Тренировочное соревнование для команды “Балтийского пути 2005”

Тарту, 23 октября 2005

1. Пусть $ABCD$ — вписанный четырёхугольник. Через точки A и D проводят прямые l_A ja l_D, перпендикулярные отрезку AD; через точки B и C проводят прямые l_B ja l_C, перпендикулярные отрезку BC. Пусть M — точка пересечения прямых l_A и l_C, N — точка пересечения прямых l_B и l_D, а E — точка пересечения прямых AD и BC. Доказать, что $\angle DEN = \angle CEM$.

2. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC найдутся соответственно точки C_1, A_1 и B_1 такие, что $|AC_1| = |BA_1| = |CB_1|$ и $\angle A_1C_1B = \angle B_1A_1C = \angle C_1B_1A$. Следует ли из этого, что треугольник ABC равносторонний?

3. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $|AB| = |BC| = |CD|$. Пусть M — точка пересечения биссектрисы внешнего угла при вершине B с прямой CD, а N — точка пересечения биссектрисы внешнего угла при вершине C с прямой AB. Доказать, что $MN \parallel AD$.

4. Треугольник расположен внутри квадрата так, что центр квадрата лежит вне треугольника, и ни одна вершина треугольника не лежит на сторонах квадрата. Доказать, что найдётся сторона треугольника, длина которой меньше длины стороны квадрата.

5. В треугольнике ABC проводят биссектрису AL. Касательная описанной окружности треугольника ABL, проведенная через точку B, пересекает в точке K касательную описанной окружности треугольника ACL, проведенную через точку C. Доказать, что точки A, L и K лежат на одной прямой.

6. Найти все тройки положительных целых чисел (x, y, z), для которых выполняется равенство
$$(x+y)(1+xy) = 2^z.$$

7. Найти все такие функции f, которые определены для всех положительных целых чисел, принимают положительные целые значения и удовлетворяют следующим условиям:
   1) $f(1) = 1$;
   2) $f(n+2) + (n^2+4n+3)f(n) = (2n+5)f(n+1)$ при любом положительном целом n;
   3) число $f(m)$ делится на число $f(n)$ при любых положительных целых $m > n$.

8. Известно, что числа $a^2 + b$, $b^2 + a$ и $\dfrac{a}{b}$ все рациональные, причём $a \neq b$. Может ли число a быть иррациональным?

9. Найти все такие простые числа $p > 2$, при которых сумма
$$\sum_{k=1}^{2004} k^{p-1}$$
делится на p.

10. Найти все такие числа, которые являются квадратом некоторого целого числа и содержат в своей десятичной записи только в двух местах отличные от нуля цифры, одна из которых равна 3.

11. Пусть $P(x)$ – произвольный многочлен с целыми коэффицентами. Доказать, что у многочлена
$$Q(x) = P(x^4) \cdot P(x^3) \cdot P(x^2) \cdot P(x) + 1$$
нет ни одного целого корня.

12. Доказать, что при любом целом $n > 1$ выполняется равенство

$$\lfloor\sqrt{1}\rfloor + \lfloor\sqrt{2}\rfloor + \ldots + \lfloor\sqrt{n^2-1}\rfloor = n^3 - (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) \ ,$$

где $\lfloor x \rfloor$ обозначает целую часть числа, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x.

13. Найти все такие действительные числа p, при которых неравенство

$$\frac{x^3 + py^3}{x + y} \geqslant xy$$

выполняется для любых положительных действительных чисел x и y.

14. Найти все такие функции f, которые определены на всём множестве действительных чисел, принимают действительные значения и при любых действительных числах x и y удовлетворяют условию

$$f\big(x^2 + f(y)\big) = (x - y)^2 f(x + y) \ .$$

15. Пусть a, b и c фиксированные положительные действительные числа. Найти все решения в положительных действительных числах системы уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{xy} + \sqrt{xz} - x = a \\ \sqrt{yz} + \sqrt{yx} - y = b \\ \sqrt{zx} + \sqrt{zy} - z = c \end{cases} .$$

16. На плоскости нарисованы выпуклый n-угольник и выпуклый m-угольник так, что их общая часть является выпуклым k-угольником. Найти наибольшее возможное значение k при заданных n и m.

17. Юра и Маша играют в следующую игру. Игровым полем является множество точек с целочисленными координатами $(x,\ y)$, где $1 \leqslant x \leqslant m$ и $1 \leqslant y \leqslant n$. Каждым своим ходом игрок соединяет отрезком две точки игрового поля, причём проводимый отрезок не должен проходить ни одну другую точку игрового поля, и также не должен иметь общих внутренних точек ни с одним из ранее проведённых отрезков. Первый ход делает Маша, далее ходы делаются по очереди. Проигрывает игрок, который не может больше сделать разрешённого правилами хода. При каких m и n имеется выигрышная стратегия у Маши, а при каких у Юры?

18. Определим $f(n)$ для любого целого положительного числа n следующим образом: $f(n) = 1$, если n нечётно, и $f(n) = k$, если $n = 2^k l$, где $k \geqslant 1$, а l нечётно. Найти наибольшее n, при котором

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) \leqslant 2005 \ .$$

19. На окружности выбирают 8 точек и проводят между каждыми двумя точками соединяющий их отрезок. На какое максимальное количество частей могут разделить круг эти отрезки?

20. Последовательность цифр

$$12345678910111213141516171819202122\ldots$$

получают путём записи друг за другом всех положительных целых чисел в порядке возрастания. Сколько цифр в числе, из которого взята цифра, находящаяся на 10^{2005}-ом месте в этой последовательности?