Treeningvõistlus “Balti tee 2005” võistkonnale

Tartus, 23. oktoobril 2005

1. Olgu $ABCD$ kõõlnelinurk. Läbi punktide A ja D tõmmatakse sirged l_A ja l_D, mis on risti lõiguga AD; läbi punktide B ja C tõmmatakse sirged l_B ja l_C, mis on risti lõiguga BC. Olgu M sirgete l_A ja l_C lõikepunkt, N sirgete l_B ja l_D lõikepunkt ning E sirgete AD ja BC lõikepunkt. Tõesta, et $\angle DEN = \angle CEM$.

2. Kolmnurga ABC külgedel AB, BC ja CA leiduvad vastavalt punktid C_1, A_1 ja B_1 nii, et $|AC_1| = |BA_1| = |CB_1|$ ja $\angle A_1C_1B = \angle B_1A_1C = \angle C_1B_1A$. Kas sellest järeldub, et kolmnurk ABC on võrdkülgne?

3. On antud kumer nelinurk $ABCD$, kus $|AB| = |BC| = |CD|$. Olgu M tipu B juures asuva välisnurga poolitaja lõikepunkt sirgega CD ja N tipu C juures asuva välisnurga poolitaja lõikepunkt sirgega AB. Tõesta, et $MN \parallel AD$.

4. Kolmnurk paikneb ruudu sees nii, et ruudu keskpunkt asub väljaspool kolmnurka ning ruudu külgedel ei paikne ühtegi kolmnurga tippu. Tõesta, et leidub kolmnurga külg, mille pikkus on väiksem ruudu külje pikkusest.

5. Kolmnurgas ABC tõmmatakse nurgapoolitaja AL. Kolmnurga ABL ümberringjoonele punktis B tõmmatud puutuja ja kolmnurga ACL ümberringjoonele punktis C tõmmatud puutuja lõikuvad punktis K. Tõesta, et punktid A, L ja K asuvad ühel sirgel.

6. Leia kõik positiivsete täisarvude kolmikud (x, y, z), mille korral kehtib võrdus
$$(x+y)(1+xy) = 2^z.$$

7. Leia kõik sellised positiivsete täisarvuliste väärtustega funktsioonid f, mis on määratud kõigil positiivsetel täisarvudel ning rahuldavad järgmisi tingimusi:
   1) $f(1) = 1$;
   2) $f(n+2) + (n^2+4n+3)f(n) = (2n+5)f(n+1)$ iga positiivse täisarvu n korral;
   3) arv $f(m)$ jagub arvuga $f(n)$ mistahes positiivsete täisarvude $m > n$ korral.

8. On teada, et $a^2 + b$, $b^2 + a$ ja $\dfrac{a}{b}$ on kõik ratsionaalarvud, kusjuures $a \neq b$. Kas a võib olla irratsionaalarv?

9. Leia kõik sellised algarvud $p > 2$, mille korral summa
$$\sum_{k=1}^{2004} k^{p-1}$$
jagub arvuga p.

10. Leia kõik sellised täisruudud, mille kümnendesituses on ainult kahel kohal nullist erinevad numbrid, millest üks on 3.

11. Olgu $P(x)$ mistahes täisarvuliste kordajatega polünoom. Tõesta, et polünoomil
$$Q(x) = P(x^4) \cdot P(x^3) \cdot P(x^2) \cdot P(x) + 1$$
ei ole ühtegi täisarvulist nullkohta.

12. Tõesta, et mistahes täisarvu $n > 1$ korral kehtib võrdus

$$\lfloor\sqrt{1}\rfloor + \lfloor\sqrt{2}\rfloor + \ldots + \lfloor\sqrt{n^2-1}\rfloor = n^3 - (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) ,$$

kus $\lfloor x \rfloor$ tähistab arvu x täisosa, st. suurimat täisarvu, mis ei ole suurem arvust x.

13. Leia kõik sellised reaalarvud p, mille korral võrratus

$$\frac{x^3 + py^3}{x+y} \geqslant xy$$

kehtib mistahes positiivsete reaalarvude x, y jaoks.

14. Leia kõik sellised reaalarvuliste väärtustega funktsioonid f, mis on määratud kogu reaalarvude hulgal ning rahuldavad mistahes reaalarvude x, y korral tingimust

$$f\big(x^2 + f(y)\big) = (x-y)^2 f(x+y) .$$

15. Olgu a, b, c fikseeritud positiivsed reaalarvud. Leia võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \sqrt{xy} + \sqrt{xz} - x = a \\ \sqrt{yz} + \sqrt{yx} - y = b \\ \sqrt{zx} + \sqrt{zy} - z = c \end{cases}$$

kõik lahendid positiivsetes reaalarvudes.

16. Tasandile joonestatakse kumer n-nurk ja kumer m-nurk nii, et nende ühisosa on kumer k-nurk. Leia k suurim võimalik väärtus etteantud n ja m korral.

17. Jüri ja Mari mängivad järgmist mängu. Mängulauaks on täisarvuliste koordinaatidega punktide (x, y) hulk, kus $1 \leqslant x \leqslant m$ ja $1 \leqslant y \leqslant n$. Igal käigul ühendab mängija kaks mängulaua punkti sirglõiguga, kusjuures tõmmatav lõik ei tohi läbida ühtki teist mängulaua punkti ega omada ühiseid sisepunkte ühegi varem tõmmatud lõiguga. Esimese käigu teeb Mari, edasi käiakse kordamööda. Kaotab mängija, kes ei saa enam reeglitekohast käiku teha. Milliste m ja n korral on võitev strateegia Maril ja milliste korral Jüril?

18. Defineerime mistahes positiivse täisarvu n korral $f(n)$ järgmiselt: $f(n) = 1$, kui n on paaritu, ning $f(n) = k$, kui $n = 2^k l$, kus $k \geqslant 1$ ja l on paaritu. Leia suurim n, mille korral

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) \leqslant 2005 .$$

19. Ringjoonel valitakse 8 punkti ning tõmmatakse kõik neid paarikaupa ühendavad sirglõigud. Mitmeks osaks võivad need lõigud ringi maksimaalselt jaotada?

20. Numbrite jada

$$12345678910111213141516171819202122\ldots$$

saadakse, kirjutades üksteise järele kasvavas järjekorras kõik positiivsed täisarvud. Mitmekohalisest arvust pärineb number, mis asub selles jadas 10^{2005}-dal kohal?