Treeningvõistlus “Balti tee 2007” võistkonnale

Tartus, 28. oktoobril 2007

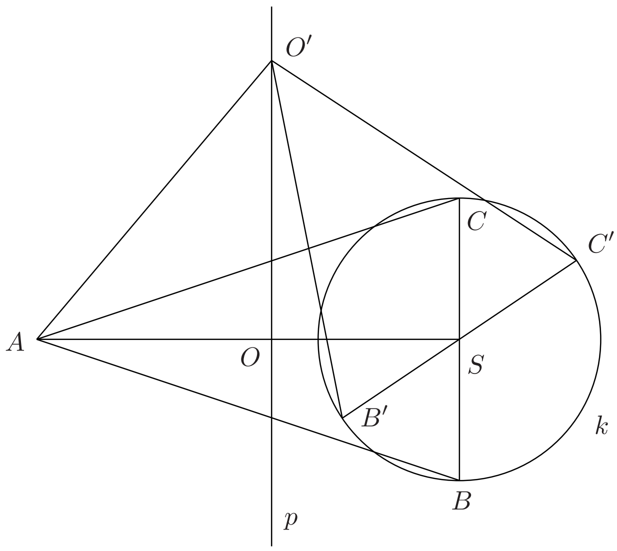
Vastused ja lahendused

1. Tasandil on antud ringjoon k keskpunktiga S ning punkt $A \neq S$. Leia kõigi niisuguste kolmnurkade ABC ümberringjoonte keskpunktide geomeetriline koht tasandil, mille korral BC on ringjoone k diameetriks.

   Vastus: kui punkt A asub ringjoonel, siis otsitav geomeetriline koht on hulk $\{S\}$; muudel juhtudel aga sirge, mis on risti sirgega AS ning läbib sellise kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkti, kus BC on sirgega AS ristiolev ringjoone diameeter.

   Lahendus. Olgu ringjoone k raadius r. Kui A asub ringjoonel, siis kidub otsitav geomeetriline koht üheelemendiliseks hulgaks $\{S\}$.

   Vaatleme juhtu $|AS| > r$. Olgu ABC kõigepealt võrdhaarne alusega BC. Kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt O asub siis tipust A küljele BC tõmmatud kõrguse AS sisepunktis. Väidame, et otsitavaks geomeetriliseks kohaks on sirgega AS ristuv punkti O läbiv sirge p.



   Vaatleme suvalist kolmnurka $AB'C'$, kus $B'C'$ on ringjoone k diameeter. Olgu O' lõigu $B'C'$ keskristsirge ning sirge p lõikepunkt. Ilmselt $|O'B'| = |O'C'|$. Väidame, et ka $|O'B'| = |O'A|$, st O' on kolmnurga $AB'C'$ ümberringjoone keskpunkt. Täisnurksest kolmnurgast $B'O'S$ saame

$$|O'B'| = \sqrt{|O'S|^2 + r^2} = \sqrt{|OO'|^2 + |OS|^2 + r^2}\,.$$

   Teisest küljest

$$|O'A| = \sqrt{|AO|^2 + |OO'|^2} = \sqrt{|BO|^2 + |OO'|^2} = \sqrt{|OS|^2 + r^2 + |OO'|^2}\,.$$

   Seega tõepoolest $|O'B'| = |O'A|$, mida oligi tarvis tõestada.

   Vastupidi, sirge p iga punkti O' jaoks saab konstrueerida ringjoone k diameetri $B'C'$ nii, et $O'S \perp B'C'$ ning ülaltõestatu põhjal osutub punkt O' kolmnurga $AB'C'$ ümberringjoone keskpunktiks.

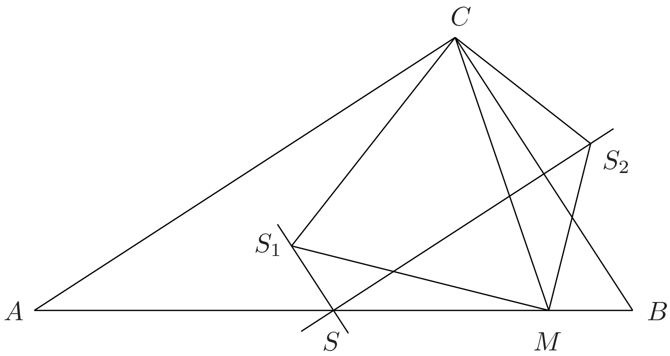
   Juhul $|AS| < r$ on lahendus analoogiline. Seega on otsitavaks geomeetriliseks kohaks kas hulk $\{S\}$ (kui A asub ringjoonel) või sirge, mis on risti sirgega AS ning läbib ülesande tingimustele vastava võrdhaarse kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkti.

2. Olgu M täisnurkse kolmnurga ABC hüpotenuusi AB suvaline sisepunkt. Olgu S, S_1 ja S_2 vastavalt kolmnurkade ABC, AMC ja BMC ümberringjoonte keskpunktid. Tõesta, et punktid M, C, S, S_1 ja S_2 asuvad ühel ringjoonel. Millise punkti M korral on selle ringjoone raadius vähim võimalik?

   Vastus: raadius on vähim võimalik siis, kui M on tipust C hüpotenuusile AB tõmmatud kõrguse aluspunkt.

   Lahendus. Olgu $\alpha = \angle BAC$ ning $\beta = \angle CBA$. Kesk- ja piirdenurga omadustest kolmnurkade AMC ja BMC ümberringjoonte jaoks saame

$$\angle MS_1C + \angle MS_2C = 2\alpha + 2\beta = 180°.$$



   Järelikult on CS_1MS_2 kõõlnelinurk. Kuna punktid S_1 ja S_2 asuvad lõigu CM keskristsirgel, saame, et S_1S_2 on kõõlnelinurga CS_1MS_2 ümberringjoone diameeter ning

$$\angle S_1MS_2 = \angle S_1CS_2 = 90°.$$

   Kuna SS_1 on kaateti AC keskristsirge ning SS_2 kaateti BC keskristirge, kehtib ka võrdus $\angle S_1SS_2 = 90°$ ning järelikult asub ka punkt S samal ringjoonel.

   Kuna S on hüpotenuusi AB keskpunkt ning sellisena fikseeritud, saame, et fikseeritud lõik CS on kõigi tekkivate ringjoonte kõõluks, mistõttu alati $|CS| \leqslant 2r$. Võrdus kehtib ainult siis, kui CS on ise ringjoone diameeter, mis juhtub parajasti siis, kui M on tipust C hüpotenuusile AB tõmmatud kõrguse aluspunkt.

3. Olgu a, b, c mingi kolmnurga külgede pikkused, m_a, m_b, m_c selle kolmnurga mediaanide pikkused ning R tema ümberringjoone raadius. Tõesta võrratus

$$2R(m_a + m_b + m_c) \geqslant a^2 + b^2 + c^2\,.$$

   Lahendus. Tõestame kõigepealt võrratuse

$$2Rm_a \geqslant \frac{b^2 + c^2}{2}\,.$$

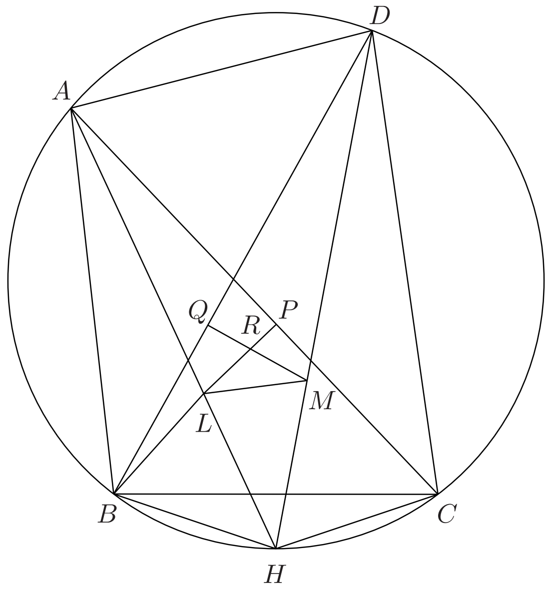
   Olgu vaadeldava kolmnurga ABC külje BC keskpunkt M ning lõigaku sirge AM kolmnurga ümberringjoont teistkordselt punktis M'. Siis $|AM| \cdot |MM'| = |BM| \cdot |MC|$ ehk $m_a \cdot |MM'| = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$, kust saame $|MM'| = \frac{a^2}{4m_a}$. Koosinusteoreemist kolmnurkades AMC ja BMC leiame, et $4m_a^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2$. Seega

$$2R \geqslant |AM'| = |AM| + |MM'| = m_a + \frac{a^2}{4m_a} = \frac{4m_a^2 + a^2}{4m_a} = \frac{2b^2 + 2c^2}{4m_a} = \frac{b^2 + c^2}{2m_a}\,,$$

   millest järeldubki vajalik võrratus. Analoogiliselt tõestame ka $2Rm_b \geqslant \frac{c^2 + a^2}{2}$ ja $2Rm_c \geqslant \frac{a^2 + b^2}{2}$; ülesande võrratuse saame tõestatud võrratusi liites.

4. Olgu $ABCD$ kõõlnelinurk ning olgu L ja M vastavalt kolmnurkade BCA ja BCD siseringjoonte keskpunktid. Olgu R vastavalt punktidest L ja M sirgetele AC ja BD tõmmatud ristsirgete lõikepunkt. Tõesta, et kolmnurk LMR on võrdhaarne.

Lahendus. Olgu H kõõlnelinurga $ABCD$ ümberringjoone selle kaare BC keskpunkt, mis ei sisalda tippe A ja D. Siis on AH ja DH vastavalt nurkade BAC ja BDC poolitajad.



Tähistame

$$\varepsilon = \angle BAH = \angle CAH = \angle BDH = \angle CDH = \angle CBH$$

ning

$$\varphi = \angle ABL = \angle CBL\,.$$

Siis

$$\angle BLH = \angle BAL + \angle ABL = \varepsilon + \varphi = \angle LBH\,,$$

järelikult on kolmnurk HLB võrdhaarne ja $|HB| = |HL|$. Analoogiliselt tõestame, et $|HC| = |HM|$. Kuna ilmselt ka $|HB| = |HC|$, siis oleme muuhulgas tõestanud võrduse $|HL| = |HM|$, mistõttu kolmnurk HLM on võrdhaarne ja $\angle HLM = \angle HML$.

Olgu P punktist L sirgele AC tõmmatud ristlõigu aluspunkt ning Q punktist M sirgele BD tõmmatud ristlõigu aluspunkt (punkt R on siis sirgete LP ja MQ lõikepunkt). Saame

$$\angle ALP = 90^\circ - \varepsilon = \angle DMQ$$

ning

$$\angle PLM = 180^\circ - \angle ALP - \angle HLM = 180^\circ - \angle DMQ - \angle HML = \angle QML\,,$$

millest järeldub kolmnurga LMR võrdhaarsus.

5. On antud kumer hulktahukas tahkudega $S_1, S_2, \ldots, S_n$, mille pindalad on vastavalt $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Iga tahu S_i jaoks vaatleme vektorit $\vec{v}_i$, mis on selle tahuga risti, suunatud hulktahukast väljapoole ning mille pikkus on P_i. Tõesta, et $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \ldots + \vec{v}_n = \vec{0}$.

Lahendus. Vaatleme ruumis mingit tasandit p, mis ei lõika antud hulktahukat ning ei ole paralleelne selle ühegi tahuga, ning sellega ristuvat sirget g. Olgu u_i vektori $\vec{v}_i$ ristprojektsioon sirgele g (kus u_i-d mõistame lihtsalt suunatud lõigu, mitte vektorina). Olgu R_i hulktahuka tahu S_i suunatud projektsiooni pindala tasandile p (st R_i absoluutväärtus on võrdne S_i projektsiooni pindalaga ning märk on $+$, kui vektor $\vec{v}_i$ on suunatud tasandist p eemale, ning $-$ vastasel juhul). Siis saame

$$u_i = |\vec{v}_i| \cdot \cos\measuredangle(\vec{v}_i;\ g) \quad \text{ja} \quad R_i = P_i \cdot \cos\measuredangle(S_i;\ p)\ .$$

Ülesande tingimuste põhjal $|\vec{v}_i| = P_i$, seega $u_i = P_i \cdot \cos\measuredangle(\vec{v}_i;\ g)$. Samuti kuna $g \perp p$ ja $\vec{v}_i \perp S_i$, siis $\measuredangle(\vec{v}_i;\ g) = \measuredangle(S_i;\ p)$. Järelikult

$$u_i = P_i \cdot \cos\measuredangle(\vec{v}_i;\ g) = P_i \cdot \cos\measuredangle(S_i;\ p) = R_i$$

iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral. Samas on selge, et hulktahuka kõigi tahkude suunatud ristprojektsioonide summa tasandile p on 0 (sest hulktahuka kõik tahud jagunevad kaheks alamhulgaks, mille kummagi projektsioonid tasandile p moodustavad kokku hulktahuka projektsiooni sellele tasandile, ning ühte alamhulka kuuluvate tahkude suunatud projektsioonid on positiivsed ja teise alamhulka kuuluvatel tahkudel negatiivsed). Seega

$$u_1 + u_2 + ... + u_n = R_1 + R_2 + ... + R_n = 0\,.$$

Samas on $u_1 + u_2 + ... + u_n$ vektori $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \ldots + \vec{v}_n$ ristprojektsioon sirgele g. Kuna sirge g oli suvaline, on vektori $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \ldots + \vec{v}_n$ ristprojektsioon igale sirgele võrdne nullvektoriga, millest järeldub, et ka $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \ldots + \vec{v}_n$ ise on nullvektor.

Märkus. Sellel ülesandel on olemas ilus füüsikaline tõlgendus. Oletame, et antud hulktahukas on täidetud gaasiga. Siis on selle gaasi poolt tahkudele rakendatavate jõudude resultant võrdne nulliga.

6. Olgu x, y ja z sellised positiivsed reaalarvud, et $xyz = 1$. Tõesta, et kui

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqslant x + y + z\,,$$

siis mistahes positiivse täisarvu k korral

$$\frac{1}{x^k} + \frac{1}{y^k} + \frac{1}{z^k} \geqslant x^k + y^k + z^k\,.$$

Lahendus. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}(x-1)(y-1)(z-1) &= xyz - xy - yz - zx + x + y + z - 1 = \\ &= 1 - \frac{1}{z} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + x + y + z - 1 = \\ &= x + y + z - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} \leqslant 0\,.\end{aligned}$$

Mistahes positiivse täisarvu k korral $x^k > 1$ parajasti siis, kui $x > 1$, s.t. arvud $x - 1$ ja $x^k - 1$ on sama märgiga. Sarnased väited kehtivad ka y ja z jaoks. Seega

$$\begin{aligned}x^k + y^k + z^k - \frac{1}{x^k} - \frac{1}{y^k} - \frac{1}{z^k} &= 1 - \frac{1}{z^k} - \frac{1}{x^k} - \frac{1}{y^k} + x^k + y^k + z^k - 1 = \\ &= x^k y^k z^k - x^k y^k - y^k z^k - z^k x^k + x^k + y^k + z^k - 1 = \\ &= (x^k - 1)(y^k - 1)(z^k - 1) \leqslant 0\,,\end{aligned}$$

s.t.

$$\frac{1}{x^k} + \frac{1}{y^k} + \frac{1}{z^k} \geqslant x^k + y^k + z^k\,.$$

7. Tähistagu $\{x\}$ reaalarvu x murdosa, st. $\{x\} = x - [x]$. Tõesta, et mistahes naturaalarvu n korral

$$\sum_{k=1}^{n^2} \{\sqrt{k}\} \leqslant \frac{n^2 - 1}{2}\,.$$

Lahendus. Tõestame väite induktsiooniga n järgi. Kui $n = 1$, siis kehtib väide triviaalselt ($0 \leqslant 0$). Kehtigu nüüd väide mingi n korral.

Mistahes $k = 1, 2, \ldots, 2n$ korral $n < \sqrt{n^2 + k} < n + 1$ ning seega

$$\{\sqrt{n^2 + k}\} = \sqrt{n^2 + k} - n < \sqrt{n^2 + k + \frac{k^2}{4n^2}} - n =$$

$$= \sqrt{\left(n + \frac{k}{2n}\right)^2} - n = \frac{k}{2n} .$$

Seega

$$\sum_{k=1}^{(n+1)^2} \{\sqrt{k}\} = \sum_{k=1}^{n^2}\{\sqrt{k}\} + \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2} \{\sqrt{k}\} <$$
$$< \frac{n^2-1}{2} + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} k + 0 =$$
$$= \frac{n^2-1}{2} + \frac{2n+1}{2} = \frac{(n+1)^2-1}{2} .$$

8. Olgu $n > 3$ ning $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sellised reaalarvud, et

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n \quad \text{ja} \quad a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant n^2 .$$

Tõesta, et $\max(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geqslant 2$.

Lahendus. Oletame vastuväiteliselt, et $a_i < 2$ iga $i = 1, \ldots, n$ korral, ning olgu $b_i = 2 - a_i > 0$. Siis

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = 2n - \sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant n$$

ning

$$n^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}(2-b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(4 - 4b_i + b_i^2) < 4n - 4\sum_{i=1}^{n} b_i + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2 ,$$

ehk

$$n(n-4) < \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i - 4\right) .$$

Kuna $n \geqslant 4$, siis võrratuse parem pool peab olema positiivne ning kuna $\sum_{i=1}^{n} b_i > 0$, siis ka $\sum_{i=1}^{n} b_i - 4 > 0$. Niisiis on võrratuse kummalgi pool kahe positiivse teguri korrutis, kuid $\sum_{i=1}^{n} b_i \leqslant n$ ja $\sum_{i=1}^{n} b_i - 4 \leqslant n - 4$, s.t. see võrratus ei saa kehtida — vastuolu.

9. Leia kõik sellised täisarvuliste kordajatega ruutpolünoomid $P(x) = x^2 + ax + b$, mille korral leidub täisarvuliste kordajatega polünoom $Q(x)$, nii et polünoomi $P(x) \cdot Q(x)$ kõik kordajad on ± 1.

Vastus: $x^2 + 1$, $x^2 + x + 1$, $x^2 - x + 1$, $x^2 + 2x + 1$, $x^2 - 2x + 1$ ja $x^2 - 1$, $x^2 + x - 1$, $x^2 - x - 1$.

Lahendus. Ilmselt peab polünoomi $P(x)$ vabaliige olema ± 1. Kui mingid polünoomid $P(x)$ ja $Q(x)$ rahuldavad ülesande tingimust, siis rahuldavad ülesande tingimust ka polünoomid $P(x)$ ja $-Q(x)$: seepärast võime üldisust kitsendamata eeldada, et polünoomi $F(x) = P(x) \cdot Q(x)$ vabaliige on 1. Polünoomi $P(x)$ iga reaalarvuline nullkoht r on ühtlasi polünoomi $F(x)$ nullkoht. Kui $|r| \leqslant \frac{1}{2}$, siis

$$F(r) \geqslant 1 - (|r| + |r|^2 + \ldots + |r|^n) \geqslant 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) > 0 ,$$

vastuolu. Niisiis ei saa polünoomil $P(x)$ olla reaalarvulisi nullkohti r, kus $|r| \leqslant \frac{1}{2}$.

Vaatleme edasi kaht juhtu.

a) Olgu $P(x) = x^2 + ax + 1$, siis polünoomil $P(x)$ on reaalarvuline nullkoht r, kus $|r| \leqslant \frac{1}{2}$, kui $|a| \geqslant 2$ ning üks arvudest $\frac{-a \pm \sqrt{a^2-4}}{2}$ on absoluutväärtuselt mitte suurem kui $\frac{1}{2}$, ehk üks arvudest $-a \pm \sqrt{a^2-4}$ on absoluutväärtuselt mitte suurem kui 1. Olgu esmalt $a \geqslant 2$, siis $|-a+\sqrt{a^2-4}| \leqslant 1$ kehtib, kui $\sqrt{a^2-4} \geqslant 1-a$, ehk $a^2-4 \geqslant (1-a)^2 = a^2-2a+1$, ehk $a \geqslant \frac{5}{2}$. Analoogiliselt saame, et $a \leqslant -2$ korral $|-a-\sqrt{a^2-4}| \leqslant 1$ kehtib, kui $a \leqslant -\frac{5}{2}$. Vastavalt eespool tõestatule need juhud ei sobi — seega jääb üle vaadata läbi juhud, kus a on hulgas $\{0, \pm 1, \pm 2\}$. Kui $a = \pm 2$, sobib vastavalt $Q(x) = x \mp 1$; ülejäänud juhtudel sobib $Q(x) = 1$.

b) Olgu nüüd $P(x) = x^2+ax-1$, siis polünoomil $P(x)$ on reaalarvuline nullkoht r, kus $|r| \leqslant \frac{1}{2}$, kui üks arvudest $\frac{-a \pm \sqrt{a^2+4}}{2}$ on absoluutväärtuselt mitte suurem kui $\frac{1}{2}$, ehk üks arvudest $-a \pm \sqrt{a^2+4}$ on absoluutväärtuselt mitte suurem kui 1. Olgu esmalt $a \geqslant 0$, siis $|-a+\sqrt{a^2+4}| \leqslant 1$ kehtib, kui $\sqrt{a^2+4} \leqslant 1+a$, ehk $a^2+4 \leqslant (1+a)^2 = a^2+2a+1$, ehk $a \geqslant \frac{3}{2}$. Analoogiliselt saame, et $a \leqslant 0$ korral $|-a-\sqrt{a^2+4}| \leqslant 1$ kehtib, kui $a \leqslant -\frac{3}{2}$. Vastavalt eespool tõestatule need juhud ei sobi — seega jääb üle vaadata läbi juhud, kus a on hulgas $\{0, \pm 1\}$: neil juhtudel sobib $Q(x) = 1$.

10. Tõesta, et leidub lõpmata palju selliseid naturaalarve n, mille korral $[n\sqrt{3}]$ on arvu 2 aste. (Siin $[x]$ tähistab arvu x täisosa.)

Lahendus. Näitame, et väide kehtib, kui $\sqrt{3}$ asemel võtta suvaline selline reaalarv a, et $1 < a < 2$.

Fikseerime a väärtuse ($1 < a < 2$) ning nimetame naturaalarvu n ***sobivaks***, kui $[na]$ on arvu 2 aste. Oletame vastuväiteliselt, et leidub ainult lõplik arv sobivaid naturaalarve n, ning valime naturaalarvu k nii, et $2^k > na$ kõigi sobivate naturaalarvude n korral. Olgu q see naturaalarv, mille korral $qa < 2^k \leqslant (q+1)a$, ning $r = 2^k - qa$, siis $0 < r \leqslant a$. Olgu $j \geqslant 0$ see täisarv, mille korral

$$\frac{a}{2} < 2^j r \leqslant a.$$

Kuna $a < 2$, siis $\frac{a}{2} > a - 1$ ning seega

$$a - 1 < 2^j r = 2^j(2^k - qa) \leqslant a\ ,$$

ehk

$$(2^j q + 1)a - 1 < 2^{j+k} \leqslant (2^j q + 1)a\ .$$

Tähistame $m = 2^j q + 1$, siis $[ma] = 2^{j+k}$, s.t. m on sobiv. Kuid $ma = (2^j q + 1)a \geqslant (q+1)a \geqslant 2^k$, mis on vastuolus arvu k valikuga. Saadud vastuolu näitab, et sobivaid naturaalarve on lõpmata palju.

11. Milliste naturaalarvude n korral saab $n \times n$ ruudustiku tükeldada 2×2 ja 3×3 ruutudeks, nii et kummagi suurusega ruute oleks vähemalt üks?

Vastus: kõik naturaalarvud $n > 6$, mis jaguvad 2-ga või 3-ga.

Lahendus. Loobume esmalt nõudest, et kummagi suurusega ruute peab olema vähemalt üks. Ilmselt on siis iga paarisarvulise n korral olemas tükeldus 2×2 ruutudeks. Oletame, et mingi paaritu n korral leidub tükeldus 2×2 ja 3×3 ruutudeks, ning värvime ruudustiku veerud vaheldumisi mustaks ja valgeks. Musti ruute on siis n võrra valgetest ruutudest rohkem, iga 2×2 ruut katab musti ja valgeid ruute ühepalju ning iga 3×3 ruut katab musti ruute 3 võrra rohkem või vähem kui valgeid ruute. Siit on näha, et n peab jaguma 3-ga. Teisalt on ilmne, et mistahes 3-ga jaguva n korral on olemas tükeldus 3×3 ruutudeks.

Vaatame nüüd, milliste 2-ga või 3-ga jaguvate n korral leidub tükeldus, mis sisaldab nii 2×2 kui ka 3×3 ruute. Kui $n > 6$, saame nõutava tükelduse nii: esmalt tükeldame ruudustiku kas ainult 2×2 või ainult 3×3 ruutudeks ning siis muudame selle ühes 6×6 nurgas tükeldust, kasutades seal 2×2 ruutude asemel 3×3 ruute või vastupidi.

Kui $n = 2$ või $n = 3$, siis nõutavat tükeldust ilmselt ei ole. Samuti ei ole nõutavat tükeldust $n = 4$ ega $n = 6$ korral, sest ühest 2×2 ruudust ja ühest 3×3 ruudust ülejäävate katmata ruutude arv on siis vastavalt $16 - 13 = 3$, mis on väiksem kui $2^2 = 4$, või $36 - 13 = 23$, mis ei ole esitatav liidetavate 4 ja 9 summana.

12. Laual on kolm tühja kasti. Kolm mängijat Andrus, Mart ja Edgar mängivad valimisi — nad loosivad esmalt käigujärjekorra ning hakkavad siis kordamööda ühekaupa kastidesse sedeleid lisama, kusjuures Andrus võib oma käigul sedeli panna ainult esimesse või teise kasti, Mart ainult teise või kolmandasse kasti ning Edgar ainult esimesse või kolmandasse kasti. Mängija, kelle käigu järel on esmakordselt mingis kastis 2007 sedelit, kaotab. Tõesta, et Andrus ja Mart saavad niiviisi kokku mängida, et Edgar kindlasti kaotab.

    Lahendus. Asetagu Andrus sedeleid ainult esimesse kasti, kuni selles on vähem kui 2006 sedelit, ning seejärel ainult teise kasti. Analoogiliselt asetagu Mart sedeleid ainult kolmandasse kasti, kuni selles on vähem kui 2006 sedelit, ning seejärel ainult teise kasti. Näitame, et sellisel juhul Edgar kaotab alati.

    Üldisust kitsendamata võime eeldada, et esimeses kastis jõuab sedelite arv varem 2006-ni kui kolmandas kastis. Nimetame käiku, mil esimesse kasti asetatakse 2006. sedel, ***kriitiliseks käiguks***.

    Oletame esmalt, et mäng lõpeb enne, kui kolmandas kastis jõuab sedelite arv 2006-ni. Et pärast kriitilist käiku panevad igas käiguvoorus nii Mart kui ka Edgar oma sedeli kolmandasse kasti (Mart vastavalt kirjeldatud strateegiale, Edgar aga sellepärast, et esimesse kasti sedelit pannes ta kaotaks kohe), siis saab pärast kriitilist käiku toimuda ülimalt 1003 käiguvooru ning Andrus lisab neis voorudes teise kasti ülimalt 1003 sedelit ega saa kaotada (Mart ega Edgar ei pane kogu mängu jooksul ühtki sedelit teise kasti). Järelikult ei kaota keegi, mis ei ole võimalik. Saadud vastuolu näitab, et ka kolmandas kastis peab sedelite arv mingil hetkel jõudma 2006-ni.

    Niisiis jõuab ülimalt 1003 käiguvooru jooksul pärast kriitilist käiku kätte hetk, mil esimeses ja kolmandas kastis on mõlemas 2006 sedelit ning seega Edgar kaotab oma järgmisel käigul. Jääb üle ainult veenduda, et Andrus ega Mart ei kaota oma järgmisel käigul juhul, kui neil tuleb teha käik enne Edgarit. Selleks paneme tähele, et teises kastis saab Edgari järgmise käigu ajaks olla ülimalt 1005 sedelit (Andruse pandud ülimalt 1004 sedelit pärast kriitilist käiku ning võib-olla üks Mardi pandud sedel pärast seda, kui kolmandas kastis jõudis sedelite arv 2006-ni).

13. Suurusega $m \times n$ ruudustiku ruudud (kus $m, n \geqslant 2$) nummerdatakse naturaalarvudega 1 kuni mn nii, et igal kahel järjestikuste numbritega ruudul on ühine külg. Tõesta, et leidub selline naturaalarv k, et ruutudel k ja $k + 3$ on ühine külg.

    Lahendus. Märgime ruudustikus iga $k = 1, 2, \ldots, mn - 1$ jaoks ruutude k ja $k + 1$ ühise serva. Neil $mn - 1$ serval on kokku $2mn - 2$ otspunkti, millest mõned langevad omavahel kokku.

    Oletame, et ühegi k korral ei ole ruutudel k ja $k + 3$ ühist külge — siis iga ruudustiku sees (st. mitte serval) paiknev sõlmpunkt on ülimalt kahe märgitud serva otspunktiks, seega selliste sõlmpunktide osa märgitud servade otspunktide koguarvus on ülimalt $2(m - 1)(n - 1) = 2mn - 2m - 2n + 2$. Iga ruudustiku serval paiknev sõlmpunkt saab olla ülimalt ühe märgitud serva otspunktiks, seega selliste sõlmpunktide osa märgitud servade otspunktide koguarvus on ülimalt $2m + 2n - 4$. Niisiis saab märgitud servade otspunktide arv olla $2mn - 2$ ainult juhul, kui iga ruudustiku serval paiknev sõlmpunkt on mingi märgitud serva otspunktiks — see aga tähendaks, et ruute numbrite kasvamise järjekorras läbides peaksid ruudustiku servaruudud moodustama tsükli, mis ei ole võimalik.

14. Vaatleme kõikvõimalikke teekondi $P_0 P_1 \ldots P_n$, mis rahuldavad tingimusi

    a) kõik punktid P_i on täisarvuliste koordinaatidega,

    b) kõik lõigud $P_{i-1} P_i$ on pikkusega 1,

    c) punkt P_0 on koordinaatidega $(0, 0)$,

    d) punkt P_n asub x-teljel.

    Tõesta, et selliste teekondade arv $F(n)$ on võrdne $2n$-elemendilise hulga n-elemendiliste alamhulkade arvuga.

    Lahendus 1. Teekonna $P_0 P_1 \ldots P_n$ iga lüli on ühiklõik, mis võib olla suunatud üles, alla, paremale või vasakule. Seame igale sellisele teekonnale vastavusse kahendkoodi pikkusega $2n$, kus iga üles suunatud lõigu kood on 11, alla suunatud lõigul 00, paremale suunatud lõigul 01 ja vasakule suunatud lõigul

10. Ilmselt vastab mistahes pikkusega $2n$ kahendkood niiviisi mingile teekonnale, ning erinevatele teekondadele vastavad erinevad kahendkoodid.

Kuna punkt P_0 paikneb x-teljel, siis P_n paikneb samuti x-teljel parajasti siis, kui teekond sisaldab võrdsel arvul üles ja alla suunatud lõike. See on aga samaväärne sellega, et teekonna kahendkood sisaldab võrdsel arvul sümboleid 0 ja 1, sest paremale ja vasakule suunatud lõigud annavad sellesse koodi võrdsel arvul sümboleid 0 ja 1. Niisiis on teekondade koguarv võrdne selliste pikkusega $2n$ kahendkoodide arvuga, kus on parajasti n sümbolit 1, st. $2n$ võimalikust positsioonist täpselt n positsioonis peab olema 1 ja ülejäänutes 0. Sellised kahendkoodid saab aga ilmsel viisil seada üksühesesse vastavusse $2n$-elemendilise hulga n-elemendiliste alamhulkadega.

Lahendus 2. Tähistagu mistahes täisarvu k korral $f(n,k)$ pikkusega n teekondade $P_0P_1\ldots P_n$ arvu, kus $P_0(0,0)$ ja punkt P_n asub joonel $y=k$. Siis otsitav arv $F(n)=f(n,0)$.

Pikendades teekonda ühe sammu võrra on meil üks võimalus suurendada lõpp-punkti y-koordinaati 1 võrra, üks võimalus vähendada seda 1 võrra ja kaks võimalust seda mitte muuta. Seega

$$f(n,k)=f(n-1,k-1)+2f(n-1,k)+f(n-1,k+1)\,.$$

Lisaks ilmselt $f(0,0)=1$ ning $f(0,k)=0$, kui $k\neq 0$. Leides neist seostest $f(n,k)$ väärtused $n=0,1,2,3$ näeme, et need langevad kokku Pascali kolmnurga paarisarvuliste ridadega. Tõestamaks, et see on alati nii, piisab näidata, et Pascali kolmnurga paarisarvulistes ridades olevad arvud $g(n,k)=\binom{2n}{n+k}$ rahuldavad samu rekurrentseid seoseid. Tõepoolest, ilmselt $g(0,0)=1$ ning $g(0,k)=0$, kui $k\neq 0$, ning

$$\begin{aligned} g(n,k) &= \binom{2n}{n+k}=\binom{2n-1}{n+k-1}+\binom{2n-1}{n+k}= \\ &= \binom{2n-2}{n+k-2}+2\binom{2n-2}{n+k-1}+\binom{2n-2}{n+k}= \\ &= g(n-1,k-1)+2g(n-1,k)+g(n-1,k+1)\,. \end{aligned}$$

Seega

$$F(n)=f(n,0)=g(n,0)=\binom{2n}{n}\,,$$

s.t. on võrdne $2n$-elemendilise hulga n-elemendiliste alamhulkade arvuga.

15. Populaarse telesaate reklaamiks, kus esinevad 8 tuntud inimest, tehakse n plakatit, millest igaühel on üks või rohkem neist 8 inimesest, kuid ühelgi kahel plakatil ei ole täpselt samad inimesed. Lisaks on teada, et alati, kui valida neist 8 inimesest välja mittetühi alamhulk, kuid mitte kõik, siis selliseid plakateid, kus esineb vähemalt üks väljavalitud inimene, on paarisarv. Leia n kõik võimalikud väärtused.

Vastus: $n=255$ on ainus võimalus.

Lahendus. Olgu X hulk, mille elementideks on plakatitel kujutatavad 8 inimest. Ütleme, et hulga X alamhulk S on ***kasutusel***, kui mingil plakatil on kujutatud parajasti alamhulka S kuuluvad inimesed.

Paneme esmalt tähele, et $n\geqslant 2$ — vastasel korral oleks sel ainsal plakatil olevate inimeste mistahes alamhulga jaoks plakateid, kus esineb vähemalt üks inimene sellest alamhulgast, paaritu arv 1, mis oleks vastuolus ülesande tingimustega.

Olgu nüüd $S_0\subseteq X$ minimaalse elementide arvuga kasutuselolev alamhulk, siis $|S_0|\geqslant 1$. Kuna $n\geqslant 2$, siis $|S_0|<8$. Seega $1\leqslant |X\setminus S_0|\leqslant 7$ ning vastavalt ülesande tingimustele esinevad hulka $X\setminus S_0$ kuuluvad inimesed paarisarvul plakatitel. Teisalt minimaalsuse eelduse tõttu ei ole hulga S_0 ükski pärisalamhulk kasutusel ning seega esinevad hulka $X\setminus S_0$ kuuluvad inimesed parajasti kõigil ülejäänud $n-1$ plakatil peale selle, kus on kujutatud hulka S_0 kuuluvad inimesed. Niisiis $n-1$ on paaris ning n on paaritu.

Paneme tähele, et hulga X mistahes mittetühi alamhulk S peab sisaldama paaritu arvu kasutusel alamhulki (mille seas võib olla ka hulk S ise). Tõepoolest, $S=X$ korral on see arv n, mis vastavalt eespool tõestatule on paaritu; $S\subset X$ korral aga $1\leqslant |X\setminus S|\geqslant 7$ ning vastavalt ülesande tingimustele esinevad hulka $X\setminus S$ kuuluvad inimesed paarisarvul plakatitel ja seega ülejäänud paaritul arvul plakatitel esinevad ainult hulka S kuuluvad inimesed.

Näitame nüüd, et hulga X mistahes mittetühi alamhulk on kasutusel. Oletame vastuväiteliselt, et leidub minimaalse elementide arvuga mittetühi mittekasutusel alamhulk $S_1 \subseteq X$. Hulga S_1 kasutusel-olevad alamhulgad on parajasti kõik tema $2^{|S_1|} - 2$ mittetühja pärisalamhulka, s.t. neid on paarisarv, mis on aga vastuolus eespool tõestatuga. Seega niisugust alamhulka S_1 ei leidu ning $n = 2^8 - 1 = 255$.

16. Leia, milliste positiivsete täisarvude x, y korral kehtib võrdus

$$x! + y! = x^y\,.$$

Vastus: $(x, y) = (2, 2)$ ja $(x, y) = (2, 3)$.

Lahendus. Vaatleme kõigepealt juhtu, kui $x = y$. Siis omandab võrdus kuju $2x! = x^x$, kust x-ga läbijagamisel tuleb $2(x-1)! = x^{x-1}$. Juhul $x = 1$ see ei kehti ($2 \cdot 0! = 2 \cdot 1 = 2 \neq 1 = 1^0$), juhul $x = 2$ kehtib ($2 \cdot 1! = 2 \cdot 1 = 2 = 2^1$). Juhul $x > 2$ kirjutame $2(x-1)! = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (x-1)$ ning $x^{x-1} = x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$. Mõlemas korrutises on $x - 1$ tegurit ning esimeses korrutises on nad kõik väiksemad kui teises. Järelikult võrdus ei saa kehtida.

Järgmiseks vaatleme juhtu, kui $x > y$. Kuna $x! + y! = y! \cdot (x(x-1)\ldots(y+1) + 1)$ ning arvud $x(x-1)\ldots(y+1)+1$ ja x on ühistegurita, siis ei saa arv $x! + y!$ jagada arvu x^y, mistõttu ülesande võrdus ei saa kehtida.

Olgu nüüd $x < y$. Võimalus $x = 1$ ilmselt ei sobi, sest $1! + y! > 1^y$. Seega võime eeldada, et $2 \leqslant x$. Ülesande võrdusest saame $x!(1 + \frac{y!}{x!}) = x^y$ ja $(x-1)!(1 + \frac{y!}{x!}) = x^{y-1}$. Kuna $x < y$, siis on $1 + \frac{y!}{x!}$ täisarv, järelikult jagub arv x^{y-1} arvuga $x - 1$. Kuna aga $\text{SÜT}(x^{y-1}, x-1) = 1$, peab kehtima $x = 2$ ja $2 + y! = 2^y$. Väärtus $y = 3$ annab lahendi. Juhul $y \geqslant 4$ jaguvad 4-ga nii $y!$ kui ka 2^y, kuid 2 mitte, järelikult võrdus ei saa kehtida.

17. Tõesta, et kui mingite positiivsete täisarvude n ja k korral kehtib võrdus

$$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = k^3\,,$$

siis n jagub 4-ga.

Lahendus. Ülesande võrdusest järeldub, et $k^3 = 3n(n^2+2)$. Vaatame eraldi läbi kaks juhtu.

a) Kui $n \equiv 2 \bmod 4$, siis ka $n^2 + 2 \equiv 2 \bmod 4$ ja järelikult $3n(n^2+2) \equiv 4 \bmod 8$, mis ei ole võimalik, sest $3n(n^2+2)$ on ülesande tingimuste põhjal täiskuup.

b) Kui $n \equiv 1 \bmod 2$, siis on n ja $n^2 + 2$ ühistegurita. Seega ainult üks neist saab jaguda 3-ga (üks kindlasti jagub ka, aga see pole siin oluline). Lisame teguri 3 sellele tegurile, mis jagub 3-ga; saadud kompleksne tegur on teise teguriga ühistegurita. Et nende korrutis on täiskuup, on mõlemad tegurid täiskuubid. Vastavalt sellele, kummas teguris on 3, saame kaks võimalust.

b1) Olgu $3n = a^3$, $n^2+2 = b^3$ mingite täisarvude a ja b korral. Esimesest võrdusest saame, et a jagub 3-ga, mistõttu n jagub 9-ga. See aga annab vastuolu teise võrdusega, sest b^3 saab 9-ga jagades anda ainult jäägi 0, 1 või 8.

b2) Olgu $3(n^2+2) = a^3$, $n = b^3$ mingite täisarvude a ja b korral. Esimesest võrdusest saame jällegi, et a jagub 3-ga, mistõttu $n^2 + 2$ jagub 9-ga. Järelikult $n \equiv 4, 5 \bmod 9$, mis aga on jällegi vastuolus võdrusega $n = b^3$.

Järelikult jääb järele ainult võimalus, et n jagub 4-ga.

18. Hulk M sisaldab kõik arvud 1, 2, ..., 2007 ning rahuldab järgmist tingimust: kui arv n kuulub hulka M, siis kuuluvad hulka M ka niisuguse aritmeetilise jada kõik liikmed, mille esimene liige on n ning vahe $n + 1$. Kas peab leiduma niisugune naturaalarv m, et hulk M sisaldab kõik arvust m suuremad naturaalarvud?

Vastus: ei.

Lahendus. Kontranäiteks sobib hulk

$$M = \mathbb{N} \setminus \{a : a + 1 \text{ on 2008-st suurem algarv}\}.$$

Ühest küljest $\{1, 2, \ldots, 2007\} \subset M$. Teisalt veendume, et kõik ülesandes kirjeldatud aritmeetilised jadad $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ koosnevad alates teisest elemendist ainult niisugustest arvudest, mis ühe võrra suurendatuna on kordarvud. Tõepoolest, kui $a_1 = n$ ja $d = n + 1$, siis on jada üldliige a_k kujul

$$a_k = a_1 + (k-1)d = n + (k-1)(n+1) = k(n+1) - 1$$

ning $a_k + 1 = k(n+1)$ on kordarv, kui $k \geqslant 2$.

19. Milliste naturaalarvude n korral saab hulga $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ tükeldada

   a) kaheks;

   b) kolmeks

võrdse suurusega paarikaupa ühisosata alamhulgaks nii, et igaüks neist alamhulkadest sisaldab kõigi oma elementide aritmeetilist keskmist?

Vastus: a) sobivad kõik paarisarvud peale $n = 4$; b) sobivad kõik kolmega jaguvad paaritud arvud n.

Lahendus. a) Kuna hulk M tuleb tükeldada kaheks võrdse suurusega alamhulgaks, siis ilmselt peab n olema paarisarv; olgu $n = 2k$. Samuti on lihtne näha, et $n = 4$ koral ei saa nõutavat tükeldust olemas olla, sest kahe erineva arvu aritmeetiline keskmine ei saa võrduda kummagagi neist. Teiste väikeste paarisarvude korral on sobiv tükeldus toodud järgmises tabelis:

$n = 2$	$\{\mathbf{1}\}$	$\{\mathbf{2}\}$
$n = 6$	$\{1, \mathbf{2}, 3\}$	$\{4, \mathbf{5}, 6\}$
$n = 8$	$\{2, 3, \mathbf{4}, 7\}$	$\{1, \mathbf{5}, 6, 8\}$
$n = 10$	$\{1, 2, \mathbf{3}, 4, 5\}$	$\{6, 7, \mathbf{8}, 9, 10\}$
$n = 12$	$\{1, 2, 3, \mathbf{4}, 6, 8\}$	$\{5, 7, \mathbf{9}, 10, 11, 12\}$

Näitame, kuidas konstrueerida sobiv tükeldus $n = 2k$ $(k \neq 2)$ korral.

Kui k on paaritu, sobib tükeldus

$$A = \{1, 2, \ldots, k\}, \quad B = \{k+1, k+2, \ldots, 2k\}.$$

Tõepoolest, alamhulga A elementide aritmeetiline keskmine on $\frac{1}{2}(k+1)$, mis on naturaalarv alamhulgast A; analoogiline arutelu kehtib ka alamhulga B korral, mille elementide aritmeetiline keskmine on $\frac{1}{2}(3k+1)$.

Olgu nüüd k paarisarv. Juhul $k = 4$ on sobiv konstruktsioon esitatud ülal. Juhul $k \geqslant 6$ sobib konstruktsioon

$$A = \{1, 2, \ldots, k-2, k, \tfrac{1}{2}(3k-2)\}, \quad B = M \setminus A.$$

Lihtne arvutus näitab, et alamhulga A elementide aritmeetiline keskmine on $\frac{1}{2}(k+2)$ ning alamhulga B elementide aritmeetiline keskmine on $\frac{3}{2}k$; mõlemad arvud on vastavate hulkade elemendid.

b) Ilmselt peab n jaguma 3-ga; olgu $n = 3k$. Hulga M kõigi elementide summa on $s = \frac{1}{2}3k(3k+1)$. Kui M on ülesande tingimustele vastavalt tükeldatud kolmeks alamhulgaks A, B, C, siis peab nende alamhulkade elementide aritmeetiliste keskmiste summa olema $\frac{s}{k} = \frac{3}{2}(3k+1)$. Kuna see arv peab olema täisarv, siis peab k olema paaritu.

Paaritu k korral sobib jaotus

$$A = \{1, 2, \ldots, k\}, \quad B = \{k+1, k+2, \ldots, 2k\}, \quad C = \{2k+1, 2k+2, \ldots, 3k\}.$$

Nende alamhulkade elementide aritmeetilised keskmised on vastavalt $\frac{1}{2}(k+1)$, $\frac{1}{2}(3k+1)$ ja $\frac{1}{2}(5k+1)$, mis on kõigil kolmel juhul ka vastava hulga elemendiks.

Märkus. Ülesande a-osas võib konstruktsiooni paaris $k > 4$ jaoks anda ka järgmiselt. Eraldame arvudest $1, 2, \ldots, 2k$ keskmised 8 ja jagame nad kahte rühma vastavalt ülaltoodud viisile 8 arvu jagamiseks. Siis ühe rühma keskmine on k ja teise rühma keskmine on $k+1$. Ülejäänud paaritud arvud lisame esimesse rühma ja paarisarvud teise rühma. Kuna paaritud arvud jagunevad paaridesse $(i, 2k-i)$, siis nende keskmine on k, analoogselt on paarisarvude keskmine $k+1$.

20. Tõesta, et arv 111111111 ei ole kolme järjestikuse täisarvu korrutis üheski arvusüsteemis alusega $n \geqslant 2$.

Lahendus. Leiame arvu 111111111 väärtuse:

$$\begin{aligned}
111111111 &= 1 + n + n^2 + \ldots + n^8 = \\
&= \frac{n^9 - 1}{n - 1} = \\
&= \frac{(n^3 - 1)(n^6 + n^3 + 1)}{n - 1} = \\
&= \frac{(n - 1)(n^2 + n + 1)(n^6 + n^3 + 1)}{n - 1} = \\
&= \bigl(n(n+1) + 1\bigr) \cdot \bigl(n^3(n^3 + 1) + 1\bigr).
\end{aligned}$$

Kuna $n(n+1)$ ja $n^3(n^3+1)$ on alati paarisarvud, peab 111111111 olema paaritu. Samas on kolme järjestikuse täisarvu korrutis alati paaris.

Märkus. Sihile jõuab ka ilma tegurdamata, uurides summa $1 + n + n^2 + \ldots + n^8$ paarsust liidetavate kaupa. Kui n on paaris, siis esimene liidetav on paaritu, teised paaris, mistõttu summa on paaritu. Kui n on paaritu, siis on kõik liidetavad paaritud, mistõttu summa on paaritu, sest liidetavaid on paaritu arv (9). Järelikult 111111111 on mistahes arvusüsteemis paaritu ning ei saa seetõttu olla järjestikuste täisarvude korrutis.