# Treeningvõistlus "Balti tee 2003" võistkonnale

## Tartus, 26. oktoobril 2003

1. Tõesta, et mistahes positiivsete arvude $a, b, c, d$ korral kehtib võrratus

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}.$$

2. Lahenda võrrand

$$(y^2-3y+2)^2-3(y^2-3y+2)+2-y=0.$$

3. Olgu $a_0 = 0$ ja

$$a_{n+1} = k(a_n+1)+(k+1)a_n+2\sqrt{k(k+1)a_n(a_n+1)}$$

iga $n = 0, 1, 2, \ldots$ korral, kus $k$ on etteantud positiivne täisarv. Tõesta, et $a_n$ on täisarv kõigi $n = 1, 2, 3, \ldots$ korral.

4. Leia kõik sellised funktsioonid $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et

$$f(x)^2 \cdot f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 64x$$

mistahes $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq -1$ korral.

5. Leia kõik ratsionaalarvude kolmikud $(a, b, c)$, mille korral $a$, $b$ ja $c$ on võrrandi $x^3+ax^2+bx+c=0$ lahenditeks.

6. Naturaalarvu $n$ nimetatakse täiuslikuks, kui ta on võrdne oma pärisjagajate (ehk arvust $n$ erinevate positiivsete jagajate) summaga. Olgu $f$ funktsioon, mis rahuldab järgmisi tingimusi:
   1) $f(n) = 0$, kui naturaalarv $n$ on täiuslik;
   2) $f(n) = 0$, kui naturaalarv $n$ lõpeb numbriga 4;
   3) $f(ab) = f(a) + f(b)$.

   Leia $f(1988)$.

7. Olgu $n \geqslant 3$ positiivne täisarv. Kas leiduvad $n$ positiivset täisarvu $a_1, a_2, \ldots, a_n$, mille hulgas leidub erinevaid, nii et mistahes $i$, $3 \leqslant i \leqslant n$ korral

$$a_i + S_i = (a_i, S_i) + [a_i, S_i],$$

kus $S_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_i$ ning $(\cdot, \cdot)$ ja $[\cdot, \cdot]$ tähistavad vastavalt suurimat ühistegurit ja vähimat ühiskordset?

8. Olgu $n$ naturaalarv ja $d$ arvu $2n^2$ naturaalarvuline jagaja. Tõesta, et arv $n^2 + d$ pole täisruut.

9. Tõesta, et $\{(m,n) \mid (2m+3n) \vdots 17\} = \{(m,n) \mid (9m+5n) \vdots 17\}$.

10. Olgu $a$, $b$ ja $c$ positiivsed täisarvud. Vaatleme täisarvude jadasid, mille esimene liige on 1 ja viimane liige $26^a 11^b 2003^c$ ning mille iga liige jagub eelneva liikmega.
    a) Millise pikkusega on pikim selline jada?
    b) Kui palju on antud tingimust rahuldavaid pikimaid jadasid?

11. Kas $5 \times 7$ ristkülikut on võimalik katta kolmest $1 \times 1$ ruudust koosnevate “nurgikutega” (neid võib panna üksteise peale) nii, et kõik ruudud oleksid kaetud sama positiivse arvu nurgikutega?

12. Milliste naturaalarvude $n$ korral saab pliiatsit paberilt tõstmata ja alguspunktis lõpetades teha joonise, millel on kumer $n$-nurk ja tema $n-3$ diagonaali, mis omavahel lõikuvad ainult hulknurga tippudes ja jaotavad hulknurga $n-2$ kolmnurgaks?

13. Tõesta, et iga täisarvu $m \geqslant 3$ korral saab $m$ numbrit $1$, $m$ numbrit $2$ ja $m$ numbrit $3$ panna sellisesse järjekorda, et tekkinud arvus ükski numbrite plokk, mis ei hõlma kogu arvu, ei sisalda kõiki kolme numbrit ühesugusel määral ja ükski plokk pikkusega $m$ ei koosne ühesugustest numbritest.

14. Olgu $n$ naturaalarv. Tõesta, et arve $\overline{a_1 a_2 \ldots a_{2n}}$, kus numbrid $a_i$ on kõik nullist erinevad ja $a_1a_2 + a_3a_4 + \ldots + a_{2n-1}a_{2n}$ on paaris, on $\dfrac{81^n + 31^n}{2}$.

15. Olgu $n$ paarisarv. Nimetame hulka $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$ *vabaks*, kui ükski summadest $\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \varepsilon_3 a_3$, kus
    1) iga $i = 1, 2, 3$ korral $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$ ja $a_i \in A$,
    2) vähemalt üks kordajaist $\varepsilon_i$ pole null,
    3) ükski arv hulgast $A$ ei esine summas nii kordajaga $1$ kui kordajaga $-1$,

    ei jagu $n$-ga. Leia suurim võimalik vaba hulga elementide arv.

16. Kolmnurga $ABC$ külje $BC$ pikendusel üle punkti $B$ valitakse punkt $D$ nii, et $|BD| = |AB|$. Olgu $P$ kolmnurga $ACD$ tipust $D$ tõmmatud mediaani ja kolmnurga $ABC$ tipust $B$ tõmmatud nurgapoolitaja (või nende pikenduste) lõikepunkt. Tõesta, et $\angle BAP = \angle ACB$.

17. Olgu $ABC$ mittevõrdhaarne kolmnurk. Kiirtel $BA$ ja $CA$ võetakse vastavalt punktid $D_1$ ja $E_1$ nii, et $|BD_1| = |CE_1| = |BC|$. Kiirtel $CB$ ja $AB$ võetakse vastavalt punktid $D_2$ ja $E_2$ nii, et $|CD_2| = |AE_2| = |CA|$. Tõesta, et $D_1E_1 \parallel D_2E_2$.

18. Tähistagu $a_n$ ja $r_n$ ümbermõõduga 4 korrapärase $n$-nurga vastavalt sise- ja ümberringjoone raadiust. Tõesta, et iga $n$ korral
    a) $a_{2n}$ on $a_n$ ja $r_n$ aritmeetiline keskmine;
    b) $r_{2n}$ on $a_{2n}$ ja $r_n$ geomeetriline keskmine.

19. Kumera nelinurga iga tipu kauguste summa külgedega määratud sirgetest on sama. Tõesta, et tegemist on rööpkülikuga.

20. Olgu $ABC$ teravnurkne kolmnurk kõrgustega $CD$, $AP$ ja $BQ$. Olgu $H$ nende kõrguste lõikepunkt ning $M$ lõigu $AB$ keskpunkt. Olgu $R$ sirgete $AB$ ja $PQ$ lõikepunkt. Tõesta, et
    a) $MP$ puutub nii kolmnurga $PQC$ kui $DRP$ ümberringjoont;
    b) $RH \perp CM$.