Treeningvõistlus “Balti tee 2003” võistkonnale

Vastused ja lahendusvihjed

1. *(Ungari 1964)* Tõesta, et mistahes positiivsete arvude a, b, c, d korral kehtib võrratus

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}.$$

Vihje.

$$\frac{abc+abd+acd+bcd}{4} = \frac{1}{2}\left(ab\frac{c+d}{2} + cd\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}\cdot\frac{a+b+c+d}{4} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^3 \leqslant \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}\right)^3.$$

Teine võimalus: piisab näidata, et $s_1^3 \geqslant s_3$, see kehtib aga Maclaurini võrratuse põhjal. Tõepoolest, $s_1^2 \geqslant s_2$, $s_2^3 \geqslant s_3^2$, millest $s_1^3 \geqslant s_2^{\frac{3}{2}} \geqslant s_3$.

Kolmas võimalus (Martin Pettai). Vasaku poole kuuendas astmes arvutame välja ruudu $(a^2+b^2+c^2+d^2)^3 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2(a^2+b^2+c^2+d^2)$ ning hindame arendise sees $a^4+b^4+c^4+d^4 \geqslant 2a^2c^2+2b^4d^4$. Seejärel saame teguritele $(a^2b^2+\ldots+c^2d^2)(a^2+\ldots+d^2)$, kus iga liidetavat on võetud kaks korda, rakendada Cauchy-Bunjakowski võrratust.

2. *(Putnami võistlus, 1938)* Lahenda võrrand

$$(y^2-3y+2)^2 - 3(y^2-3y+2) + 2 - y = 0.$$

Vihje. Meil on vaja leida võrrandi $P(P(y)) = y$ lahendid, kus $P(x) = x^2-3x+2$. Ilmselt võrrandi $P(y) = y$ lahendid $y_1 = 2 \pm \sqrt{2}$ on ka $P(P(y)) = y$ lahendid, kusjuures viimasel võrrandil on veel lahendeid. Ülejäänud lahendite leidmiseks peame leidma polünoomi

$$(P(P(y)) - y) : (P(y) - y) = y^2 - 2y$$

nullkohad, need on aga $y_3 = 0$ ja $y_4 = 2$.

Teine võimalus: märkame, et vasakul pool saame sulgude ette tuua teguri $y-2$ ning pärast teisendusi veel teguri y. Jääb leida, millal võrrandis $y(y-2)(y^2-4y+2) = 0$ olev ruutkolmliige võrdub nulliga.

3. *(IMO 1983 longlist)* Olgu $a_0 = 0$ ja

$$a_{n+1} = k(a_n+1) + (k+1)a_n + 2\sqrt{k(k+1)a_n(a_n+1)},$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ korral, kus k on etteantud positiivne täisarv. Tõesta, et a_n on täisarv kõigi $n = 1, 2, 3, \ldots$ korral.

Vihje. Ruutuvõtmisel saame

$$a_{n+1}^2 + k^2 + a_n^2 = 4a_na_{n+1}k + 2a_{n+1}k + 2a_na_{n+1} + 2ka_n.$$

Leides sama avaldise $n-1$ korral ning lahutades tulemused, saame

$$a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2 = (4a_n k + 2k + 2a_n)(a_{n+1} - a_{n-1}),$$

millest edasi tegurdades

$$(a_{n+1} - a_{n-1})(a_{n+1} + a_{n-1} - 4a_n k - 2k - 2a_n) = 0,$$

s.t. a_{n+1} on täisarv eeldusel, et a_n ja a_{n-1} on täisarvud.

Teine võimalus (Martin Pettai). Avaldame

$$\sqrt{a_{n+1}} = \sqrt{k(a_n+1)} + \sqrt{(k+1)a_n}$$

ning

$$\sqrt{a_{n+1}+1} = \sqrt{ka_n} + \sqrt{(k+1)(a_n+1)}\ .$$

Induktsiooniga näitame, et $\sqrt{a_{n+1}} \pm \sqrt{a_{n+1}+1} = \left(\sqrt{k+1} \pm \sqrt{k}\right)^n$. Nüüd saame avaldada

$$a_n = \frac{1}{4}\left[\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)^{2n} + \left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)^{2n} - 2\right],$$

milles tähistame $b_n = 4a_n + 2$. Seega rahuldab jada (b_n) liige b_n lineaarset rekurrentset võrrandit $b_n = x_1 b_{n-1} + x_2 b_{n-2}$, mille karakteristliku võrrandi lahendid on $x_1 = (\sqrt{k+1}+\sqrt{k})^2$ ja $x_2 = (\sqrt{k+1}-\sqrt{k})^2$. Algtingimuste leidmise järel võrranditest $x_1 x_2 = 1$ ja $x_1 + x_2 = 4k+2$ saame kirjutada $b_n = (4k+2)b_{n-1} - b_{n-2}$, s.t. $a_n = (4k+2)a_{n-1} - a_{n-2} + 2k$. Kuna $a_0, a_1 \in \mathbb{Z}$, siis saame siit induktsiooni abil ülesande väite.

4. *(Ladina-Ameerika olümpiaad 1987)* Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nii, et

$$f(x)^2 \cdot f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 64x$$

mistahes $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq -1$ korral.

Vihje. Asetame $x \to \dfrac{1-x}{1+x}$, siis saame

$$f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 f(x) = 64 \cdot \frac{1-x}{1+x},$$

millest avaldame ($f(x) \neq 0$, sest $x \neq 0, \pm 1$)

$$f(x) = 4\sqrt[3]{\frac{x^2(1+x)}{1-x}}.$$

5. *(Putnami võistlus, 1940)* Leia kõik ratsionaalarvude kolmikud (a, b, c), mille korral a, b ja c on võrrandi $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ lahenditeks.

Vihje. Viète'i valemitest

$$a + b + c = -a, \quad ab + bc + ca = b, \quad abc = -c.$$

Juhul $c=0$ saame $ab=b$, millest $b=0$ korral ka $a=0$. Juhul $b\neq 0$ saame $a=1$, millest $b=-2$, seega sel juhul on kaks kolmikut $(0,0,0)$ ja $(1,-2,0)$.

Kui aga $c\neq 0$, siis $ab=-1$ ja $a,b\neq 0$. Seepärast teisest võrrandist

$$-1+c\left(a-\frac{1}{a}\right)=-\frac{1}{a},$$

millest $a=1$ või $c=\dfrac{1}{a+1}$. Esimene juht annab kolmiku $(1,-1,-1)$, teine juht viib aga võrrandini $2a^3+2a^2-1=0$, millel ratsionaalarvulised lahendid puuduvad.

6. *(Cono Sur 1988)* Naturaalarvu n nimetatakse täiuslikuks, kui ta on võrdne oma pärisjagajate (ehk arvust n erinevate positiivsete jagajate) summaga. Olgu f funktsioon, mis rahuldab järgmisi tingimusi:
   1) $f(n)=0$, kui naturaalarv n on täiuslik;
   2) $f(n)=0$, kui naturaalarv n lõpeb numbriga 4;
   3) $f(ab)=f(a)+f(b)$.

   Leia $f(1988)$.

   Vihje. Kuna $0=f(3\cdot 1988)=f(3)+f(1988)$, siis piisab leida $f(3)$. Et arv 6 on täiuslik, siis $f(3)=f(3)+f(4)=f(12)=f(2)+f(6)=f(2)$. Samas $0=f(4)=f(2)+f(2)$, millest $f(3)=0$, kokkuvõttes $f(1988)=0$.

   Teine võimalus: $f(1988)=f(2)+f(994)=f(2)$. Samas $0=f(4)=f(2)+f(2)$, kust $f(1988)=f(2)=0$.

   Kolmas võimalus: märkame, et arv 28 on täiuslik, seetõttu $f(1988)=f(28)+f(71)=f(71)$. Nüüd aga $0=f(284)=f(4)+f(71)=f(71)$, millest kokkuvõttes $f(1988)=0$.

7. *(Kanada 1996/97 harjutusülesanne)* Olgu $n\geqslant 3$ positiivne täisarv. Kas leiduvad n positiivset täisarvu $a_1,a_2,\ldots,a_n$, mille hulgas leidub erinevaid, nii et mistahes i, $3\leqslant i\leqslant n$ korral

   $$a_i+S_i=(a_i,S_i)+[a_i,S_i],$$

   kus $S_i=a_1+a_2+\ldots+a_i$ ning $(\cdot,\cdot)$ ja $[\cdot,\cdot]$ tähistavad vastavalt suurimat ühistegurit ja vähimat ühiskordset?

   Vihje. Tähistame $b_i=(a_i,S_i)$, siis $[a_i,S_i]=\dfrac{a_iS_i}{b_i}$ ja antud tingimus on samaväärne $0=(b_i-a_i)(b_i-S_i)$. Valime $a_i=(a_i,S_i)$ ning $S_i=[a_i,S_i]$, selletarvis võtame $a_1=a_2=1$, $a_i=2^{i-2}$.

   Teine võimalus on valida $a_1=1$, $a_2=2$ ja $a_i=3\cdot 2^{i-3}$.

   Kolmas võimalus on valida a_1 suvaliselt, $a_i=S_{i-1}$. Siis $S_i=2a_i$, $(a_i,S_i)=a_i$ ja $[a_i,S_i]=2a_i$.

   Neljas võimalus: $a_1=1$, $a_2=3$ ja $a_n=2^{n-1}$.

8. *(Ungari 1953)* Olgu n naturaalarv ja d arvu $2n^2$ naturaalarvuline jagaja. Tõesta, et arv n^2+d pole täisruut.

   Vihje. Oletame, et $x^2=n^2+d$. Ülesande tingimustest $2n^2=kd$, siis

   $$x^2=n^2+d=n^2+\frac{2n^2}{k}\qquad\Rightarrow\qquad k^2x^2=n^2(k^2+2k).$$

See tähendab, et k^2+2k on täisruut, vastuolu ($k^2 < k^2+2k < (k+1)^2$).

Teine võimalus on teha nagu enne ning leida, et

$$\frac{k+2}{k} = \frac{x^2}{n^2}.$$

Vasakul pool erinevad lugeja ja nimetaja 2 võrra, pärast taandamist saab see erinevus ainult väheneda. Paremal pool on aga pärast taandamist murd kujul $\frac{p^2}{q^2}$, kus $p \neq q$ on naturaalarvud, mille ruudud erinevad vähemalt 3 võrra. Tõepoolest, lugeja ja nimetaja erinevus on esitatav $p^2-q^2=(p+q)(p-q)$, ning $p \neq q$ tõttu $p+q \geqslant 3$ ja $p-q \geqslant 1$. Järelikult saadud võrre ei saa kehtida.

9. *(Eötvöse võistlus 1894)* Tõesta, et $\{(m,n) \mid (2m+3n) \vdots 17\} = \{(m,n) \mid (9m+5n) \vdots 17\}$.

   Vihje.

   $$17 \mid 2m+3n \quad \Leftrightarrow \quad 17 \mid 8m+12n \quad \Leftrightarrow \quad 17 \mid -8m-12n \quad \Leftrightarrow \quad 17 \mid 9m+5n.$$

10. *(Hiina 1990, modifitseeritud)* Olgu a, b ja c positiivsed täisarvud. Vaatleme täisarvude jadasid, mille esimene liige on 1 ja viimane liige $26^a 11^b 2003^c$ ning mille iga liige jagub eelneva liikmega.
    a) Millise pikkusega on pikim selline jada?
    b) Kui palju on antud tingimust rahuldavaid pikimaid jadasid?

    Märkus: Ülesande sõnastuse järgi lahendades saame, et antud tingimust rahuldav jada võib olla kuitahes pikk ning taolisi jadasid on lõpmata palju. Järgnevas eeldame täiendavalt, et vaadeldakse *rangelt kasvavaid* täisarvude jadasid.

    Vihje. Igal jada liikmel peab olema üks algtegur rohkem kui temale eelneval. Arvul $26^a 11^b 2003^c = 2^a 11^b 13^a 2003^c$ on kokku $2a+b+c$ (mitte tingimata erinevat) algtegurit. Seega pikim võimalik jada on pikkusega $2a+b+c+1$. Kuna algtegureid võime juurde panna mistahes järjekorras, on maksimaalse pikkusega jadasid

    $$\frac{(2a+b+c)!}{a!^2 b! c!}$$

    tükki.

11. *(MOP 2002, Blue/Black Groups)* Kas 5×7 ristkülikut on võimalik katta kolmest 1×1 ruudust koosnevate "nurgikutega" (neid võib panna üksteise peale) nii, et kõik ruudud oleksid kaetud sama positiivse arvu nurgikutega?

    Vastus: Ei.

    Vihje. Kirjutame igasse ruutu, millesse on nurgaruudust võimalik saada hüpetega üle ühe ruudu horisontaalis või vertikaalis, arvu -2 ja ülejäänud ruutudesse arvu 1. Nurgiku poolt kaetavate arvude summa saab olla 0 või 3, st mittenegatiivne. Samas kogu ruudustiku arvude summa on $12 \cdot (-2) + 23 \cdot 1 = -1$, negatiivne.

12. *(MOP 2002, Blue/Black Groups)* Milliste naturaalarvude n korral saab pliiatsit paberilt tõstmata ja alguspunktis lõpetades teha joonise, millel on kumer n-nurk ja tema $n-3$ diagonaali, mis omavahel lõikuvad ainult hulknurga tippudes ja jaotavad hulknurga $n-2$ kolmnurgaks?

    Vastus: $3 \mid n$.

    Vihje. Tähistame hulknurga tippe $A_0, \ldots, A_{n-1}$, nummerdus *modulo* n.

Induktsiooniga on lihtne veenduda, et 3-ga jaguvad arvud sobivad. Baasiks on $n = 3$, kus on vaja joonistada kolmnurk. Kui $3k$ jaoks on joonis tehtav, siis $3k + 3$ jaoks teeme joonise järgmiselt: tõmbame jooned $A_0 \to A_{3k+1} \to A_{3k-1} \to A_{3k} \to A_{3k+1} \to A_{3k+2} \to A_0$ ja seejärel teeme joonise hulknurga $A_0A_1 \ldots A_{3k-1}A_0$ jaoks.

Näitame järgnevas, et kui nõutud joonis leidub, siis $3 \mid n$. Nimetame joonise tippudevahelisi jooni *servadeks*. Tipust väljuvate servade arvu nimetame tipu *valentsiks*. Kasutame tuntud fakti, et joonis on pliiatsit paberilt tõstmata ja alguspunktis lõpetades tehtav parajasti siis, kui iga tipu valents on paaris (pole eriti keeruline tõestada).

Edasi märkame, et joonise suvalise serva e korral on tema otstippudest e suhtes samale poole minevate servade arvud sama paarsusega. (Kasutame eelmises lõigus mainitud fakti ja asjaolu, et servad lõikuvad ainult tippudes.)

Näeme, et joonis ei saa sisaldada kolmnurki $A_iA_{i+1}A_k$ ja samal ajal $A_iA_{i-1}A_k$, sest A_i valents oleks paaritu. Eelmisest lõigust tuleneb, et joonis ei saa sisaldada ka kolmnurki $A_iA_{i+1}A_k$ ja $A_{i+1}A_kA_{k+1}$.

Kahest eelmisest lõigust kokkuvõttes: joonise ükski kaks kolmnurka, mis omavad algse hulknurgaga ühist külge, ei oma ühist külge omavahel.

Värvime kõik hulknurgaga ühist külge omavad kolmnurgad siniseks ja vaatleme edasi joonist, mille saame, kui sinised arvestusest välja jätame. See koosneb väiksematest hulknurkadest, mille igaühe kohta võime teha kogu selle arutluse läbi. Neis hulknurkades värvime nendega ühist külge omavad kolmnurgad punaseks. Nii jätkame, valides sinist ja punast vaheldumisi. Lõpuks on meil kogu esialgse joonise $n-3$ kolmnurka värvitud kahe värviga selliselt, et omavahel ühist külge omavad kolmnurgad on eri värvi.

Punaste kolmnurkade külgede arv on $3p$, siniste kolmnurkade külgede arv $3s$. Iga serv, mis eraldab kaht kolmnurka, on loendatud mõlemas; algse hulknurga servad aga ainult siniste kolmnurkade külgede nimekirjas. Seega $3s = 3p + n$, millest $3 \mid n$.

13. *(The Olympiad Corner, No 180)* Tõesta, et iga täisarvu $m \geqslant 3$ korral saab m numbrit 1, m numbrit 2 ja m numbrit 3 panna sellisesse järjekorda, et tekkinud arvus ükski numbrite plokk, mis ei hõlma kogu arvu, ei sisalda kõiki kolme numbrit ühesugusel määral ja ükski plokk pikkusega m ei koosne ühesugustest numbritest.

   Vihje. Sobib $1\underbrace{2\ldots2}_{m-1}32\underbrace{3\ldots3}_{m-1}\underbrace{1\ldots1}_{m-1}$.

14. *(Bulgaaria, talv 1997)* Olgu n naturaalarv. Tõesta, et arve $\overline{a_1a_2\ldots a_{2n}}$, kus numbrid a_i on kõik nullist erinevad ja $a_1a_2 + a_3a_4 + \ldots + a_{2n-1}a_{2n}$ on paaris, on $\dfrac{81^n + 31^n}{2}$.

   Vihje. Olgu A_n loendatavate objektide arv. Olgu veel B_n analoogsete objektide arv, kus nõutud summa on paaritu. Puhta kombinatoorikaga saame seosed

$$A_n = \sum_{\substack{i=0\\2\mid i}}^{n} \binom{n}{i} 25^i 56^{n-i}, \qquad B_n = \sum_{\substack{i=0\\2\nmid i}}^{n} \binom{n}{i} 25^i 56^{n-i}.$$

   Siit saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} A_n + B_n = 81^n \\ A_n - B_n = 31^n, \end{cases}$$

   millest saamegi vajaliku võrduse.

15. *(Bulgaaria, kevad 1997)* Olgu n paarisarv. Nimetame hulka $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$ *vabaks*, kui ükski summadest $\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \varepsilon_3 a_3$, kus

    1) iga $i = 1, 2, 3$ korral $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$ ja $a_i \in A$,
    2) vähemalt üks kordajaist ε_i pole null,
    3) ükski arv hulgast A ei esine summas nii kordajaga 1 kui kordajaga -1,

    ei jagu n-ga. Leia suurim võimalik vaba hulga elementide arv.

    Vastus. $\left[\frac{n}{4}\right]$.

    Vihje. Vaba on nt hulk $\left\{1, 3, \ldots, 2\left[\frac{n}{4}\right]-1\right\}$. Tõestame juhul $n = 4m$, et suuremad hulgad pole vabad. (Ülejäänud juhtudel on tõestus analoogiline.) Oletame vastuväiteliselt, et A on vaba ja sisaldab $m+1$ elementi. Üldisust kitsendamata eeldame, et $A \subseteq \{1, \ldots, 2m\}$ (kui selliste jaoks on käes, saame sellest ka suvaliste jaoks, sest i võib asendada arvuga $n - i$). Olgu A elemendid $a_1 < \ldots < a_{m+1}$ ja olgu $B = \{a_1 + a_i : i = 1, \ldots, m+1\}$. Jadas $a_1, \ldots, a_{m+1}, a_1+a_1, \ldots, a_1+a_{m+1}$ leidub Dirichlet' printsiibi põhjal võrdseid. Seega mingite i, j korral $a_1 + a_i = a_j$, mis on vastuolus vabadusega.

16. *(The Olympiad Corner, No 179)* Kolmnurga ABC külje BC pikendusel üle punkti B valitakse punkt D nii, et $|BD| = |AB|$. Olgu P kolmnurga ACD tipust D tõmmatud mediaani ja kolmnurga ABC tipust B tõmmatud nurgapoolitaja (või nende pikenduste) lõikepunkt. Tõesta, et $\angle BAP = \angle ACB$.

    Vihje. Märkame, et $2\angle ABP = \angle ABC = \angle ADB + \angle BAD = 2\angle BAD$. Seega $AD \parallel PB$ (põiknurgad). Tõmbame sirge paralleelselt lõiguga AC läbi punkti P; olgu X ja Y vastavalt kiirte DC ja DA lõikepunktid temaga. Siis P on lõigu XY keskpunkt, järelikult PB on kolmnurga DXY kesklõik. Seega on kolmnurgad PXB ja PAB kongruentsed, mis annabki vajaliku väite.

17. *(The Olympiad Corner, No 179)* Olgu ABC mittevõrdhaarne kolmnurk. Kiirtel BA ja CA võetakse vastavalt punktid D_1 ja E_1 nii, et $|BD_1| = |CE_1| = |BC|$. Kiirtel CB ja AB võetakse vastavalt punktid D_2 ja E_2 nii, et $|CD_2| = |AE_2| = |CA|$. Tõesta, et $D_1E_1 \parallel D_2E_2$.

    Vihje. Olgu S sirgete AB ja D_2E_1 lõikepunkt. Siis CS poolitab nurga ACB, sest $CE_1 = CB$ ja $CA = CD_2$. Seega

    $$\frac{|D_1S|}{|SE_2|} = \frac{|BD_1| - |BS|}{|AE_2| - |AS|} = \frac{|BC|}{|CA|} = \frac{|CE_1|}{|CD_2|} = \frac{|E_1S|}{|SD_2|}.$$

    Järelikult $D_1E_1 \parallel D_2E_2$.

18. *(The Olympiad Corner, No 179)* Tähistagu a_n ja r_n ümbermõõduga 4 korrapärase n-nurga vastavalt sise- ja ümberringjoone raadiust. Tõesta, et iga n korral

    a) a_{2n} on a_n ja r_n aritmeetiline keskmine;
    b) r_{2n} on a_{2n} ja r_n geomeetriline keskmine.

    Vihje. Tuleb välja otsese arvutamisega.

19. *(Prasolov, 13.18)* Kumera nelinurga iga tipu kauguste summa külgedega määratud sirgetest on sama. Tõesta, et tegemist on rööpkülikuga.

    Vihje. Kasutame järgmist lihtsasti tõestatavat lemmat. Olgu l sirge ja n temaga risti olev ühikvektor. Kui A ja B asuvad mõlemad sirgest l vektori n näidataval pool, siis $\varrho(B, l) - \varrho(A, l) = \overrightarrow{AB} \cdot n$ (viimases avaldises on tegu skalaarkorrutisega).

Naastes antud ülesande juurde, võtame ühikvektorid n_1, n_2, n_3, n_4, mis on nelinurga külgedega risti ja suunatud vastavast küljest samale poole, kus asub nelinurk. Tähistagu ΣX punkti X kauguste summat nelinurga külgedega määratud sirgetest. Kasutades lemmat ja skalaarkorrutise omadusi, saame

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot (n_1 + n_2 + n_3 + n_4) &= \Sigma B - \Sigma A = 0 = \\ &= \Sigma C - \Sigma B = \overrightarrow{BC} \cdot (n_1 + n_2 + n_3 + n_4).\end{aligned}$$

Kuna A, B, C pole ühel sirgel, siis järeldub sellest, et $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 0$. Ilmselt määravad sellised vektorid n_1, n_2, n_3, n_4 rombi, seega sisaldavad kaht paari paralleelseid vektoreid. Seega ka nelinurga küljed sisaldavad kaht paralleelset paari.

20. *(Bulgaaria, talv 1999)* Olgu ABC teravnurkne kolmnurk kõrgustega CD, AP ja BQ. Olgu H nende kõrguste lõikepunkt ning M lõigu AB keskpunkt. Olgu R sirgete AB ja PQ lõikepunkt. Tõesta, et
   a) MP puutub nii kolmnurga PQC kui DRP ümberringjoont;
   b) $RH \perp CM$.

Vihje. a) Paneme tähele, et H asub kolmnurga PQC ümberringjoonel. Kuna

$$\angle APM = \angle PAM = \frac{\pi}{2} - \angle ABC = \angle BCD,$$

siis MP puutub seda ringjoont. Teiselt poolt

$$\begin{aligned}&\angle MPD = \angle MPB - \angle DPB = \angle MPB - \angle BPR = \angle MBP - \angle BAC, \\ &\angle ARP = \angle MBP - \angle BPR = \angle MBP - \angle QPC = \angle MBP - \angle BAC\end{aligned}$$

(kasutasime kolmnurkade ABC, DBP ja PQC sarnasust). Seetõttu $\angle MPD = \angle ARP$, kust MP puutub samuti seda ringjoont.

b) Olgu L kolmnurga PQC ümberringjoone lõikepunkt lõiguga CM. Osast a) tuleb $|ML| \cdot |MC| = |MP|^2 = |MD| \cdot |MR|$. See näitab, et L asub kolmnurga DRC ümberringjoonel, mistõttu $RL \perp CM$. Kuna HC on PQC ümberringjoone diameeter, siis ka $HL \perp CM$, millest kokku $RH \perp CM$.