Treeningvõistlus “Balti tee 2006” võistkonnale

Tartus, 29. oktoobril 2006

Vastused ja lahendused

1. Olgu x keskmine vaadeldavast kolmest järjestikusest täisarvust, siis

$$(x-1)^3 + x^3 + (x+1)^3 = y^3 ,$$

kus y on mingi täisarv. Avades sulud ja koondades saame

$$3x(x^2+2) = y^3 ,$$

st. y jagub 3-ga. Olgu $y = 3z$, siis $x(x^2+2) = 9z^3$. Ilmselt SÜT$(x,\, x^2+2) \leqslant 2$. Näitame järgnevalt, et juht SÜT$(x,\, x^2+2) = 1$ ei ole võimalik.

Tõepoolest, kui SÜT$(x,\, x^2+2) = 1$, siis peab olema kas $x = 9u^3$ ja $x^2+2 = v^3$ või $x = u^3$ ja $x^2+2 = 9v^3$, kus u ja v on mingid täisarvud. Asendades x avaldise teise võrdusse, saame vastavalt $81u^6+2 = v^3$ või $u^6+2 = 9v^3$, mis mõlemad on vastuolus sellega, et mistahes täisarvu kuup annab 9-ga jagamisel jäägi 0 või ± 1.

Järelikult SÜT$(x,\, x^2+2) = 2$. Seega on x ja z paarisarvud, mistõttu $x(x^2+2)$ jagub 8-ga. Kuna x^2+2 ei jagu 4-ga, siis peab x jaguma 4-ga.

Märkus: ülesande tingimustele vastavad arvud on olemas: $3^3+4^3+5^3 = 6^3$.

2. *Vastus:* $a = 3,\ b = 2$ on ainus sobiv paar.

Olgu $q = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}}$ ratsionaalarv, siis

$$\sqrt{a} - q\sqrt{b} = q\sqrt{3} - \sqrt{2} ,$$

kust võrduse pooli ruutu võttes ja liikmeid grupeerides saame

$$2q(\sqrt{ab} - \sqrt{6}) = a + q^2(b-3) - 2 .$$

Seega peab $q_1 = \sqrt{ab} - \sqrt{6}$ olema ratsionaalarv. Võttes võrduse $\sqrt{ab} = \sqrt{6} + q_1$ pooled ruutu, saame

$$2q_1\sqrt{6} = ab - 6 - q_1^2 ,$$

mis saab kehtida ainult $q_1 = 0$ korral. Seega $ab = 6$; vaadates läbi neli võimalikku juhtu näeme, et ainsana sobib $a = 3,\ b = 2$.

3. Kuna $n^3 - 1 = (n-1)(n^2+n+1)$ jagub algarvuga p, siis peab üks teguritest $n-1$ või n^2+n+1 jaguma p-ga. Et $n > 1$ ning $n < p$ (kuna $p-1$ jagub arvuga n), siis $n-1$ ei saa jaguda p-ga. Järelikult n^2+n+1 jagub p-ga, st. $n^2+n+1 = pt$, kus $t \geqslant 1$ on täisarv. Teisalt $p = nk+1$ mingi täisarvu k korral (kuna $p-1$ jagub arvuga n), mistõttu $n^2+n+1 = (nk+1)(nk'+1)$ (kuna korrutis ja esimene tegur annavad n-ga jagamisel jäägi 1, siis peab ka teine tegur andma n-ga jagamisel jäägi 1). Kui $k' > 0$, siis oleks võrduse parem pool vasakust poolest suurem, seega $k' = 0$, st. $n^2+n+1 = nk+1 = p$, kust $4p - 3 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2$.

4. *Vastus:* parajasti kõik paaritud arvud n.

Olgu n paaritu ning $a = \dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{2^n-1}{2}$. Siis a ega b ei ole täisarvud, $a+b = 2^{n-1}$ on täisarv ning

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}) = 2^{n-1} \cdot (a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}) .$$

Siin teine tegur on summa murdudest, mille ühine nimetaja on 2^{n-1}, seega ka $a^n + b^n$ on täisarv.

Olgu nüüd n paarisarv, $n = 2k$. Oletame, et nõutava omadusega ratsionaalarvud a ja b on olemas. Kuna summa $a + b$ on täisarv, siis peab a ja b esitustes taandumatute murdudena nimetaja olema üks ja sama, st. $a = \dfrac{p}{d}$ ja $b = \dfrac{q}{d}$, kus $p + q$ jagub d-ga, ning seega ka $p^n + q^n$ jagub d-ga. Teisalt aga

$$\begin{aligned} p^n + q^n &= (p^{2k} - q^{2k}) + 2q^{2k} = (p^2 - q^2)(p^{2k-2} - p^{2k-4}q^2 + \ldots + q^{2k-2}) + 2q^{2k} = \\ &= (p + q)K + 2q^{2k} , \end{aligned}$$

kus $K = (p - q)(p^{2k-2} - p^{2k-4}q^2 + \ldots + q^{2k-2})$ on täisarv. Et $p^n + q^n$ ja $p + q$ jaguvad mõlemad d-ga, siis peab ka $2q^{2k}$ jaguma d-ga. Murru $\dfrac{q}{d}$ taandumatuse tõttu järeldub siit, et $d = 2$. Siis aga on p^n ja q^n paaritute täisarvude ruudud ning nende summa $p^n + q^n$ ei jagu 4-ga, mis on vastuolus sellega, et $\dfrac{p^n + q^n}{d^n} = \dfrac{p^n + q^n}{2^{2k}}$ on täisarv.

5. Ülesande tingimusest järeldub, et

$$N = 9^n(a^2 + b^2 + c^2) ,$$

kus a, b, c ja n on täisarvud, $n \geqslant 1$ ning a ei jagu 3-ga. Näitame, et siis arvu N saab esitada kujul

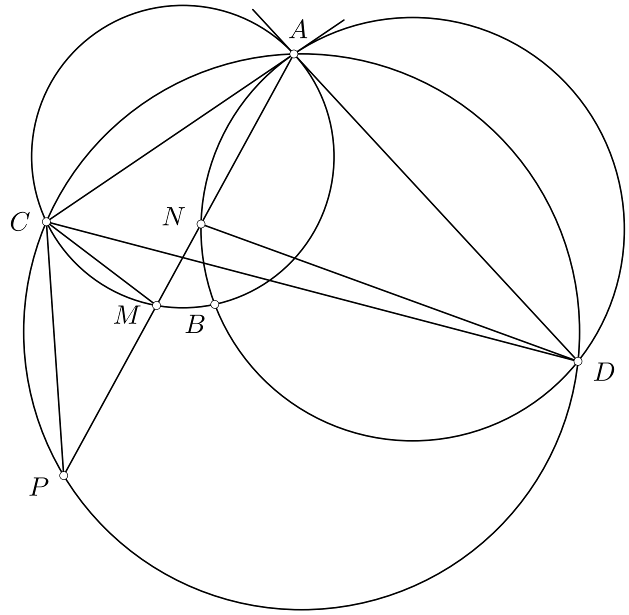
$$N = 9^{n-1}(x^2 + y^2 + z^2) ,$$

kus x, y, z ei jagu ükski 3-ga. Tõepoolest, üldisust kitsendamata võime eeldada, et $a + b + c$ ei jagu 3-ga (vastasel korral võtame a asemele $-a$). Siis

$$\begin{aligned} 9(a^2 + b^2 + c^2) &= (4a^2 + 4b^2 + c^2) + (4b^2 + 4c^2 + a^2) + (4c^2 + 4a^2 + b^2) = \\ &= (2a + 2b - c)^2 + (2b + 2c - a)^2 + (2c + 2a - b)^2 . \end{aligned}$$

Igaüks arvudest $2a + 2b - c$, $2b + 2c - a$ ja $2c + 2a - b$ annab 3-ga jagamisel sellesama jäägi mis arv $-(a + b + c)$, st. vastavalt tehtud eeldusele ei jagu 3-ga.

Ülesande väite tõestuseks piisab nüüd rakendada sama võtet n korda.



Joonis 1

6. Üldisust kitsendamata eeldame, et vaadeldav kiir paikneb nurga CAB sisepiirkonnas või piirjuhuna langeb kokku kiirega AB (vt. joonist 1). Et vastavalt teoreemile puutujast ja lõikajast $\angle MCA = \angle MAD$, siis

$$\angle CMP = \angle MCA + \angle CAM = \angle MAD + \angle CAM = \angle CAD .$$

Kuna lisaks $\angle CPM = \angle CDA$ (kolmnurga ACD ümberringjoone kõõlule AC toetuvad piirdenurgad), siis kolmnurgad ACD ja MCP on sarnased ning

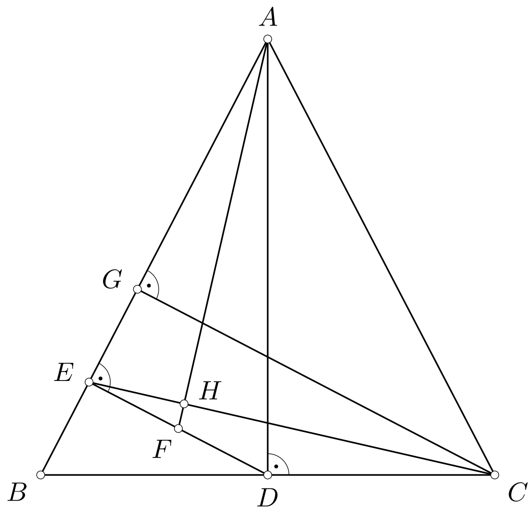
$$\frac{|MC|}{|AC|} = \frac{|MP|}{|AD|} .$$

Rakendades jällegi teoreemi puutujast ja lõikajast saame, et $\angle ACM = \angle MAD = \angle NAD$ ja $\angle CAM = \angle CAN = \angle ADN$, mistõttu kolmnurgad ACM ja DAN on sarnased ning

$$\frac{|AN|}{|AD|} = \frac{|MC|}{|AC|} .$$

Seega $|MP| = |AN|$, ehk $|AM| = |NP|$.

7. *Lahendus 1.* Olgu H lõikude AF ja CE lõikepunkt ning G tipust C küljele AB tõmmatud kõrguse aluspunkt (vt. joonist 2). Siis $\angle AED = \angle BGC = 90°$ ja $\angle EDA = 90° - \angle EDB = \angle GBC$, mistõttu kolmnurgad EDA ja GBC on sarnased. Kuna $DE \parallel CG$ ja D on lõigu BC keskpunkt, siis E on lõigu BG keskpunkt ning CE on kolmnurga GBC mediaan. Et AF on kolmnurga EDA mediaan, siis kolmnurkade EDA ja GBC sarnasusest saame nüüd, et $\angle FAD = \angle ECB$. Niisiis on $HDCA$ kõõlnelinurk ja $\angle AHC = \angle ADC = 90°$.



Joonis 2

Lahendus 2. Vaatleme vektoreid

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ED}$$

ja

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EB} - 2\overrightarrow{ED} .$$

Kuna $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{ED}$ ja $\overrightarrow{EB} \perp \overrightarrow{ED}$, siis

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CE} = \left(\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ED}\right) \cdot \left(\overrightarrow{EB} - 2\overrightarrow{ED}\right) = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{ED}$$

ning

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EB} = \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{ED}\right) \cdot \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AD} \cdot \left(\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DB}\right) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{ED} ,$$

kust

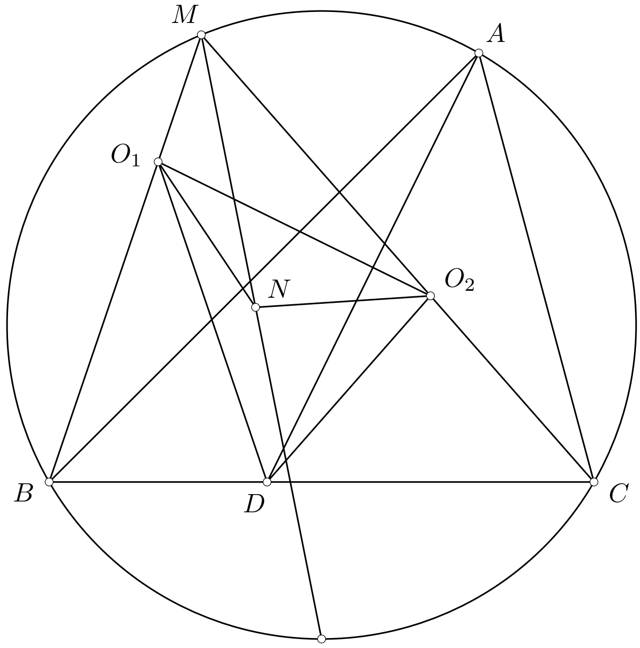
$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{ED} = \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{ED}\right) \cdot \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{ED} = 0 .$$

8. Olgu ω kolmnurga ABC ümberringjoon (vt. joonist 3). Kuna piirdenurk moodustab poole samale kõõlule toetuvast kesknurgast, siis $\angle O_1BC = 90° - \angle BAD$ ja $\angle O_2CB = 90° - \angle CAD$, mistõttu

$$\angle BMC = 180° - \angle O_1BC - \angle O_2CB = \angle BAD + \angle CAD = \angle BAC .$$

Niisiis paikneb punkt M ringjoonel ω. Edasi

$$\angle O_1DO_2 = 180° - \angle O_1BC - \angle O_2CB = \angle BMC = \angle BAC = 60°$$

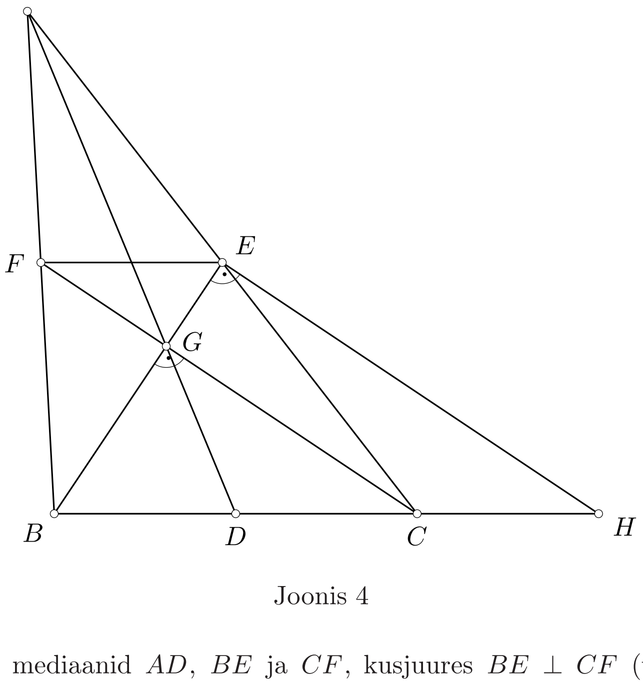


Joonis 3

ning $\angle O_1NO_2 = 2\angle O_1DO_2 = 120^\circ$, st. MO_1NO_2 on kõõlnelinurk. Seega

$$\angle NMO_1 = \angle O_1O_2N = 90^\circ - \angle O_1DO_2 = 30^\circ$$

ning analoogiliselt $\angle NMO_2 = 30^\circ$. Niisiis on sirge MN kõõlule BC toetuva piirdenurga BMC poolitaja ning lõikab ringjoont ω teistkordselt kaare BC keskpunktis, olenemata punkti D valikust.



Joonis 4

9. Olgu kolmnurga ABC mediaanid AD, BE ja CF, kusjuures $BE \perp CF$ (vt. joonist 4). Olgu G mediaanide lõikepunkt, siis kolmnurk BGC on täisnurkne ning selle hüpotenuusi keskpunkt D on ühtlasi kolmnurga BGC ümberringjoone keskpunkt. Seetõttu $|BD| = |CD| = |GD|$ ja $|BC| = 2|GD|$. Tõmbame mediaaniga CF paralleelse sirge läbi punkti E: lõigaku see sirget BC punktis H. Et $FE \parallel BC$ (kolmnurga kesklõik ja külg), siis $CHEF$ on rööpkülik ning

$$|CH| = |FE| = \frac{1}{2}|BC| = |GD| \,.$$

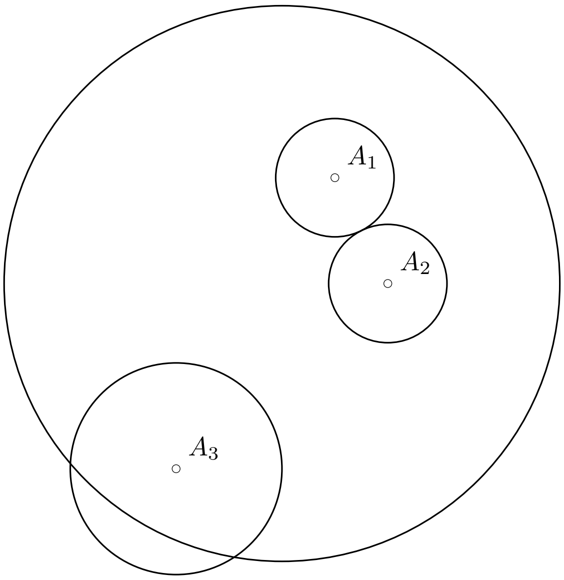
Et $|CH| = \frac{1}{3}|BH|$ ja $|GD| = \frac{1}{3}|AD|$, siis $|BH| = |AD|$. Kolmnurga ABC mediaanide AD, BE ja CF pikkused on niisiis vastavalt võrdsed täisnurkse kolmnurga BEH külgede BH, BE ja EH pikkustega.

10. Tähistagu K_i ringi keskpunktiga A_i ja raadiusega $\frac{d_i}{2}$ (vt. joonist 5).

Kuna mistahes $i = 1, 2, \ldots, n$ korral $d_i < 2$, siis $1 + \frac{d_i}{2} < 2$, st. kõik ringid K_i sisalduvad ülesandes antud ringiga kontsentrilises ringis raadiusega 2. Teisalt – kuna mistahes $i \neq j$ korral $d_i \leqslant |A_iA_j|$ ja $d_j \leqslant |A_iA_j|$, siis $\frac{d_i}{2} + \frac{d_j}{2} \leqslant |A_iA_j|$, st. ringid K_i on paarikaupa ühiste sisepunktideta. Seetõttu

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d_i}{2}\right)^2 \pi \leqslant 4\pi \ ,$$

ehk $\sum_{i=1}^{n} d_i^2 \leqslant 16$.



Joonis 5

11. *Vastus:* $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ on ainus selline arv.

Lahendus 1. Kui $\{x\}$, $\lfloor x \rfloor$ ja x selles järjekorras võetuna on mingi geomeetrilise jada kolm järjestikust liiget, siis $\{x\} \cdot x = \lfloor x \rfloor^2$.

Kui $\lfloor x \rfloor = 0$, siis $x = 0$, mis on vastuolus ülesande tingimusega.

Kui $\lfloor x \rfloor = 1$, siis $1 \leqslant x < 2$, $\{x\} = x - 1$ ja $\{x\} \cdot x = 1$, kust $x(x-1) = 1$. Saadud ruutvõrrandi lahendid on $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, millest positiivsuse nõude tõttu sobib ainult $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Olgu nüüd $\lfloor x \rfloor \geqslant 2$. Siis $\lfloor x \rfloor^2 \geqslant 2\lfloor x \rfloor$. Kuna $\{x\} \cdot x < x < \lfloor x \rfloor + 1 < 2\lfloor x \rfloor$, siis saame, et $\{x\} \cdot x < \lfloor x \rfloor^2$ – vastuolu.

Lahendus 2. Samuti nagu eelmises lahenduses paneme tähele, et kui $\{x\}$, $\lfloor x \rfloor$ ja x selles järjekorras võetuna on mingi geomeetrilise jada kolm järjestikust liiget, siis $\{x\} \cdot x = \lfloor x \rfloor^2$ ning peab olema $\lfloor x \rfloor > 0$. Seega

$$\frac{\lfloor x \rfloor}{\{x\}} = \frac{x}{\lfloor x \rfloor} = \frac{\lfloor x \rfloor + \{x\}}{\lfloor x \rfloor} = 1 + \frac{\{x\}}{\lfloor x \rfloor} \ .$$

Kui $\lfloor x \rfloor \geqslant 2$, siis selle võrduse vasak pool on suurem kui 2, parem pool aga on väiksem kui 2. Järelikult $\lfloor x \rfloor = 1$ ning

$$\frac{1}{\{x\}} = 1 + \{x\} \, .$$

Siit saame ruutvõrrandi $\{x\}^2 + \{x\} - 1 = 0$, mille lahendid on $\{x\} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Kuna $0 \leqslant \{x\} < 1$, siis sobib ainult $\{x\} = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, mis annab $x = 1 + \{x\} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

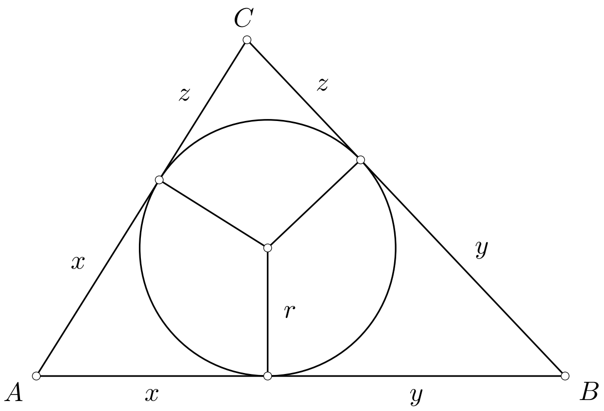
12. *Vastus:* $(0,\,1,\,1)$, $(1,\,0,\,1)$ ja $(1,\,1,\,0)$.
Liites esimese ja kolmanda võrrandi ning lahutades saadud tulemusest kaks korda teise võrrandi, saame

$$(x^{2006} + y^{2006} + z^{2006}) + (x^{2008} + y^{2008} + z^{2008}) - 2 \cdot (x^{2007} + y^{2007} + z^{2007}) = 0 \, ,$$

ehk

$$x^{2006} \cdot (x-1)^2 + y^{2006} \cdot (y-1)^2 + z^{2006} \cdot (z-1)^2 = 0 \, .$$

Siit näeme, et igaüks muutujatest x, y ja z saab olla ainult 0 või 1. On lihtne kontrollida, et ainsad lahendid on $(0,\,1,\,1)$, $(1,\,0,\,1)$ ja $(1,\,1,\,0)$.



Joonis 6

13. Meil on vaja näidata, et kui $a + c = 2b$, siis

$$\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\gamma}{2} = 2\cot\frac{\beta}{2} \, .$$

Olgu A, B ja C vastavalt pikkusega a, b ja c külgede vastastipud ning x, y ja z vastavalt tippudest A, B ja C kolmnurga siseringjoonele tõmmatud puutujalõikude pikkused (vt. joonist 6). Olgu r kolmnurga siseringjoone raadius ning $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, siis

$$x = \frac{b+c-a}{2} = p - a \, , \quad y = \frac{c+a-b}{2} = p - b \, , \quad z = \frac{a+b-c}{2} = p - c \, .$$

Kuna

$$\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{x}{r} = \frac{p-a}{r} \, , \quad \cot\frac{\beta}{2} = \frac{y}{r} = \frac{p-b}{r} \, , \quad \cot\frac{\gamma}{2} = \frac{z}{r} = \frac{p-c}{r} \, ,$$

siis

$$\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\gamma}{2} - 2\cot\frac{\beta}{2} = \frac{(p-a) + (p-c) - 2(p-b)}{r} = \frac{2b - a - c}{r} = 0 \, .$$

14. Olgu c_1 ja c_2 võrrandi $f(x)=0$ lahendid ning x_1 ja x_2 võrrandi $f\big(f(x)\big)=0$ sellised lahendid, et $x_1+x_2=-1$. Et võrrandi $f\big(f(x)\big)=0$ lahendite hulk koosneb võrrandite $f(x)=c_1$ ja $f(x)=c_2$ lahenditest, siis on kaks võimalust, mida järgnevalt vaatleme.

Kui x_1 ja x_2 on ühe ja sama võrrandi $f(x)=c_i$ lahendid, siis Viete'i valemitest saame, et $a=1$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $c_1\geqslant c_2$, siis võrdusest $c_1+c_2=-1$ saame, et $c_2\leqslant-\dfrac{1}{2}$. Et võrrandil $f(x)=c_2$ on reaalarvulised lahendid, peab selle diskriminant olema mittenegatiivne, st. $1-4b+4c_2\geqslant 0$, kust $b\leqslant-\dfrac{1}{4}$.

Kui x_1 ja x_2 on erinevate võrrandite $f(x)=c_i$ lahendid, siis võime üldisust kitsendamata eeldada, et $x_1^2+ax_1+b=c_1$ ja $x_2^2+ax_2+b=c_2$. Liites need võrdused, saame $x_1^2+x_2^2+a(x_1+x_2)+2b=c_1+c_2$. Et $c_1+c_2=-a$ ja $x_1+x_2=-1$, saame siit, et $x_1^2+x_2^2+2b=0$, kust

$$b=-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)\leqslant-\frac{1}{4}(x_1+x_2)^2=-\frac{1}{4}\,.$$

15. *Vastus:* 4.

Lahendus 1. Tähistame $A=x^2+y^2$ ja $B=x^2-y^2$, siis $x^2=\dfrac{A+B}{2}$ ja $y^2=\dfrac{A-B}{2}$ ning

$$xy=\sqrt{x^2y^2}=\sqrt{\Big(\frac{A+B}{2}\Big)\Big(\frac{A-B}{2}\Big)}\,.$$

(Üldisust kitsendamata võime siinkohal eeldada, et $xy\geqslant 0$, kuna $xy<0$ korral võime võtta $x'=-y$ ja $y'=x$, mis annab $x'y'(x'^2-y'^2)=x'^2+y'^2$, kus $x'y'=-xy>0$.)

Meil on nüüd vaja leida A vähim võimalik väärtus, kui

$$A=B\sqrt{\Big(\frac{A+B}{2}\Big)\Big(\frac{A-B}{2}\Big)}\,. \tag{1}$$

Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest saame, et

$$\sqrt{\Big(\frac{A+B}{2}\Big)\Big(\frac{A-B}{2}\Big)}\leqslant\frac{\dfrac{A+B}{2}+\dfrac{A-B}{2}}{2}=\frac{A}{2}\,.$$

Seega $A\leqslant\dfrac{A}{2}B$, kust $B\geqslant 2$ (sest $A=0$ korral peaks olema $x=0$, mis ei ole lubatud). Tõstes võrduse (1) pooled ruutu, saame

$$4A^2=B^2(A^2-B^2)\,.$$

Kuna $B=2$ korral ei ole see võrdus rahuldatud, võime kirjutada selle kujul

$$A^2=\frac{B^4}{B^2-4}\,.$$

Ilmselt kehtivast võrdusest $(B^2-8)^2\geqslant 0$ saame $B^4\geqslant 16(B^2-4)$. Kuna $B\geqslant 2$, saame siit, et

$$\frac{B^4}{B^2-4}\geqslant 16$$

ning seega $x^2+y^2=A\geqslant 4$. Jääb üle veenduda, et $x^2+y^2=4$ on võimalik – nt. $x=\sqrt{2+\sqrt{2}}$ ja $y=\sqrt{2-\sqrt{2}}$ korral.

Lahendus 2. Olgu α selline kompleksarv ning $k\geqslant 0$ ja θ sellised reaalarvud, et

$$\alpha=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy=k(\cos\theta+i\sin\theta)\,.$$

Siis

$$k=|\alpha|=|\sqrt{\alpha}|^2=x^2+y^2$$

ning

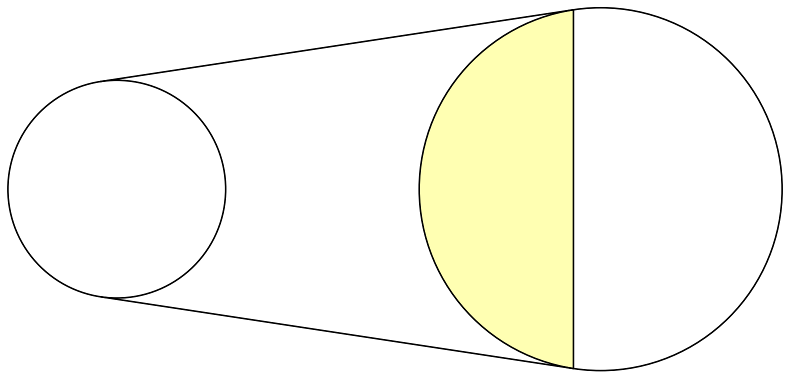
$$k\cos\theta = \mathrm{Re}(\alpha) = x^2 - y^2\,, \qquad k\sin\theta = \mathrm{Im}(\alpha) = 2xy\,.$$

Kuna $x^2 + y^2 = xy(x^2 - y^2)$, siis $|\alpha| = \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}(\alpha)\mathrm{Im}(\alpha)$, ehk $k = \dfrac{1}{2}k^2\cos\theta\sin\theta = \dfrac{1}{4}k^2\sin 2\theta$. Kuna $x \neq 0$, siis $k > 0$ ning $\dfrac{4}{k} = \sin 2\theta \leqslant 1$, kust $x^2 + y^2 = k \geqslant 4$. Nagu eelmiseski lahenduses, jääb üle veenduda, et $x^2 + y^2 = 4$ realiseerub, nt. $x = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ ja $y = \sqrt{2-\sqrt{2}}$ korral.

16. *Vastus:* võitev strateegia on alustaja vastasel.

Olgu mängijad A ja B, kusjuures A alustab. Näitame, et vastuseks A mistahes käigule, kus ta kirjutab mingi arvu k mingisse ruutu R, saab B alati kirjutada sama arvu k ruudustiku keskpunkti suhtes sümmeetrilisse ruutu $S(R)$.

Tõepoolest, rakendades seda strateegiat algusest peale tagab B, et A iga käigu eel on kõik ruudustikus olevad arvud paigutatud sümmeetriliselt ruudustiku keskpunkti suhtes, st. kui mingis ruudus R on arv m, siis ka sellega sümmeetrilises ruudus $S(R)$ on sama arv m, ning ruut R on tühi siis ja ainult siis, kui ruut $S(R)$ on tühi. Kuna ükski ruut ei ole sümmeetriline iseendaga, siis on ruut $S(R)$ tühi ka A käigu järel ruutu R, st. B saab sinna käia. Paneme tähele, et mistahes reas, veerus või ruudustiku 4×4 osas paiknevate ruutudega R sümmeetrilised ruudud $S(R)$ moodustavad parajasti rea, veeru või ruudustiku 4×4 osa, mis ei oma esialgsega ühiseid ruute. Seetõttu, kui B kirjeldatud käigu tulemusena mingis ruudustiku reas, veerus või 4×4 osas saaks rikutud arvude erinevuse tingimus, siis peaks sama tingimus olema rikutud sellega sümmeetrilise rea, veeru või 4×4 osa suhtes juba A eelneva käigu järel.



Joonis 7

17. Olgu Päikese pindala P. Et planeetide raadiused on väiksemad Päikese raadiusest, siis iga planeedi korral sisaldub nende punktide hulk Päikese pinnal, millest see planeet mingil fikseeritud ajahetkel on nähtav (nimetame seda planeedile vastavaks *mütsiks*) tervenisti Päikese sfäärilise pinna ühes pooles, ning selle pindala on seetõttu väiksem kui $\dfrac{1}{2}P$ (vt. joonist 7). Kõigile planeetidele vastavate mütside pindalade summa mistahes ajahetkel on niisiis väiksem kui $10\cdot\dfrac{1}{2}P = 5P$.

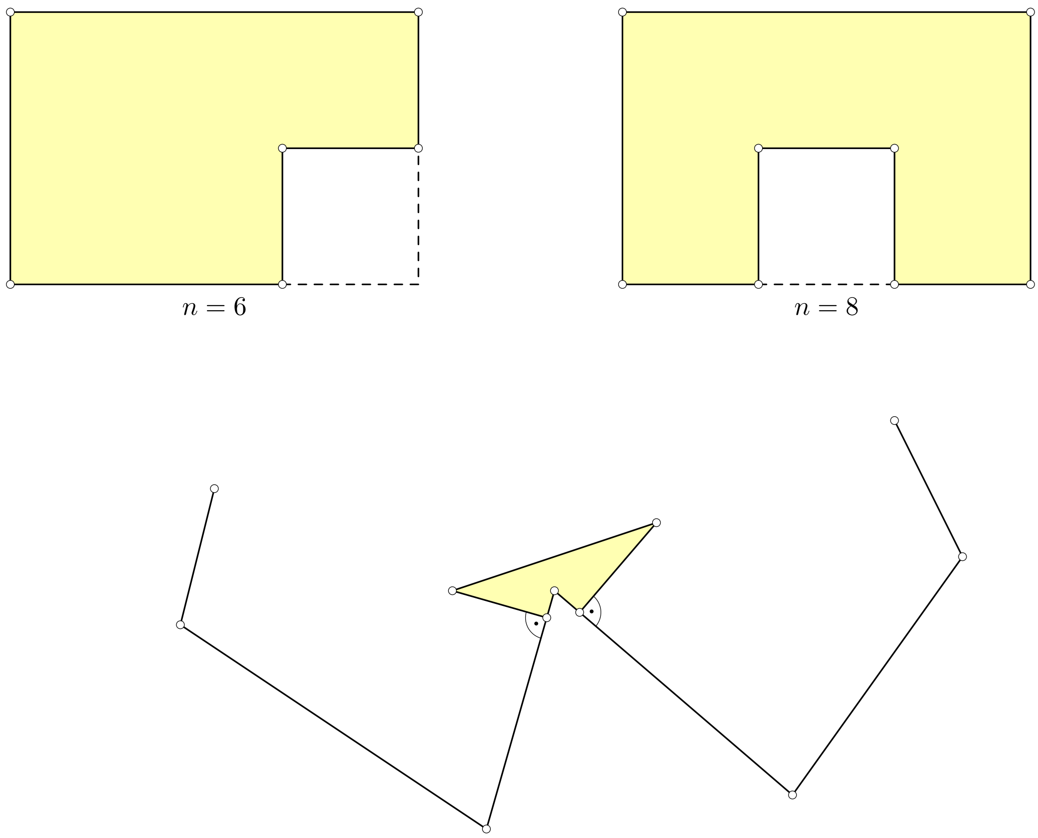
Oletades nüüd vastuväiteliselt, et mingil ajahetkel on igast punktist Päikese pinnal nähtavad vähemalt 5 planeeti, saame, et iga punkt Päikese pinnal peaks olema kaetud vähemalt 5 mütsiga – seega peaks kõigi mütside pindalade summa olema vähemalt $5P$.

18. a) Läbides n-nurga rajajoone kellaosuti vastassuunas, pöörame selle iga tipu juures vasakule või paremale. Igale 90° sisenurgale vastab seejuures pööre 90° võrra vasakule ning mistahes pööre paremale on vähem kui 180° võrra. Et kõigi pöörete kogusumma peab olema 360° vasakule, siis

$$k\cdot 90^\circ + (n-k)\cdot(-180^\circ) \leqslant 360^\circ\,,$$

ehk $3k \leqslant 2(n+2)$, kus võrdus on võimalik ainult siis, kui n-nurga *kõik* sisenurgad on 90°, st. $n = 4$ korral.

b) Paneme tähele, et n suurendamisel 3 võrra suureneb $\left\lfloor \dfrac{2}{3}(n+2)\right\rfloor$ parajasti 2 võrra. Seega piisab leida sobivad näited $n = 6$ ja $n = 8$ jaoks ning konstruktsioon, mis võimaldab lähtudes olemasolevast n-nurgast konstrueerida $(n+3)$-nurga nii, et selle 90° sisenurkade arv suureneb 2 võrra.



Joonis 8

Kui $n = 6$, on vajaliku omadusega näiteks ristkülik, mille ühe tipu juurest on "välja lõigatud" väike ruut. Kui $n = 8$, sobib ristkülik, mille ühe serva keskelt on "välja lõigatud" väike ristkülik. (vt. joonist 8).

Olgu meil nüüd n-nurk, kus $n > 4$ ja 90° sisenurkade arv on $k = \left\lfloor \frac{2}{3}(n+2) \right\rfloor$. Selline n-nurk peab ilmselt olema mittekumer, st. leidub tipp, mille juures olev sisenurk on suurem kui 180°. Valime selle tipu lähisküljedel mingid punktid, tõmbame neist kiired risti vastava küljega suunaga n-nurga sisepiirkonda ning valime neil kiirtel mingid punktid nii, et neid punkte ühendav lõik paikneks tervenisti n-nurga sisepiirkonnas (see on ilmselt alati võimalik, kui valida kiirte otspunktid piisavalt lähedale n-nurga tipule). Niiviisi oleme lisanud n-nurgale kolm uut külge ning asendanud ühe olemasoleva mitte-90° sisenurga nelja uue sisenurgaga, millest kaks on suurusega 90°.

19. Tõestame kõigepealt järgmise abitulemuse.

Lemma. Kui ruudustikus $1 \times n$ on kokku 2^{n-1} münti, siis saame teha selle ruudustiku piires käike nii, et äärmisel parempoolsel ruudul on lõpuks vähemalt üks münt.

Tõestame lemma induktsiooniga n järgi. Väide kehtib triviaalselt $n = 1$ korral. Kui nüüd ruudustikus $1 \times n$ on algul parempoolsel ruudul vähemalt üks münt, ei ole midagi tõestada; vastasel korral aga on selle vasakpoolses $1 \times (n-1)$ osas $2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-2}$ münti ning rakendades lemmat kaks korda $n-1$ korral, saame paremalt teisele ruudule vähemalt kaks münti. Jääb üle teha viimane käik, mille tulemusena on vähemalt üks münt äärmisel parempoolsel ruudul.

Tähistame edaspidi $2 \times n$ ruudustiku iga ruutu selle rea- ja veerunumbri abil, lugedes ridu ülevalt alla ja veerge vasakult paremale. Paneme tähele, et ülesande väide kehtib $n = 1$ korral (kui ülemises ruudus on algul münt, ei ole midagi tõestada; vastasel korral on alumises ruudus 2 münti ning piisab ühest käigust) ning kasutame induktsiooni n järgi.

Eeldame, et ruut $(1, n)$ on algul tühi – vastasel korral ei ole midagi tõestada. Vaatleme kolme võimalikku juhtu.

Kui ruudul $(2, n)$ on algul vähemalt kaks münti, siis piisab ilmselt ühest käigust.

Kui ruudul $(2, n)$ ei ole algul ühtki münti, siis on ruudustiku vasakpoolses $2 \times (n-1)$ osas algul $2^n = 2 \cdot 2^{n-1}$ münti. Kasutades kaks korda induktiivset eeldust, saame ruudule $(1, n-1)$ vähemalt kaks münti, ning veel ühe käiguga saame mündi ruudule $(1, n)$.

Olgu lõpuks ruudul $(2, n)$ algul üks münt. Siis ruudustiku vasakpoolses $2 \times (n-1)$ osas on algul $2^n - 1$ münti ning ühes selle reas peab olema vähemalt $2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-2}$ münti. Rakendades kaks korda lemmat $n-1$ korral, saame kas ruudule $(1, n-1)$ või ruudule $(2, n-1)$ kaks münti, ning järgmise ühe või kahe käiguga saame nõutava mündi ruudule $(1, n)$.

20. Värvime kõigepealt ruudustiku ruudud kolme värviga tsükliliselt diagonaalide kaupa. Paneme tähele, et kui ruudustikule paigutatud doominokivi katab parajasti kaks ruutu, siis need ruudud on alati eri värvi. Värvime nüüd iga ruudustikule paigutatud doominokivi selle värviga, millist värvi ruutu ta *ei kata*. Näitame, et selline värvimine on nõutavate omadustega.

    Tähistame kasutatavad värvid A, B ja C. Siis A ja B värvi doominokive kokku on parajasti niipalju kui C värvi ruute (sest igaüks neist doominokividest katab ühe C värvi ruudu ning iga C värvi ruut on kaetud ühe sellise doominokiviga). Analoogiliselt leiame, et A ja C värvi doominokive kokku on parajasti niipalju kui B värvi ruute ning B ja C värvi doominokive kokku on parajasti niipalju kui A värvi ruute. Kõiki kolme värvi ruute on aga ilmselt ühepalju (see on nii igas 3×3 ruudustiku osas ning kogu ruudustik koosneb 100 sellisest osast). Siit järeldame kergesti, et ka iga värvi doominokive on ühepalju.

    Jääb üle näidata, et mistahes doominokivil on ülimalt kaks temaga sama värvi naaberkivi. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et vaadeldav doominokivi on A värvi, st. katab B ja C värvi ruudud. Näeme, et 6 ruudust, mis omavad ühist külge selle doominokiviga kaetud ruutudega, ainult 2 ruutu ei ole ise A värvi ning võivad seega olla kaetud A värvi doominokiviga (kui vaadeldav doominokivi asub ruudustiku serval või nurgas, on neid naaberruute vähem, ent ikkagi on nende seas ülimalt 2 sellist, mis saavad olla kaetud A värvi doominokiviga).