Тренировочное соревнование для команды “Балтийского пути 2006”

Тарту, 29 октября 2006

1. Сумма кубов трёх последовательных целых чисел является кубом некоторого целого числа. Доказать, что среднее из этих трёх чисел делится на 4.

2. Найти все такие пары положительных целых чисел (a, b), при которых
$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}}$$
является рациональным числом.

3. Пусть $n \geqslant 2$ – целое число, а p – простое, причём $p-1$ делится на n, а n^3-1 делится на p. Доказать, что число $4p-3$ является квадратом некоторого целого числа.

4. Найти все положительные целые числа n, для которых найдутся такие рациональные числа a и b, что ни a, ни b не являются целыми, но $a+b$ и a^n+b^n оба целые.

5. Доказать, что если положительное целое число N представимо в виде суммы квадратов трёх целых чисел, каждое из которых делится на 3, то N также представимо в виде суммы квадратов трёх целых чисел, никакое из которых не делится на 3.

6. Окружности $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ пересекаются в точках A и B. Касательная, приведенная к окружности $\mathcal{C}_2$ в точке A, пересекает окружность $\mathcal{C}_1$ второй раз в точке C, а касательная, приведенная к окружности $\mathcal{C}_1$ в точке A, пересекает окружность $\mathcal{C}_2$ второй раз в точке D. Луч, пущенный из точки A во внутреннюю область угла CAD, пересекает окружность $\mathcal{C}_1$ в точке M, окружность $\mathcal{C}_2$ в точке N, а описанную окружность треугольника ACD в точке P. Доказать, что $|AM| = |NP|$.

7. Пусть D – середина основания BC равнобедренного треугольника ABC. Пусть E – основание перпендикуляра, опущенного из точки D на сторону AB, а F - середина отрезка DE. Доказать, что отрезки AF и CE перпендикулярны друг другу.

8. В треугольнике ABC выполняется $\angle A = 60^\circ$. Пусть D – произвольно выбранная точка на стороне BC, а O_1 и O_2 – соответственно центры описанных окружностей треугольников ABD и ACD. Пусть M – точка пересечения прямых BO_1 и CO_2, а N – центр описанной окружности треугольника DO_1O_2. Доказать, что на описанной окружности треугольника ABC найдется такая фиксированная точка T, через которую прямая MN проходит при любом выборе точки D.

9. Две медианы треугольника перпендикулярны друг другу. Доказать, что длины медиан этого треугольника являются длинами сторон некоторого прямоугольного треугольника.

10. Во внутренней области круга с радиусом 1 отмечают $n \geqslant 2$ попарно различных точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ пусть d_i обозначает расстояние от точки A_i до ближайшей точки A_j, где $j \neq i$. Доказать, что
$$d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2 \leqslant 16\,.$$

11. Пусть $\lfloor x \rfloor$ обозначает наибольшее целое число, которое не превосходит действительное число x, и пусть $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Найти все такие положительные действительные числа x, при которых $\{x\}$, $\lfloor x \rfloor$ и x, взятые в данном порядке, являются тремя последовательными членами некоторой геометрической прогрессии.

12. Найти все действительные решения системы уравнений
$$\begin{cases} x^{2006} + y^{2006} + z^{2006} = 2\,, \\ x^{2007} + y^{2007} + z^{2007} = 2\,, \\ x^{2008} + y^{2008} + z^{2008} = 2\,. \end{cases}$$

13. Пусть a, b, c – длины сторон некоторого треугольника, а α, β, γ – соответственно величины противоположных углов этих сторон. Доказать, что если a, b и c – три последовательных члена некоторой арифметической прогрессии, то $\cot\dfrac{\alpha}{2}$, $\cot\dfrac{\beta}{2}$ и $\cot\dfrac{\gamma}{2}$ – также три последовательных члена некоторой арифметической прогрессии.

14. Пусть $f(x) = x^2 + ax + b$. Известно, что уравнение $f\big(f(x)\big) = 0$ имеет четыре различных действительных корня, сумма некоторых двух из которых равна -1. Доказать, что $b \leqslant -\dfrac{1}{4}$.

15. Найти наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2$, если x и y – действительные числа, удовлетворяющие условию

$$xy \cdot (x^2 - y^2) = x^2 + y^2 \ ,$$

и $x \neq 0$.

16. В игру *Нэлипэ* играют на игровом поле, состоящем из 16×16 клеток и разделённом на 16 частей 4×4. Два игрока по очереди пишут в клетки игрового поля числа из множества $\{1, 2, \ldots, 16\}$, причём в каждой строке, в каждом столбце и в каждой части 4×4 все числа должны быть различными. Игрок, который не может сделать разрешённого правилами хода, проигрывает. У какого игрока имеется выигрышная стратегия?

17. Вокруг Солнца кружат 10 планет. Доказать, что в любой момент времени найдётся на поверхности Солнца такая точка, с которой одновременно видны не более 4 планет. (Предположим, что Солнце и все планеты имеют форму шара, а радиусы планет меньше радиуса Солнца.)

18. Пусть число 90-градусных внутренних углов n-угольника (не обязательно выпуклого) есть k.

   а) Доказать, что всегда $k \leqslant \dfrac{2}{3}(n+2)$, причём при $n \neq 4$ неравенство строгое.

   б) Доказать, что если $n \geqslant 6$ и $n+2$ не делится на 3, то всегда возможно сконструировать n-угольник, у которого $k = \left\lfloor \dfrac{2}{3}(n+2) \right\rfloor$ (где $\lfloor x \rfloor$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее число x).

19. Клетчатое поле состоит из 2 горизонтальных строк и n столбцов, а на его клетках вначале находится всего 2^n монет (на каждой клетке может находиться произвольное число монет, в том числе и 0). Каждым ходом выбирают одну клетку, на которой по меньшей мере 2 монеты, забирают с этой клетки 2 монеты и добавляют 1 из этих монет на клетку, соседнюю с ней сверху или справа. Доказать, что ходы можно делать таким образом, что на правой крайней клетке верхней строки наконец будет находиться по меньшей мере одна монета.

20. Клетчатое поле размерами 30×30 покрывают каким-то образом 450 костями домино, каждая из которых покрывает две соседние клетки. Доказать, что эти кости домино можно раскрасить в три цвета так, чтобы костей каждого цвета было одинаковое количество, а у каждой кости было не более двух соседних костей одинакового с ней цвета (две кости домино назовём соседними, если какие-то клетки, покрываемые ими, имеют общую сторону).