Тренировочное соревнование для команды “Балтийского пути 2004”

Тарту, 31 октября 2004

1. Добавляя цифру 0 между цифрами десяток и единиц положительного целого числа $k \geqslant 10$, получат число k'. При каких k число k' будет делиться на k?

2. Последовательность неотрицательных целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ при любом $k \geqslant 1$ удовлетворяет условию

$$a_{k+1} = \left(\frac{k}{2004} + \frac{1}{k}\right) \cdot a_k^2 - \frac{k^3}{2004} + 1 .$$

Известно, что $a_1 < 333$. Возможно ли, что начиная с некоторого индекса k все числа a_k являются составными?

3. При любых неотрицательных целых чисел a и b обозначим

$$Z(a,b) = \frac{(3a)! \cdot (4b)!}{(a!)^4 \cdot (b!)^3} .$$

а) Доказать, что $Z(a,b)$ является целым числом всегда, когда $a \leqslant b$.
б) Доказать, что для любого неотрицательного целого числа b найдется бесконечно много таких неотрицательных целых чисел a, при которых $Z(a,b)$ не является целым.

4. Доказать, что найдется бесконечная последовательность положительных целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ такая, что при любом $k \geqslant 1$

$$a_1^2 + \ldots + a_k^2$$

является квадратом некоторого целого числа.

5. Найти все такие тройки (p, q, r) простых чисел, где $q^r + 1$ делится на p, $r^p + 1$ делится на q и $p^q + 1$ делится на r.

6. Найти все способы разделить треугольник с длинами сторон 3, 4, 5 одним прямолинейным разрезом на две части, имеющие равные площади и равные периметры.

7. Пусть K, L, M, N — соответственно середины сторон AB, BC, CD, DA четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность. Доказать, что точки пересечения высот треугольников AKN, BKL, CLM и DMN являются вершинами некоторого параллелограмма.

8. В шестиугольнике $ABCDEF$, вписанном в окружность, имеется $|AB| = |BC| = a$, $|CD| = |DE| = b$ ja $|EF| = |FA| = c$. Доказать, что у этого шестиугольника найдутся шесть попарно различных диагоналей, которые можно разбить на три пары так, что диагонали каждой пары перпендикулярны друг другу.

9. Окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC, пересекает его стороны AC и BC соответственно в точках D и E. Лучи BA и ED пересекаются в точке F, а прямые BD и CF пересекаются в точке M. Доказать, что $|MF| = |MC|$ тогда и только тогда, когда $|MB| \cdot |MD| = |MC|^2$.

10. Окружность с центром I, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB и AC соответственно в точках P и Q. Прямые BI и CI пересекают прямую PQ соответственно в точках K и L. Доказать, что окружность, описанная около треугольника ILK, касается вписанную окружность треугольника ABC тогда и только тогда, когда $|AB| + |AC| = 3 \cdot |BC|$.

11. При каких действительных числах $x \neq 0$ значение выражения

$$x^8 - x^5 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4}$$

является наименьшим? Найти это наименьшее значение.

12. Лучи $y = x$ и $y = 2x$ (где $x \geqslant 0$) выделяют две дуги параболы $y = x^2 + px + q$ (т.е. каждая из рассматриваемых дуг параболы расположена между этими двумя лучами). Доказать, что разность длин проекций этих дуг на ось x не зависит от выбора p и q, и найти эту разность.

13. Пусть $f(x) = x^2 + ax + b\cos x$. Найти все значения a и b, при которых уравнения $f(x) = 0$ и $f(f(x)) = 0$ имеют одно и то же непустое множество действительных решений.

14. Доказать, что найдется ровно одна такая последовательность положительных целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, где $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_4 = 12$ и $a_{n+1}a_{n-1} = a_n^2 \pm 1$ при каждом $n \geqslant 2$.

15. Джон и Джэк играют в следующую игру. Джон выбирает одно число из множества $A = \{1, 2, \ldots, 144\}$. Джэк старается узнать выбранное Джоном число, подбирая по одному некоторые подмножества B_i множества A и задавая вопросы “Принадлежит ли выбранное число подмножеству B_i?”. За каждый ответ “да” Джэк должен заплатить Джону 2 доллара, а за каждый ответ “нет” — 1 доллар. Если Джэк узнает выбранное Джоном число, то он выиграл и получит уплаченные Джону деньги обратно в двукратной сумме. Если же у Джэка деньги заканчиваются до того, как он узнает число, то он проиграл и деньги останутся у Джона. Сколько должен Джэк по меньшей мере иметь денег, чтобы он наверняка смог выиграть эту игру?

16. В 2004 ячейках памяти компьютера сначала записаны числа $1, 2, 4, \ldots, 2^{2003}$. Два программиста по очереди будут изменять эти числа, выбирая на каждом ходу некоторые 7 ячеек и уменьшая число в каждом из них на 1. Если число в некоторой ячейке становится отрицательным, то компьютер сломается и программист, последним изменявший числа, проиграет. Какой из программистов имеет выигрышную стратегию?

17. Найти все способы записания чисел от 1 до 9 в клетки 3×3 таблицы так, чтобы при каждом из 6 квадратов, имеющих все свои вершины в центрах клеток таблицы, сумма чисел в соответствующих клетках будет одна и та же.

18. На бесконечной клетчатой бумаге находится замкнутая несамопересекающаяся ломаная, все звенья которой расположены на линиях бумаги. Каждый единичный отрезок этой ломаной (т.е. отрезок, расположенный между двумя соседними клетками бумаги) раскрасят в черный или белый цвет соответственно цвету клетки, расположенной рядом с этим отрезком внутри ломаной. Пусть внутри ломаной имеется всего M черных и V белых клеток. Найти разность количества черных и белых единичных отрезков на ломаной.

19. На плоскости выбраны $n \geqslant 9$ точек. Для любых 9 выбранных точек найдутся такие две окружности, которые вместе содержат все эти 9 точек. Доказать, что найдутся такие две окружности, которые вместе содержат все n выбранных на плоскости точек.

20. Дана связная фигура, состоящая из 101 клеток (т.е. с любой клетки этой фигуры можно двигаться на любую другую клетку, на каждом шагу перемещаясь с некоторой клетки на клетку, имеющую с ней общую сторону). Известно, что из куски клетчатой бумаги размером 102×102 можно вырезать максимально n экземпляров данной фигуры. Найти наименьшее возможное значение n.