Treeningvõistlus “Balti tee 2004” võistkonnale

Tartus, 31. oktoobril 2004

1. Lisades positiivse täisarvu $k \geqslant 10$ kümneliste ja üheliste numbri vahele numbri 0, saadakse arv k'. Milliste arvude k korral k' jagub k-ga?

2. Mittenegatiivsete täisarvuliste liikmetega jada $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ rahuldab iga $k \geqslant 1$ korral tingimust
$$a_{k+1} = \left(\frac{k}{2004} + \frac{1}{k}\right) \cdot a_k^2 - \frac{k^3}{2004} + 1 .$$
On teada, et $a_1 < 333$. Kas on võimalik, et alates mingist indeksist k on jada liikmed a_k kõik kordarvud?

3. Mistahes mittenegatiivsete täisarvude a ja b korral tähistame
$$Z(a,b) = \frac{(3a)! \cdot (4b)!}{(a!)^4 \cdot (b!)^3} .$$
   a) Tõesta, et $Z(a,b)$ on täisarv alati, kui $a \leqslant b$.
   b) Tõesta, et iga mittenegatiivse täisarvu b jaoks leidub lõpmata palju selliseid mittenegatiivseid täisarve a, mille korral $Z(a,b)$ ei ole täisarv.

4. Tõesta, et leidub selline lõpmatu positiivsete täisarvude jada $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, et iga $k \geqslant 1$ korral
$$a_1^2 + \ldots + a_k^2$$
on mingi täisarvu ruut.

5. Leia kõik sellised algarvude kolmikud (p, q, r), kus $q^r + 1$ jagub p-ga, $r^p + 1$ jagub q-ga ning $p^q + 1$ jagub r-ga.

6. Leia kõik võimalused, kuidas kolmnurk küljepikkustega 3, 4, 5 jaotada ühe sirgjoonelise lõikega nii pindala kui ka ümbermõõdu poolest võrdseteks osadeks.

7. Kõõlnelinurga $ABCD$ külgede AB, BC, CD, DA keskpunktid on vastavalt K, L, M, N. Tõesta, et kolmnurkade AKN, BKL, CLM ja DMN kõrguste lõikepunktid on mingi rööpküliku tippudeks.

8. Kõõlkuusnurgas $ABCDEF$ on $|AB| = |BC| = a$, $|CD| = |DE| = b$ ja $|EF| = |FA| = c$. Tõesta, et sellel kuusnurgal leidub kuus paarikaupa erinevat diagonaali, mis jaotuvad kolmeks paariks nii, et iga paari diagonaalid on teineteisega risti.

9. Kolmnurga ABC tippe A ja B läbiv ringjoon lõikab külgi AC ja BC vastavalt punktides D ja E. Kiired BA ja ED lõikuvad punktis F ning sirged BD ja CF lõikuvad punktis M. Tõesta, et $|MF| = |MC|$ parajasti siis, kui $|MB| \cdot |MD| = |MC|^2$.

10. Kolmnurga ABC siseringjoon keskpunktiga I puutub külgi AB ja AC vastavalt punktides P ja Q. Sirged BI ja CI lõikavad sirget PQ vastavalt punktides K ja L. Tõesta, et kolmnurga ILK ümberringjoon puutub kolmnurga ABC siseringjoont parajasti siis, kui $|AB| + |AC| = 3 \cdot |BC|$.

11. Milliste reaalarvude $x \neq 0$ korral on avaldise

$$x^8 - x^5 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4}$$

väärtus vähim? Leia see vähim väärtus.

12. Kiired $y = x$ ja $y = 2x$ (kus $x \geqslant 0$) lõikavad paraboolist $y = x^2 + px + q$ välja kaks kaart (s.t. kumbki vaadeldav parabooli kaar asub nende kahe kiire vahel). Tõesta, et nende kaarte x-teljele võetud projektsioonide pikkuste vahe ei sõltu p ja q valikust, ning leia see vahe.

13. Olgu $f(x) = x^2 + ax + b\cos x$. Leia kõik a ja b väärtused, mille korral võrranditel $f(x) = 0$ ja $f(f(x)) = 0$ on sama mittetühi reaalarvuliste lahendite hulk.

14. Tõesta, et leidub täpselt üks selline positiivsete täisarvude jada $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, kus $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_4 = 12$ ja $a_{n+1}a_{n-1} = a_n^2 \pm 1$ iga $n \geqslant 2$ korral.

15. John ja Jack mängivad järgmist mängu. John valib ühe arvu hulgast $A = \{1, 2, \ldots, 144\}$. Jack püüab Johni valitud arvu teada saada, valides järjest hulga A mingeid alamhulki B_i ja küsides küsimusi "Kas valitud arv on alamhulgas B_i?". Iga vastuse "jah" eest peab Jack Johnile andma 2 dollarit, vastuse "ei" eest aga 1 dollari. Kui Jack Johni valitud arvu teada saab, on ta võitnud ja saab kogu Johnile antud raha topelt tagasi. Kui aga Jackil enne arvu teadasaamist raha otsa lõpeb, on ta kaotanud ja raha jääb Johnile. Kui palju peab Jackil vähemalt raha olema, et ta saaks mängu kindlasti võita?

16. Arvuti 2004 mälupesas on algul arvud $1, 2, 4, \ldots, 2^{2003}$. Kaks programmeerijat hakkavad kordamööda neid arve muutma, valides iga kord mingid 7 mälupesa ja vähendades neis olevaid arve 1 võrra. Kui mingis mälupesas olev arv muutub negatiivseks, läheb arvuti katki ja viimasena arve muutnud programmeerija on kaotanud. Kummal programmeerijal on olemas võitev strateegia?

17. Leia kõik võimalused arvude 1 kuni 9 kirjutamiseks 3×3 tabelisse nii, et kõigi 6 sellise ruudu korral, mille tipud asuvad tabeli lahtrite keskpunktides, on vastavates lahtrites olevate arvude summa üks ja seesama.

18. Malelauana värvitud lõpmatul ruudustikul on kinnine iseennast mittelõikav murdjoon, mille lülid paiknevad ruudustiku joontel. Iga ühiklõik (kaht ruudustiku naaberruutu eraldav lõik) sellel murdjoonel värvitakse mustaks või valgeks vastavalt selle lõiguga murdjoone sisepiirkonnas külgneva ruudu värvile. Olgu murdjoone sees M musta ja V valget ruutu. Leia mustade ja valgete ühiklõikude arvude vahe murdjoonel.

19. Tasandil on valitud $n \geqslant 9$ punkti. Mistahes 9 valitud punkti jaoks leiduvad kaks sellist ringjoont, et igaüks neist 9 punktist paikneb vähemalt ühel neist ringjoontest. Tõesta, et leiduvad kaks sellist ringjoont, et igaüks tasandil valitud n punktist paikneb vähemalt ühel neist ringjoontest.

20. On antud 101 ruudust koosnev sidus kujund (s.t. selle kujundi mistahes ruudult mistahes teisele ruudule saab liikuda, astudes igal sammul mingilt ruudult sellega ühist külge omavale ruudule). On teada, et mõõtmetega 102×102 ruudulise paberi tükist saab välja lõigata maksimaalselt n eksemplari antud kujundit. Leia n vähim võimalik väärtus.