

Treeningvõistlus "Balti tee 2002" võistkonnale

Tartus, 27. oktoobril 2002

1. Arvud a , b ja c on positiivsed ning $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tõesta, et

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+ac} + \frac{1}{1+bc} \geq \frac{3}{2}.$$

2. Leia kõik pidevad funktsioonid f , mis rahuldavad kõigi reaalarvude x ja y korral tingimust

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4f(x) \cdot y.$$

3. Naturaalarvul n ($n > 1$) on täpselt k naturaalarvulist jagajat. Tõesta, et nende summa on

a) suurem kui $k \cdot \sqrt{n}$;

b) väiksem kui $\sqrt{2k} \cdot n$.

4. Olgu λ fikseeritud reaalarv. Mitu lahendit vahemikus $(0, \frac{\pi}{2})$ on võrrandil

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \lambda(\tan^4 x - \cot^4 x)?$$

5. Leia võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x^5 + x^5 y^2 - 2y = 0 \\ y^5 + y^5 z^2 - 2z = 0 \\ z^5 + z^5 x^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

kõik reaalarvulised lahendid.

6. Olgu n positiivne täisarv. Nimetame positiivsete täisarvude järjendit (x_1, x_2, \dots, x_n) *heaks*, kui

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 2n$$

ja ükski summa selle järjendi erinevatest kohtadest võetud elementidest (summa liidetavate arv võib olla ka 1) ei ole võrdne arvuga n . Leia kõik head järjendid.

7. Tõesta, et kui k on paaritu naturaalarv, siis mistahes naturaalarvu n korral jagub arv $1^k + 2^k + \dots + n^k$ arvuga $1 + 2 + \dots + n$.

8. Olgu a ja b sellised täisarvud, et $201a^2 + a = 237b^2 + b$. Tõesta, et $|a - b|$ on täisruut.

9. Kui palju on arvude $1, 2, \dots, 2002$ seas selliseid, mille ristsumma jagub 5-ga?

10. Tõesta, et võrrandil

$$4^x + 6^x = 9^x$$

puuduvad ratsionaalarvulised lahendid.

11. Kumera kuusnurga $ABCDEF$ küljed AB , CD ja EF puutuvad ringjoont vastavalt oma keskpunktides P , Q ja R , küljed BC , DE ja FA puutuvad sama ringjoont punktides X , Y ja Z . Tõesta, et sirged PY , QZ ja RX lõikuvad ühes punktis.
12. Olgu M ruudu $ABCD$ külje BC keskpunkt ning E punkt küljel AD , nii et $|AE| > |ED|$. Lõigaku sirge, mis läbib punkti M ja on paralleelne sirgega EB , külge CD punktis H . Tõesta, et sirge EH on ruudu $ABCD$ siseringjoone puutuja.
13. Kolmnurga ABC nurga $\angle BAC$ suurus on 60° . Lõigaku nurga $\angle ACB$ poolitaja külge AB punktis E ning nurga $\angle ABC$ poolitaja külge AC punktis D . Olgu M sirgete CE ja BD lõikepunkt. Tõesta, et kolmnurk EMD on võrdhaarne.
14. Võrdhaarses kolmnurgas, mille pindala on S , tõmmatakse alusnurkade poolitajad. Vaatleme kolmnurka, mille tippudeks on nende nurgapoolitajate lõikepunktid vastaskülgedega ning omavahel, olgu selle kolmnurga pindala S' . Millised peavad olema esialgse võrdhaarse kolmnurga nurgad, et suhe S'/S oleks maksimaalne?
15. Kolmnurga ABC külje AC pikkus on ülejäänud külgede pikkuste aritmeetiline keskmine. Tõesta, et

$$\cos(\angle A - \angle C) + 4 \cos \angle B = 3.$$

16. Tahvlile on kirjutatud arvud 4, 5 ja 6. Ühe sammuga võib valida kaks tahvlil olevat arvu, olgu need a ja b , kustutada need ning asemele kirjutada arvud $0,6a - 0,8b$ ja $0,8a + 0,6b$. Kas lõpliku arvu selliste sammude järel võivad tahvlil olla arvud 1, 6 ja 6?
17. Tõesta, et 7×7 ruudustikku, millest on välja lõigatud üks ruut, saab tükeldada 16-ks tükiks, millest 14 on 1×3 ristkülikud ja 2 on L-kujulised tükid.
18. Üheksa päkapikku istuvad ringis, keskel istub hiiglane. Iga kaks mittekörvuti istuvat päkapikku, samuti ka iga päkapikk ja hiiglane, on omavahel kas sõbrad või vaenlased (oma naabrite suhtes on iga päkapikk ükskõikne). Tõesta, et võib valida kolm muinasjututegelast nii, et kõik kolm on omavahel sõbrad või kõik kolm on omavahel vaenlased.
19. Olgu $A_x = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_{2001} - x_{2002})^2$, kus x on mingi permutatsioon arvudest $1, 2, \dots, 2002$. Leia arvude A_x aritmeetiline keskmine üle kõikvõimalike permutatsioonide x .

Märkus. Permutatsioon arvudest $1, 2, \dots, n$ on järjend, mis sisaldab parajasti igat neist arvudest täpselt üks kord. Kui σ on permutatsioon, siis σ_i tähendab σ -s i -ndal kohal olevat elementi.

20. Kümnekorruselise kortermaja ühistu otsustab maja üle värvida korruste kaupa, iga korruse kas siniseks või kollaseks, kuid mistahes kaks järjestikust korrust ei tohi olla mõlemad kollased. Mitu erinevat võimalust on ühistul maja värvimiseks?