Treeningvõistlus "Balti tee 2007" võistkonnale

Tartus, 28. oktoobril 2007

1. Tasandil on antud ringjoon k keskpunktiga S ning punkt $A \neq S$. Leia kõigi niisuguste kolmnurkade ABC ümberringjoonte keskpunktide geomeetriline koht tasandil, mille korral BC on ringjoone k diameetriks.

2. Olgu M täisnurkse kolmnurga ABC hüpotenuusi AB suvaline sisepunkt. Olgu S, S_1 ja S_2 vastavalt kolmnurkade ABC, AMC ja BMC ümberringjoonte keskpunktid. Tõesta, et punktid M, C, S, S_1 ja S_2 asuvad ühel ringjoonel. Millise punkti M korral on selle ringjoone raadius vähim võimalik?

3. Olgu a, b, c mingi kolmnurga külgede pikkused, m_a, m_b, m_c selle kolmnurga mediaanide pikkused ning R tema ümberringjoone raadius. Tõesta võrratus
$$2R(m_a + m_b + m_c) \geqslant a^2 + b^2 + c^2 .$$

4. Olgu $ABCD$ kõõlnelinurk ning olgu L ja M vastavalt kolmnurkade BCA ja BCD siseringjoonte keskpunktid. Olgu R vastavalt punktidest L ja M sirgetele AC ja BD tõmmatud ristsirgete lõikepunkt. Tõesta, et kolmnurk LMR on võrdhaarne.

5. On antud kumer hulktahukas tahkudega $S_1, S_2, \ldots, S_n$, mille pindalad on vastavalt $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Iga tahu S_i jaoks vaatleme vektorit $\vec{v}_i$, mis on selle tahuga risti, suunatud hulktahukast väljapoole ning mille pikkus on P_i. Tõesta, et $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \ldots + \vec{v}_n = \vec{0}$.

6. Olgu x, y ja z sellised positiivsed reaalarvud, et $xyz = 1$. Tõesta, et kui
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqslant x + y + z ,$$
siis mistahes positiivse täisarvu k korral
$$\frac{1}{x^k} + \frac{1}{y^k} + \frac{1}{z^k} \geqslant x^k + y^k + z^k .$$

7. Tähistagu $\{x\}$ reaalarvu x murdosa, st. $\{x\} = x - [x]$. Tõesta, et mistahes naturaalarvu n korral
$$\sum_{k=1}^{n^2} \{\sqrt{k}\} \leqslant \frac{n^2 - 1}{2} .$$

8. Olgu $n > 3$ ning a_1, a_2, $\ldots$, a_n sellised reaalarvud, et
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n \quad \text{ja} \quad a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant n^2 .$$
Tõesta, et $\max(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geqslant 2$.

9. Leia kõik sellised täisarvuliste kordajatega ruutpolünoomid $P(x) = x^2 + ax + b$, mille korral leidub täisarvuliste kordajatega polünoom $Q(x)$, nii et polünoomi $P(x) \cdot Q(x)$ kõik kordajad on ± 1.

10. Tõesta, et leidub lõpmata palju selliseid naturaalarve n, mille korral $[n\sqrt{3}]$ on arvu 2 aste. (Siin $[x]$ tähistab arvu x täisosa.)

11. Milliste naturaalarvude n korral saab $n \times n$ ruudustiku tükeldada 2×2 ja 3×3 ruutudeks, nii et kummagi suurusega ruute oleks vähemalt üks?

12. Laual on kolm tühja kasti. Kolm mängijat Andrus, Mart ja Edgar mängivad valimisi — nad loosivad esmalt käigujärjekorra ning hakkavad siis kordamööda ühekaupa kastidesse sedeleid lisama, kusjuures Andrus võib oma käigul sedeli panna ainult esimesse või teise kasti, Mart ainult teise või kolmandasse kasti ning Edgar ainult esimesse või kolmandasse kasti. Mängija, kelle käigu järel on esmakordselt mingis kastis 2007 sedelit, kaotab. Tõesta, et Andrus ja Mart saavad niiviisi kokku mängida, et Edgar kindlasti kaotab.

13. Suurusega $m \times n$ ruudustiku ruudud (kus $m, n \geqslant 2$) nummerdatakse naturaalarvudega 1 kuni mn nii, et igal kahel järjestikuste numbritega ruudul on ühine külg. Tõesta, et leidub selline naturaalarv k, et ruutudel k ja $k+3$ on ühine külg.

14. Vaatleme kõikvõimalikke teekondi $P_0P_1 \ldots P_n$, mis rahuldavad tingimusi

    a) kõik punktid P_i on täisarvuliste koordinaatidega,

    b) kõik lõigud $P_{i-1}P_i$ on pikkusega 1,

    c) punkt P_0 on koordinaatidega $(0, 0)$,

    d) punkt P_n asub x-teljel.

    Tõesta, et selliste teekondade arv $F(n)$ on võrdne $2n$-elemendilise hulga n-elemendiliste alamhulkade arvuga.

15. Populaarse telesaate reklaamiks, kus esinevad 8 tuntud inimest, tehakse n plakatit, millest igaühel on üks või rohkem neist 8 inimesest, kuid ühelgi kahel plakatil ei ole täpselt samad inimesed. Lisaks on teada, et alati, kui valida neist 8 inimesest välja mittetühi alamhulk, kuid mitte kõik, siis selliseid plakateid, kus esineb vähemalt üks väljavalitud inimene, on paarisarv. Leia n kõik võimalikud väärtused.

16. Leia, milliste positiivsete täisarvude x, y korral kehtib võrdus

    $$x! + y! = x^y .$$

17. Tõesta, et kui mingite positiivsete täisarvude n ja k korral kehtib võrdus

    $$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = k^3 ,$$

    siis n jagub 4-ga.

18. Hulk M sisaldab kõik arvud 1, 2, ..., 2007 ning rahuldab järgmist tingimust: kui arv n kuulub hulka M, siis kuuluvad hulka M ka niisuguse aritmeetilise jada kõik liikmed, mille esimene liige on n ning vahe $n+1$. Kas peab leiduma niisugune naturaalarv m, et hulk M sisaldab kõik arvust m suuremad naturaalarvud?

19. Milliste naturaalarvude n korral saab hulga $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ tükeldada

    a) kaheks;

    b) kolmeks

    võrdse suurusega paarikaupa ühisosata alamhulgaks nii, et igaüks neist alamhulkadest sisaldab kõigi oma elementide aritmeetilist keskmist?

20. Tõesta, et arv 111111111 ei ole kolme järjestikuse täisarvu korrutis üheski arvusüsteemis alusega $n \geqslant 2$.