Тренировочное соревнование для команды “Балтийского пути 2007”

Тарту, 28 октября 2007

1. На плоскости дана окружность k с центром S и точка $A \neq S$. Найти на плоскости геометрическое место точек центров описанных окружностей всех таких треугольников ABC, при которых BC является диаметром k.

2. Псть M – произвольная внутренняя точка гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. Пусть S, S_1 и S_2 – центры описанных окружностей треугольников ABC, AMC и BMC соответственно. Доказать, что точки M, C, S, S_1 и S_2 лежат на одной окружности. При какой точке M радиус этой окружности наименьший из возможных?

3. Пусть a, b, c – длины сторон некоторого треугольника, m_a, m_b, m_c – длины медиан этого треугольника, а R – радиус её описанной окружности. Доказать неравенство
$$2R(m_a + m_b + m_c) \geqslant a^2 + b^2 + c^2 \,.$$

4. Пусть $ABCD$ – вписанный четырёхугольник, а L и M – центры вписанных окружностей треугольников BCA и BCD. Пусть R – точка пересечения перпендикуляров, опущенных из точек L и M соответственно на прямые AC и BD. Доказать, что треугольник LMR равнобедренный.

5. Дан выпуклый многогранник с гранями $S_1, S_2, \dots, S_n$, площади которых равны соответственно $P_1, P_2, \dots, P_n$. Для каждой грани S_i рассмотрим перпендикулярный ей вектор $\vec{v}_i$, направленный наружу из многогранника и имеющий длину P_i. Доказать, что $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \ldots + \vec{v}_n = \vec{0}$.

6. Пусть x, y и z такие положительные действительные числа, что $xyz = 1$. Доказать, что если
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqslant x + y + z \,,$$
то при любом положительном целом числе k выполняется
$$\frac{1}{x^k} + \frac{1}{y^k} + \frac{1}{z^k} \geqslant x^k + y^k + z^k \,.$$

7. Пусть $\{x\}$ обозначает дробную часть действительного числа x, т.е. $\{x\} = x - [x]$. Доказать, что при любом натуральном n выполняется
$$\sum_{k=1}^{n^2} \{\sqrt{k}\} \leqslant \frac{n^2 - 1}{2} \,.$$

8. Пусть $n > 3$ и $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такие действительные числа, что
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n \quad \text{и} \quad a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant n^2 \,.$$
Доказать, что $\max(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geqslant 2$.

9. Найти все квадратные многочлены $P(x) = x^2 + ax + b$ с целочисленными коэффициентами, для которых найдётся такой многочлен $Q(x)$ с целочисленными коэффициентами, что все коэффициенты многочлена $P(x) \cdot Q(x)$ равны ± 1.

10. Доказать, что найдётся бесконечно много таких натуральных чисел n, для которых $[n\sqrt{3}]$ является степенью числа 2. (Здесь $[x]$ обозначает целую часть x.)

11. Для каких натуральных чисел n возможно разделить клетчатое поле $n \times n$ на квадраты 2×2 и 3×3 так, чтобы в разбиении оказалось хотя бы по одному квадрату обоих размеров?

12. На столе три пустых корзины. Три игрока – Андрей, Максим и Ерёма – играют в выборы. Сначала они определяют очерёдность ходов и затем начинают по очереди добавлять бюллетени в корзины, причём Андрей на своём ходу может положить бюллетень только в первую или вторую корзину, Максим только во вторую или третью корзину, а Ерёма только в первую или третью корзину. Игрок, после хода которого в какой-либо корзине впервые оказалось 2007 бюллетеней, проигрывает. Доказать, что Андрей и Максим могут так подыграть друг другу, что Ерёма обязательно проиграет.

13. Клетки клетчатого поля размером $m \times n$ (где m, $n \geqslant 2$) пронумерованы натуральными числами от 1 до mn так, что каждые две клетки с подряд идущими номерами имеют общую сторону. Доказать, что найдётся такое натуральное число k, что у клеток под номерами k и $k+3$ есть общая сторона.

14. Рассмотрим все возможные пути $P_0P_1\dots P_n$, удовлетворяющие условиям:

    а) все точки P_i имеют целочисленные координаты,

    б) все отрезки $P_{i-1}P_i$ имеют длину 1,

    в) точка P_0 имеет координаты $(0,0)$,

    г) точка P_n находится на оси x.

    Доказать, что количество таких путей $F(n)$ равно количеству n-элементных подмножеств в $2n$-элементном множестве.

15. Для рекламы популярной телепередачи, в которой участвуют 8 знаменитостей, делают n плакатов, на каждом из которых одна или больше из этих 8 знаменитостей, но при этом ни на каких двух плакатах нет полностью одинакового состава людей. Также известно, что всегда если из этих 8 людей выбрать некоторое непустое множество, но не всех, то количество плакатов, где присутствует по крайней мере один из выбранных людей, будет чётным числом. Найти все возможные значения n.

16. Найти все положительные целые числа x, y, при которых выполняется равенство

    $$x! + y! = x^y\,.$$

17. Доказать, что если для каких-то положительных целых чисел n и k выполняется равенство

    $$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = k^3\,,$$

    то n делится на 4.

18. Множество M содержит все числа 1, 2, …, 2007 и удовлетворяет следующему условию: если число n принадлежит множеству M, то множеству M принадлежат также и все члены арифметической прогрессии, первый член которой равен n, а разность равна $n+1$. Найдётся ли такое натуральное число m, что множество M содержит все натуральные числа, большие m?

19. При каких натуральных числах n множество $M = \{1, 2, \dots, n\}$ можно разбить на

    a) два;

    b) три

    непересекающихся подмножества равной величины так, что каждое из этих подмножеств содержит среднее арифметическое всех своих элементов?

20. Доказать, что число 111111111 не является произведением трёх подряд идущих целых чисел ни в одной системе исчисления с основанием $n \geqslant 2$.