Treeningvõistlus "Balti tee 2006" võistkonnale

Tartus, 29. oktoobril 2006

1. Kolme järjestikuse täisarvu kuupide summa on mingi täisarvu kuup. Tõesta, et keskmine neist kolmest arvust jagub 4-ga.

2. Leia kõik sellised positiivsete täisarvude paarid (a, b), mille korral

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}}$$

on ratsionaalarv.

3. Olgu $n \geqslant 2$ täisarv ja p algarv, kusjuures $p-1$ jagub arvuga n ning n^3-1 jagub arvuga p. Tõesta, et arv $4p-3$ on mingi täisarvu ruut.

4. Leia kõik sellised positiivsed täisarvud n, mille korral leiduvad niisugused ratsionaalarvud a ja b, et a ega b ei ole täisarv, kuid $a+b$ ja a^n+b^n on mõlemad täisarvud.

5. Tõesta, et kui positiivne täisarv N esitub kolme sellise täisarvu ruutude summana, mis kõik jaguvad 3-ga, siis N esitub ka kolme sellise täisarvu ruutude summana, millest ükski ei jagu 3-ga.

6. Ringjooned $\mathcal{C}_1$ ja $\mathcal{C}_2$ lõikuvad punktides A ja B. Ringjoonele $\mathcal{C}_2$ punktis A tõmmatud puutuja lõikab ringjoont $\mathcal{C}_1$ teistkordselt punktis C ning ringjoonele $\mathcal{C}_1$ punktis A tõmmatud puutuja lõikab ringjoont $\mathcal{C}_2$ teistkordselt punktis D. Punktist A nurga CAD sisepiirkonda tõmmatud kiir lõikab ringjoont $\mathcal{C}_1$ punktis M, ringjoont $\mathcal{C}_2$ punktis N ning kolmnurga ACD ümberringjoont punktis P. Tõesta, et $|AM| = |NP|$.

7. Olgu D võrdhaarse kolmnurga ABC aluse BC keskpunkt. Olgu E punktist D haarale AB tõmmatud ristlõigu aluspunkt ning F lõigu DE keskpunkt. Tõesta, et lõigud AF ja CE on teineteisega risti.

8. Kolmnurgas ABC on $\angle A = 60^\circ$. Olgu D suvaliselt valitud punkt kolmnurga küljel BC ning O_1 ja O_2 vastavalt kolmnurkade ABD ja ACD ümberringjoonte keskpunktid. Olgu M sirgete BO_1 ja CO_2 lõikepunkt ning N kolmnurga DO_1O_2 ümberringjoone keskpunkt. Tõesta, et kolmnurga ABC ümberringjoonel leidub selline fikseeritud punkt T, mida sirge MN läbib punkti D mistahes valiku korral.

9. Kolmnurga kaks mediaani on teineteisega risti. Tõesta, et selle kolmnurga mediaanide pikkused on mingi täisnurkse kolmnurga küljepikkusteks.

10. Raadiusega 1 ringi sisepiirkonnas võetakse $n \geqslant 2$ paarikaupa erinevat punkti $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Tähistagu iga $i = 1, 2, \ldots, n$ korral d_i kaugust punktist A_i lähima punktini A_j, kus $j \neq i$. Tõesta, et

$$d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2 \leqslant 16\,.$$

11. Tähistagu reaalarvu x korral $\lfloor x \rfloor$ suurimat täisarvu, mis ei ületa arvu x, ning olgu $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Leia kõik sellised positiivsed reaalarvud x, mille korral $\{x\}$, $\lfloor x \rfloor$ ja x selles järjekorras võetuna on mingi geomeetrilise jada kolm järjestikust liiget.

12. Leia võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x^{2006} + y^{2006} + z^{2006} = 2\,, \\ x^{2007} + y^{2007} + z^{2007} = 2\,, \\ x^{2008} + y^{2008} + z^{2008} = 2 \end{cases}$$

kõik reaalarvulised lahendid.

13. Olgu a, b, c mingi kolmurga külgede pikkused ning α, β, γ vastavalt nende külgede vastasnurkade suurused. Tõesta, et kui a, b ja c on mingi aritmeetilise jada kolm järjestikust liiget, siis $\cot\frac{\alpha}{2}$, $\cot\frac{\beta}{2}$ ja $\cot\frac{\gamma}{2}$ on samuti mingi aritmeetilise jada kolm järjestikust liiget.

14. Olgu $f(x) = x^2 + ax + b$. On teada, et võrrandil $f\big(f(x)\big) = 0$ on neli erinevat reaalarvulist lahendit, millest mingi kahe summa on -1. Tõesta, et $b \leqslant -\frac{1}{4}$.

15. Leia avaldise $x^2 + y^2$ vähim võimalik väärtus, kui x ja y on reaalarvud, mis rahuldavad tingimust

$$xy \cdot (x^2 - y^2) = x^2 + y^2 \ ,$$

ning $x \neq 0$.

16. Mängu *Nelipe* mängitakse 16×16 ruudust koosneval mängulaual, mis on jaotatud kuueteistkümneks 4×4 osaks. Kaks mängijat kirjutavad kordamööda mängulaua ruutudesse arve hulgast $\{1, 2, \ldots, 16\}$, kusjuures mängulaua igas reas, igas veerus ja igas 4×4 osas peavad kõik arvud olema erinevad. Mängija, kes ei saa reeglitele vastavat käiku teha, kaotab. Kummal mängijatest on olemas võitev strateegia?

17. Ümber Päikese tiirlevad 10 planeeti. Tõesta, et mistahes ajahetkel leidub Päikese pinnal selline punkt, millest on korraga nähtavad ülimalt 4 planeeti. (Eeldame, et Päike ja kõik planeedid on kerakujulised ning planeetide raadiused on väiksemad Päikese raadiusest.)

18. Olgu (mitte tingimata kumera) n-nurga 90-kraadiste sisenurkade arv k.

    a) Tõesta, et alati $k \leqslant \frac{2}{3}(n+2)$, kusjuures $n \neq 4$ korral on võrratus range.

    b) Tõesta, et kui $n \geqslant 6$ ja $n+2$ ei jagu 3-ga, siis on alati võimalik konstrueerida n-nurk, mille korral $k = \left\lfloor \frac{2}{3}(n+2) \right\rfloor$ (kus $\lfloor x \rfloor$ tähistab suurimat täisarvu, mis ei ületa arvu x).

19. Ruudustik koosneb 2 horisontaalsest reast ja n veerust ning selle ruutudel on algul kokku 2^n münti (igal ruudul võib olla suvaline arv münte, sealhulgas 0). Igal käigul valitakse üks ruut, millel on vähemalt 2 münti, võetakse sealt 2 münti ära ning lisatakse 1 neist müntidest selle ruudu ülemisele või parempoolsele naaberruudule. Tõesta, et on võimalik teha käike nii, et ülemise rea äärmisel parempoolsel ruudul on lõpuks vähemalt üks münt.

20. Ruudustik mõõtmetega 30×30 kaetakse mingil viisil 450 doominokiviga, millest igaüks katab kaks naaberruutu. Tõesta, et need doominokivid saab värvida kolme värviga nii, et iga värvi doominokive oleks ühepalju ning igal doominokivil oleks ülimalt kaks temaga sama värvi naaberkivi (kaht doominokivi loeme naaberkivideks, kui mingitel nende poolt kaetavatel ruutudel on ühine külg).