Treeningvõistlus “Balti tee 2005” võistkonnale

Tartus, 23. oktoobril 2005

Vastused ja lahendused

1. Esitame lahenduse juhu jaoks, kus punktid A ja B paiknevad vastavalt lõikudel ED ja EC. Teisel juhul (kus punktid C ja D paiknevad vastavalt lõikudel EB ja EA) on lahendus täiesti analoogiline.

   Nelinurk $NEBD$ on kõõlnelinurk, sest $\angle NDE = \angle NBE = 90^\circ$. Seega $\angle DEN = \angle DBN = 90^\circ - \angle DBC$. Samuti on $AEMC$ kõõlnelinurk, mistõttu $\angle CEM = \angle CAM = 90^\circ - \angle CAD$. Kuna eelduse kohaselt on ka $ABCD$ ise kõõlnelinurk, siis võrdusest $\angle CAD = \angle DBC$ saamegi $\angle DEN = \angle CEM$.

2. *Vastus:* jah.

   Tähistame $|AC_1| = |BA_1| = |CB_1| = l$ ja $\angle A_1C_1B = \angle B_1A_1C = \angle C_1B_1A = \varphi$. Kirjutades välja siinusteoreemi kolmnurkade A_1C_1B, B_1A_1C ja C_1B_1A jaoks, saame

   $$\frac{l}{\sin\varphi} = \frac{|B_1C_1|}{\sin\angle A} = \frac{|C_1A_1|}{\sin\angle B} = \frac{|A_1B_1|}{\sin\angle C}$$

   ning kolmnurga ABC jaoks saame

   $$\frac{|BC|}{\sin\angle A} = \frac{|CA|}{\sin\angle B} = \frac{|AB|}{\sin\angle C}.$$

   Neist võrdustest järeldub, et kolmnurgad ABC ja $A_1B_1C_1$ on sarnased. Seega $\angle C_1A_1B_1 = \angle A$, $\angle A_1B_1C_1 = \angle B$ ja $\angle B_1C_1A_1 = \angle C$. Leiame nurga $\angle AC_1B_1$ suuruse:

   $$\angle AC_1B_1 = 180^\circ - \angle A_1C_1B - \angle B_1C_1A_1 = 180^\circ - \varphi - \angle C.$$

   Teisest küljest aga

   $$\angle AC_1B_1 = 180^\circ - \angle C_1B_1A - \angle B_1AC_1 = 180^\circ - \varphi - \angle A.$$

   Järelikult $\angle A = \angle C$. Analoogiliselt tõestame ka, et $\angle A = \angle B$, millest järeldub, et kolmnurk ABC on võrdkülgne.

3. Olgu K sirgete AN ja DM lõikepunkt. Olgu $|AB| = |BC| = |CD| = a$, $|BN| = c_2$, $|NK| = c_1$, $|CM| = b_2$, $|MK| = b_1$. Kolmnurgas BKC on BM nurga B poolitaja, CN aga nurga C poolitaja. Nurgapoolitaja omaduse kohaselt kehtivad võrdused

   $$\frac{c_1}{c_2} = \frac{b_1+b_2}{a}, \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1+c_2}{a}.$$

   Nendest võrdustest saame

   $$ac_1 = c_2b_1 + c_2b_2, \quad ab_1 = b_2c_1 + b_2c_2\,.$$

   Siit

   $$ac_1 - c_2b_1 = b_2c_2 = ab_1 - b_2c_1$$

ehk

$$c_1(a+b_2)=b_1(a+c_2)\ ,$$

kust

$$\frac{c_1}{a+c_2}=\frac{b_1}{a+b_2},$$

mis on piisav sirgete AD ja MN paralleelsuseks.

4. Olgu O ruudu keskpunkt. Tõmbame läbi punkti O suvalise sirge nii, et ta ei läbiks kolmnurga tippe. Kui see sirge lõikub kolmnurga külgedega, siis mõlemad lõikepunktid jäävad punktist O ühele poole. Võtame punktile O lähema lõikepunkti ning tõmbame läbi punkti O nüüd sirge, mis on paralleelne seda lõikepunkti sisaldava kolmnurga küljega. On selge, et saadav sirge ei lõika kolmnurga külgi. Niisiis leidub igal juhul punkti O läbiv sirge l_1, millest kolmnurk jääb tervenisti ühele poole. Tõmbame nüüd läbi punkti O sirge l_2, mis on risti sirgega l_1. Sirged l_1 ja l_2 jaotavad ruudu neljaks võrdseks osaks, mis kõik on kõõlnelinurgad (piirjuhul kolmnurgad). Iga sellise osa ümberringjoone diameetri otspunktid on sirgete l_1 ja l_2 vastavad lõikepunktid ruudu külgedega. Selle diameetri pikkus d ei ole suurem kui ruudu küljepikkus, sest vastasel korral paikneks antud ruudu sees sellest suurema küljepikkusega ruut. Et vaadeldava kolmnurga kõik tipud asuvad ülimalt kahes sellises osas, siis leidub osa, mis sisaldab vähemalt kaks kolmnurga tippu. Nende tippude vaheline kaugus on niisiis väiksem kui d ning seega väiksem ruudu küljepikkusest.

5. Olgu M sirgete AL ja BK lõikepunkt ja N sirgete AL ja CK lõikepunkt. Paneme tähele, et $\angle CBM=\angle LAB=\angle LAC=\angle BCN$. Seega on $BACN$ ja $CABM$ kõõlnelinurgad ning järelikult asuvad punktid M, B, A, C, N ühel ringjoonel. Et A, M ja N asuvad lisaks veel ühel sirgel (selleks on sirge AL), siis peavad punktid M ja N langema kokku. Siit järeldubki, et AM ja BN lõikuvad sirgel AL.

6. *Vastus:* $(1,\,2^m-1,\,2m)$ ja $(2^m-1,\,1,\,2m)$, kus $m\geqslant 1$, ning $(2^{m-1}-1,\,2^{m-1}+1,\,3m-2)$ ja $(2^{m-1}+1,\,2^{m-1}-1,\,3m-2)$, kus $m\geqslant 3$.

   Eeldame üldisust kitsendamata, et $x\leqslant y$. On selge, et x ja y peavad olema paaritud arvud, kusjuures leidub selline naturaalarv $m<z$, et $x+y=2^m$, $1+xy=2^{z-m}$. Kuna $1+xy\geqslant x+y$, siis $m\leqslant\dfrac{1}{2}z$.

   Kui $x=1$, siis saame vastuses toodud esimese lahendite seeria.

   Kui $x\geqslant 3$, siis $x+y=2^m>6$, seega $m\geqslant 3$. Kuna $x^2-1=x(x+y)-(1+xy)=2^m(x-2^{z-2m})$ ja SÜT $(x-1,x+1)=2$, siis arvudest $x-1$ ja $x+1$ täpselt üks jagub arvuga 2^{m-1}. Et $x+y=2^m$ ja $x\leqslant y$, siis $x-1<2^{m-1}$, seega $x+1$ jagub arvuga 2^{m-1}. Kuna $x+1<x+y=2^m$, siis tegelikult $x+1=2^{m-1}$. Siit saame kätte kolmanda lahendite seeria. Teise ja neljanda seeria saame x ja y rollide vahetamisel.

7. *Vastus:* $f(n)=n!$ ja $f(n)=\dfrac{(n+2)!}{6}$.

   Asendades teises tingimuses $n=1$, saame $f(3)=7f(2)-8$. Kuna $f(2)$ on $f(3)$ jagaja, siis $f(2)$ on 8 jagaja. Järelikult saab $f(2)$ olla vaid 1, 2, 4 või 8. Kui $f(2)=1$, siis saame $f(3)=-1$, mis ei ole lubatud. Kui $f(2)=2$, siis $f(3)=6$ ning paneme tähele, et siin võib sobida $f(n)=n!$. Kontroll näitab, et see funktsioon rahuldab ülesande tingimusi. Paneme tähele, et funktsiooni f väärtused kõikidel kohtadel on üheselt määratud väärtustega kohtadel $n=1$ ja $n=2$. Seega juhul $f(2)=2$ teisi sobivaid funktsioone ei leidu. Kui nüüd $f(2)=4$, siis $f(3)=20$ ning võiks sobida funktsioon $f(n)=\dfrac{(n+2)!}{6}$. Kontroll näitab, et ka see funktsioon rahuldab ülesande tingimusi. Lõpuks, kui $f(2)=8$, siis $f(3)=48$ ja edasi $f(4)=312$. Kuid 48 ei ole 312 jagaja, mis on vastuolus ülesande tingimustega.

8. *Vastus:* ei saa.

Olgu $a = bk$. Ülesande tingimuste kohaselt $k \in \mathbb{Q}$ ja $k \neq 1$. Saame $a^2 + b = b(1 + k^2 b) \in \mathbb{Q}$, $b^2 + a = b(b + k) \in \mathbb{Q}$ ja kuna $b \neq 0$, siis ka $r = \dfrac{1 + k^2 b}{b + k} \in \mathbb{Q}$ (juhul kui $b + k = 0$, siis $b = -k \in \mathbb{Q}$, millest $a \in \mathbb{Q}$). Kui siin $r = k^2$, siis $k^3 = 1$, seega $k = 1$, mis ei ole võimalik. Seega $r \neq k^2$ ja saame avaldada $b = \dfrac{1 - rk}{r - k^2}$. Kuna selles avaldises on r ja k ratsionaalarvud, siis $b \in \mathbb{Q}$, järelikult ka $a \in \mathbb{Q}$.

9. *Vastus:* 17 ja 2003.

Kui p on k jagaja, siis $k^{p-1} \equiv 0 \pmod p$. Arvude 1 kuni 2004 hulgas on selliseid arve k kokku $\left\lfloor \dfrac{2004}{p} \right\rfloor$ tükki. Kui aga p ei ole k jagaja, siis Fermat' väikesest teoreemist $k^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Seega ülesande tingimustele vastab kongruents

$$\sum_{k=1}^{2004} k^{p-1} \equiv 2004 - \left\lfloor \frac{2004}{p} \right\rfloor \equiv 0 \pmod p. \tag{1}$$

On selge, et $p < 2004$. Olgu $2004 = pq + r$, $0 \leqslant r \leqslant p - 1$. Siis kongruentsi (1) parem pool on samaväärne kongruentsiga $r \equiv q \pmod p$.

Olgu $q < p$. Siis $r = q$ ning saame $2004 = (p + 1)q \leqslant p^2 - 1$, seega $p \geqslant 47$. Kuna $p + 1$ peab olema 2004 jagaja, siis vaadates läbi kõik 47-st suuremad arvu 2004 jagajad leiame, et vaid $p = 2003$ on algarv, mis rahuldab ülesande tingimusi.

Olgu nüüd $q \geqslant p$. Siis $2004 \geqslant pq \geqslant p^2$, järelikult $p \leqslant 43$. Vaadates läbi kõik algarvud kuni 43 leiame veel ühe tingimusi rahuldava arvu $p = 17$.

10. *Vastus:* $36 \cdot 10^{2k}$, kus k on mittenegatiivne täisarv.

Täisarvu ruut saab lõppeda ainult numbriga 0, 1, 4, 5, 6 või 9. Kui täisruut lõpeb 0-ga, siis nullide arv lõpus peab olema paaris ning nende eemaldamisel peab ikka jääma täisruut. Seega võime vaadelda vaid arve, mis ei lõpe 0-ga, ning mistahes sobiva arvu esimene number peab olema 3.

Arvu viimane number ei saa olla 9, sest siis jaguks arv 3-ga, kuid mitte 9-ga (numbrite summa järgi otsustades). Samuti ei saa viimane number olla 5, sest 5-ga lõppeva arvu ruudu lõpus peab olema 25. Seega jääb vaadelda juhte, kus viimane number on 1, 4 või 6.

Olgu viimane number 6. Teame, et 36 on täisruut. Kui aga 3 ja 6 vahel oleks vähemalt üks 0, siis arv jaguks 2-ga kuid mitte 4-ga, ning seega ei saaks olla täisruut. Järelikult on 36 ainuke 6-ga lõppev lahend.

Vaatleme nüüd juhtu, kus viimane number on 1. Siis $3 \cdot 10^n + 1 = m^2$, millest $3 \cdot 2^n \cdot 5^n = (m-1)(m+1)$. Arvud $m - 1$ ja $m + 1$ ei saa korraga jaguda 5-ga, seega üks neist peab jaguma 5^n-ga. Kuid $5^n > 3 \cdot 2^n + 2$, kui $n > 1$, seega jääb ainult võimalus $n = 1$, millele vastab arv 31. See arv ei ole täisruut, seega täisruute kujul $3 \cdot 10^n + 1$ ei leidu.

Kui viimane number on 4, siis tõestame analoogiliselt viimase vaadeldud juhuga, et ühtegi sobivat täisruutu ei leidu.

11. Paneme tähele, et n^3 ja n annavad 3-ga jagamisel alati ühe ja sama jäägi. Järelikult ka n^4 ja n^2 annavad 3-ga jagamisel alati ühe ja sama jäägi ning sama kehtib ka $P(n^3)$ ja $P(n)$ ning $P(n^4)$ ja $P(n^2)$ jaoks. Seega

$$Q(n) = P(n^4) \cdot P(n^3) \cdot P(n^2) \cdot P(n) + 1 \equiv \bigl(P(n^2) \cdot P(n)\bigr)^2 + 1 \pmod 3 .$$

Ühegi täisarvu ruut ei anna aga 3-ga jagamisel jääki 2, seega $Q(n) \neq 0$ mistahes täisarvu n korral.

12. Võrdus $\lfloor\sqrt{m}\rfloor = k$ on samaväärne võrratustega $k^2 \leqslant m < (k+1)^2$. Seega iga arv k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, esineb tõestatava võrduse vasakul pool liidetavana $(k+1)^2 - k^2$ korda ning selle summa väärtus on

$$\begin{aligned} 1 \cdot (2^2 - 1^2) + 2(3^2 - 2^2) + \ldots + (n-1)\big(n^2 - (n-1)^2\big) = \\ = -1^2 - 2^2 - \ldots - (n-1)^2 + (n-1) \cdot n^2 = \\ = n^3 - (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)\,. \end{aligned}$$

13. *Vastus*: $p \geqslant 1$.

Kuna x, $y > 0$, siis ülesandes antud võrratus on samaväärne võrratusega

$$y^2(py - x) - x^2(y - x) \geqslant 0\,.$$

Kui $p \geqslant 1$, siis

$$y^2(py - x) - x^2(y - x) \geqslant y^2(y - x) - x^2(y - x) = (x + y)(y - x)^2 \geqslant 0\,.$$

Kui $p < 1$, siis võrratus ei kehti — nt. $x = y = 1$ korral

$$y^2(py - x) - x^2(y - x) = p - 1 < 0\,.$$

14. *Vastus*: $f(x) = 0$ ja $f(x) = -x^2$.

Paneme tähele, et võrduse vasak pool on paarisfunktsioon x suhtes, st.

$$(x - y)^2 f(x + y) = f\big(x^2 + f(y)\big) = f\big((-x)^2 + f(y)\big) = (-x - y)^2 f(-x + y)\,,$$

ehk

$$(x - y)^2 f(x + y) = (x + y)^2 f(y - x)\,. \tag{2}$$

Olgu t mistahes reaalarv ning $x = \dfrac{t-1}{2}$ ja $y = \dfrac{t+1}{2}$, siis $x + y = t$ ja $y - x = 1$. Võrdusest (2) saame $f(t) = t^2 \cdot f(1)$. Seega otsitav funktsioon peab esituma kujul $f(x) = cx^2$ mingi konstandi c korral. Asendades selle ülesandes antud võrdusesse ning võttes $x = y = 1$, saame $c(c+1)^2 = 0$, kust $c = 0$ või $c = -1$.

15. *Vastus*: $x = \dfrac{a^2(b + c - a)}{(c + a - b)(a + b - c)}$, $y = \dfrac{b^2(c + a - b)}{(a + b - c)(b + c - a)}$, $z = \dfrac{c^2(a + b - c)}{(b + c - a)(c + a - b)}$.

Arvestades x, y, z positiivsust, võime võrrandisüsteemi kirjutada kujul

$$\begin{cases} -\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \dfrac{a}{\sqrt{x}} \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z} = \dfrac{b}{\sqrt{y}} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z} = \dfrac{c}{\sqrt{z}} \end{cases}.$$

Neid võrrandeid paarikaupa kokku liites saame

$$\begin{aligned}
\frac{b}{\sqrt{y}} + \frac{c}{\sqrt{z}} &= 2\sqrt{x}\ , \\
\frac{c}{\sqrt{z}} + \frac{a}{\sqrt{x}} &= 2\sqrt{y}\ , \\
\frac{a}{\sqrt{x}} + \frac{b}{\sqrt{y}} &= 2\sqrt{z}
\end{aligned}$$

ehk

$$\begin{aligned}
b\sqrt{z} + c\sqrt{y} &= 2\sqrt{xyz}\ , \\
c\sqrt{x} + a\sqrt{z} &= 2\sqrt{xyz}\ , \\
a\sqrt{y} + b\sqrt{x} &= 2\sqrt{xyz}\ .
\end{aligned}$$

Lahutades siin kolmanda võrrandi vastavalt esimesest ja teisest, saame

$$\begin{aligned}
b\sqrt{z} + (c-a)\sqrt{y} &= b\sqrt{x}\ , \\
a\sqrt{z} - a\sqrt{y} &= (b-c)\sqrt{x}\ .
\end{aligned}$$

Lahutades nüüd arvuga a läbikorrutatud esimesest võrrandist arvuga $-b$ läbikorrutatud teise võrrandi, saame

$$a(b+c-a)\sqrt{y} = b(c+a-b)\sqrt{x}\ .$$

Analoogiliselt saame, et

$$a(b+c-a)\sqrt{z} = c(a+b-c)\sqrt{x}\ .$$

Siin $b+c-a \neq 0$, sest tänu a, b, c positiivsusele oleks vastasel korral ka $c+a-b=0$ ja $a+b-c=0$, millest $a=b=0$ — vastuolu. Seega võime avaldada

$$\begin{aligned}
\sqrt{y} &= \frac{b(c+a-b)}{a(b+c-a)}\sqrt{x}\ , \\
\sqrt{z} &= \frac{c(a+b-c)}{a(b+c-a)}\sqrt{x}\ .
\end{aligned}$$

Asendades need esialgse süsteemi võrranditesse ja teisendades, saame

$$\begin{aligned}
x &= \frac{a^2(b+c-a)}{(c+a-b)(a+b-c)}\ , \\
y &= \frac{b^2(c+a-b)}{(a+b-c)(b+c-a)}\ , \\
z &= \frac{c^2(a+b-c)}{(b+c-a)(c+a-b)}\ .
\end{aligned}$$

16. *Vastus*: $n+m$.

Ilmselt $k \leqslant n+m$, sest k-nurga iga külg peab paiknema n-nurga või m-nurga mingil küljel ning kumeruse tõttu ei ole võimalik, et samal n-nurga või m-nurga küljel paikneks rohkem kui üks k-nurga külg.

Näitame nüüd, et mistahes $n, m \geqslant 3$ korral on lähtudes korrapärasest $(n+m)$-nurgast võimalik konstrueerida kumer n-nurk X ja kumer m-nurk Y, mille ühisosaks on antud korrapärane $(n+m)$-nurk. Selleks piisab, kui $(n+m)$-nurga küljed õnnestub jaotada X ja Y vahel (ütleme edaspidi: X-külgedeks ja Y-külgedeks) nii, et X-külgi on n ja Y-külgi m ning mistahes kahele järjestikusele X-küljele ja mistahes kahele järjestikusele Y-küljele vastavate vektorite vaheline nurk (vaadeldes küljevektoreid suunatutena ühes suunas ümber $(n+m)$-nurga) on väiksem kui 180° — siis on neid külgi võimalik pikendada üle vastavate tippude kuni lõikumiseni.

Kui $n+m$ on paaris, siis saame vajaliku jaotuse, nimetades mingi külje X-küljeks, selle vastaskülje Y-küljeks ning nende naaberküljed neist erinevalt (st. X-külje naaberküljed nimetame Y-külgedeks ja Y-külje naaberküljed X-külgedeks); ülejäänud küljed jaotame suvalisel viisil nii, et X-külgi oleks kokku n ja Y-külgi m. Kui $n+m$ on paaritu, siis võime üldisust kitsendamata eeldada, et $m \geqslant 4$, ning vajaliku jaotuse saame analoogiliselt eelnevaga, nimetades mingi külje X-küljeks, selle vastastipust lähtuvad kaks külge Y-külgedeks ning nende naaberküljed neist erinevalt ja ülejäänud küljed suvalisel viisil nii, et X-külgi oleks kokku n ja Y-külgi m.

17. *Vastus*: Jüril on võitev strateegia, kui m ja n on mõlemad paaritud; Maril on võitev strateegia ülejäänud juhtudel.

Olgu C mängulauaks oleva punktide hulga sümmeetriakeskpunkt — siis C on ise mängulaua punkt parajasti siis, kui m ja n on mõlemad paaritud.

Vaatleme olukorda, kus eelnevalt tõmmatud lõikude hulk on sümmeetriline punkti C suhtes ning üks mängijaist tõmbab lisaks ühe uue lõigu PQ. On lihtne näha, et teine mängija ei saa tõmmata sellega sümmeetrilist lõiku $P'Q'$ (kus P' ja Q' on vastavalt punktidega P ja Q sümmeetrilised punktid punkti C suhtes) ainult juhul, kui lõik $P'Q'$ omaks ühiseid sisepunkte lõiguga PQ. Kui aga M on selline ühine sisepunkt, siis sümmeetria tõttu ka M' on lõikude PQ ja $P'Q'$ ühine sisepunkt, millest järeldub, et lõik PQ sisaldab punkti C oma sisepunktina.

Kui m ja n on mõlemad paaritud, siis C on mängulaua punkt ega saa olla ühegi tõmmatava lõigu PQ sisepunkt. Seega on Jüril võitev strateegia — tõmmata igal oma käigul lõik, mis on sümmeetriline Mari viimati tõmmatud lõiguga punkti C suhtes.

Kui m ja n ei ole mõlemad paaritud, siis saab Mari esimesel käigul tõmmata mingi lõigu MM'. Et ükski edaspidi tõmmatav lõik ei saa sisaldada punkti C oma sisepunktina, siis saab Mari tõmmata igal oma järgneval käigul lõigu, mis on sümmeetriline Jüri viimati tõmmatud lõiguga punkti C suhtes.

18. *Vastus*: 1341.

Lahendus 1. Kuna $f(n) \geqslant 1$ iga positiivse täisarvu n korral, siis funktsioon

$$S(n) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) \tag{3}$$

on rangelt kasvav. Paneme tähele, et iga positiivne täisarv $k \leqslant n$ annab summasse (3) vähemalt 1; iga 4-ga jaguv arv annab lisaks veel 1, iga 8-ga jaguv arv täiendavalt veel 1 jne. Seega

$$S(n) = n + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + \ldots \tag{4}$$

ning

$$S(n) \leqslant n + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \ldots = n \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2} = \frac{3}{2} n \,.$$

Olgu nüüd N otsitav suurim arv, mille korral $S(N) \leqslant 2005$, siis $N \geqslant \left\lfloor \frac{3}{2} \cdot 2005 \right\rfloor = 1336$. Valemi (4) abil leiame, et $S(1336) = 1999$. Et arv 1336 jagub 8-ga, siis $f(1340) = 2$ ning $f(1337) = f(1338) = f(1339) = f(1341) = 1$, kust $S(1341) = 1999 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 = 2005$.

Lahendus 2. Analoogilise aruteluga nagu lahenduses 1 leiame, et iga $k \geqslant 1$ korral

$$S(2^k) = 2^k + 2^{k-2} + 2^k - 3 + \ldots + 2 + 1 = 3 \cdot 2^{k-1} - 1 \,. \tag{5}$$

Olgu nüüd $k > l \geqslant 0$ ning s, t suvalised paaritud arvud. Siis $2^k s + 2^l t = 2^l(2^{k-l}s + t)$, mistõttu $f(2^k s + 2^l t) = f(2^l t)$. Seega mistahes $k > l \geqslant 0$ ning mistahes paaritu arvu s korral

$$\begin{aligned} S(2^k s + 2^l) &= S(2^k s) + f(2^k s + 1) + \ldots + f(2^k s + 2^l) = S(2^k s) + f(1) + \ldots + f(2^l) = \\ &= S(2^k s) + S(2^l) \,. \end{aligned} \tag{6}$$

Olgu nüüd $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_m}$, kus $k_1 > k_2 > \ldots > k_m \geqslant 0$. Rakendades korduvalt seost (6) saame

$$S(2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_m}) = S(2^{k_1}) + S(2^{k_2}) + \ldots + S(2^{k_m}) \,.$$

Leiame nüüd suurima k_1 nii, et $S(k_1) = 3 \cdot 2^{k-1} - 1 \leqslant 2005$ — saame $k_1 = 10$. Edasi leiame suurima k_2 nii, et $S(k_2) = 3 \cdot 2^{k-2} - 1 \leqslant 2005 - (3 \cdot 2^9 - 1) = 2005 - 1535 = 470$ — saame $k_2 = 8$. Analoogiliselt leiame $k_3 = 5$, $k_4 = 4$, $k_5 = 3$, $k_6 = 2$ ja $k_7 = 0$. Seega $n = 2^{10} + 2^8 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = 1341$ on suurim arv, mille korral $S(n) \leqslant 2005$.

19. *Vastus*: 99.

Lahendus 1. Olgu ringjoonel valitavad punktid päripäeva nummerdatuna $A_1, \ldots, A_8$. Lisades punkte ringjoonele ühekaupa, saame nende asukohad valida nii, et ükski kolmik lõikudest A_iA_j, kus $1 \leqslant i, j \leqslant 8$, ei lõiku ühes punktis. Tõepoolest, iga järgmise punkti A_k valikuks ringjoonel on lõpmata palju võimalusi, millest ainult lõplik arv on sellised, kus mõni lõikudest A_kA_i, kus $1 \leqslant i \leqslant k-1$, läbib punkte $A_1, \ldots, A_{k-1}$ ühendavate lõikude mingit lõikepunkti. Et sellise punktide A_i valiku korral iga lisatav lõik A_kA_i jaotab kaheks maksimaalse arvu olemasolevaid ringi osi, siis on ka niiviisi saadav osade koguarv maksimaalne.

Vaatleme nüüd järjekordse punkti A_k lisamisel tõmmatavat lõiku A_kA_i, kus $1 \leqslant i \leqslant k-1$. Et punktid $A_1, \ldots, A_{i-1}$ on sellest lõigust ühel pool ja punktid $A_{i+1}, \ldots, A_{k-1}$ teisel pool, siis on sellel lõigul $(i-1)(k-i-1)$ lõikepunkti olemasolevate lõikudega ning ta jaotab seega kaheks $(i-1)(k-i-1)+1$ olemasolevat ringi osa. Olgu N_s ringi osade koguarv punktide $A_1, \ldots, A_s$ lisamise järel, siis

$$N_k - N_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} \big((i-1)(k-i-1) + 1\big) = (k-1) + \sum_{i=1}^{k-1} (i-1)(k-i-1) \,. \tag{7}$$

Arvestades, et $N_2 = 2$, ning rakendades korduvalt valemit (7), leiame:

$$N_3 = 4,\ N_4 = 8,\ N_5 = 16,\ N_6 = 31,\ N_7 = 57,\ N_8 = 99.$$

Lahendus 2. Samuti nagu esimeses lahenduses paneme tähele, et ring jaotub maksimaalseks arvuks osadeks parajasti siis, kui ükski kolmik tõmmatavatest lõikudest ei lõiku ühes punktis. Vaatleme tasandilist graafi, mille tippudeks on ringjoonel niiviisi valitud m punkti $A_1, \ldots, A_m$ ning neid paarikaupa ühendavate lõikude kõik lõikepunktid, servadeks on nendesamade lõikude osad ning m ringjoone kaart ning tahkudeks on vaadeldavad ringi osad ja ringist väljapoole jääv tasandi osa. Olgu V, E ja F vastavalt selle graafi tippude, servade ja tahkude arvud. Et punkte A_i ühendavate lõikude lõikepunktid on üksüheses vastavuses punktide A_i järjestamata nelikutega (mistahes neli erinevat punkti annavad ühe sellise lõikepunkti), siis

$$V = m + \binom{m}{4} \,.$$

Et punkte A_i ühendavate lõikude iga lõikepunkt lisab parajasti kahele sellisele lõigule ühe osa, siis

$$E = \binom{m}{2} + 2\binom{m}{4} + m \,.$$

Kuna vastavalt Euleri valemile tasandiliste graafide jaoks $F + V = E + 2$ ning $F = N_m + 1$, siis

$$N_m + 1 + m + \binom{m}{4} = \binom{m}{2} + 2\binom{m}{4} + m + 2 \,,$$

kust

$$N_m = \binom{m}{2} + \binom{m}{4} + 1$$

ning $N_8 = \binom{8}{2} + \binom{8}{4} + 1 = 28 + 70 + 1 = 99$.

20. *Vastus*: 2002-kohalisest.

Me otsime sellist arvu k, mille korral

$$S_{k-1} < 10^{2005} \leqslant S_k \,, \tag{8}$$

kus S_k on numbrite koguarv kõigis ülimalt k-kohalistes positiivsetes täisarvudes:

$$S_k = 9 + 90 \cdot 2 + \ldots + 9 \cdot 10^{k-1} \cdot k \,.$$

Paneme tähele, et

$$9S_k = 10S_k - S_k = 9 \cdot 10^k \cdot k - (9 + 90 + \ldots + 9 \cdot 10^{k-1}) \,,$$

kust

$$S_k = 10^k \cdot k - (1 + 10 + \ldots + 10^{k-1}) = 10^k \cdot \left(k - \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{9} \,.$$

Nüüd on lihtne kontrollida, et võrratusi (8) rahuldab $k = 2002$.