине A, а конечная – в вершине O?

3. Два игрока по очереди выставляют фишки на игровую доску 2008×2008. Каждым ходом игрок выставляет одну фишку в центр какой-то ещё незанятой клетки. Выигрывает игрок, после хода которого впервые возникает ситуация, когда четыре фишки находятся в вершинах равнобедренной трапеции (но не прямоугольника), основания которой параллельны сторонам игровой доски.

   У кого из игроков имеется выигрышная стратегия?

4. В каждую клетку клетчатого поля $n \times n$ записывают число 1 или -1. Пусть a_i – произведение всех чисел i-й строки, а b_j – произведение всех чисел j-го столбца клетчатого поля, где $1 \leqslant i, j \leqslant n$. При каких n возможно записать числа в клетки поля так, что

   $$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + b_1 + b_2 + \ldots + b_n = 0\ ?$$

5. Рассмотрим территорию города горизонтальной плоскостью, а здания вертикальными отрезками, нижние концы которых расположены на этой плоскости. Скажем, что одно здание *доминирует* над другим, если оно выше другого, а прямая, проходящая через верхние концы соответствующих этим зданиям отрезков, пересекает плоскость под углом, превышающим 45°.

   Доказать, что если в городе конечное число зданий и ни одно из них не доминирует над каким-либо другим, то высоту нового здания, строящегося в заданном произвольном месте, можно выбрать так, что по-прежнему ни одно здание не доминировало бы над каким-либо другим.

6. Пусть M – середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC, а D – такая точка на катете AC, что $|CD| = |CM|$. Пусть P – вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников AMC и ADB. Доказать, что точка P расположена на биссектрисе угла BAC.

7. Пусть $ABCDE$ – выпуклый пятиугольник, причём K, L, M и N – соответственно середины отрезков AB, BC, CD и DE. Пусть P и Q – соответственно середины отрезков KM и LN. Доказать, что PQ и AE параллельны и $|AE| = 4|PQ|$.

8. Окружности c_1 и c_2 касаются друг друга внешне в точке P. Пусть A – произвольная отличная от P точка на окружности c_1, а M и M' – точки касания с окружностью c_2 касательных, проведённых к ней из точки A. Пусть прямые AM и AM' пересекают окружность c_1 второй раз в точках N и N' соответственно. Доказать, что $|PN| \cdot |M'N'| = |PN'| \cdot |MN|$.

9. Скажем, что многоугольник P *превращаем* в многоугольник Q, если Q можно получить из P в результате следующих действий:

   - разрежем многоугольник P прямыми разрезами на кусочки;
   - передвинем эти кусочки (поворачивать или переворачивать кусочки нельзя);
   - склеим кусочки в новом положении по сторонам (кусочки не могут частично или полностью перекрываться).

   Доказать, что:

   a) любые два прямоугольника равной площади превращаемы друг в друга;

   b) два треугольника превращаемы друг в друга только тогда, когда они равны и получаемы один из другого путём перемещения.

10. В остроугольном треугольнике ABC выполняется $|AC| > |AB|$. Выберем на сторонах AC и AB соответственно точки D и E так, что $|CD| = |BE|$. Пусть F – точка пересечения отрезков BD и CE, а G – такая точка на стороне AC, что прямая GF параллельна биссектрисе угла BAC. Доказать, что $|CG| = |AB|$.

11. Пусть n такое положительное целое число, что $5n+1$ – квадрат целого числа. Доказать, что число $n+1$ представимо в виде суммы пяти слагаемых, каждое из которых – квадрат какого-то целого числа.

12. Найдутся ли такие положительные целые числа a и b, при которых никакое из чисел a^4+1 и b^2-1 не делится на 39, но число $(a^4+1)(b^2-1)$ делится на 39?

13. Для целого числа n пусть $\delta(n)$ обозначает количество цифр в двоичном представлении числа $|n|$. Доказать, что при любых целых числах a и b, где $b \neq 0$, а a не делится на b, найдутся такие целые q и r, что $a = qb + r$ и $\delta(r) < \delta(b)$.

14. Найти все простые числа p, при которых у многочлена

$$q(x) = 2x^3 - 2px^2 + (1-p)x + p$$

имеется по крайней мере один рациональный корень.

15. Какова наименьшая возможная сумма цифр числа $n = (p^2-1)(p^2-4)+9$, если p – простое число? При каких простых числах p получается эта наименьшая сумма?

16. Найти все пары положительных действительных чисел (x, y), удовлетворяющие условиям $x^{x+y} = y^{x-y}$ и $x^2 \cdot y = 1$.

17. Последовательность (x_n) задана следующими условиями:

$$x_1 = \frac{1}{2}\,, \qquad x_{k+1} = x_k^2 + x_k\,, \quad k = 1, 2, 3, \ldots\,.$$

Найти целую часть числа

$$\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \cdots + \frac{1}{x_{2008}+1}.$$

18. Пусть n – положительное целое число, а $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ – многочлен с целочисленными коэффициентами, у которого (с учётом кратностей) n действительных корней, которые все расположены в интервале $(0, 1)$. Доказать, что $|a_n| \geqslant 2^n$, и найти все такие многочлены, при которых $|a_n| = 2^n$.

19. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функция, которая при любых действительных числах x и y удовлетворяет условию

$$\left| f(x+y) - f(x) - f(y) \right| < 1\,.$$

Доказать, что $\left| f\left(\dfrac{x}{2008}\right) - \dfrac{f(x)}{2008} \right| < 1$ при каждом действительном числе x.

20. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – такие числа из интервала $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, что

$$\tan x_1 \cdot \tan x_2 \cdot \ldots \cdot \tan x_n = \cos x_1 \cdot \cos x_2 \cdot \ldots \cdot \cos x_n\,.$$

Найти наибольшее возможное значение выражения $\sin x_1 \cdot \sin x_2 \cdot \ldots \cdot \sin x_n$.