Treeningvõistlus “Balti tee 2002” võistkonnale

Tartus, 27. oktoobril 2002

1. Arvud a, b ja c on positiivsed ning $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tõesta, et

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+ac} + \frac{1}{1+bc} \geqslant \frac{3}{2}.$$

2. Leia kõik pidevad funktsioonid f, mis rahuldavad kõigi reaalarvude x ja y korral tingimust

$$f(f(x)+y) = f(x^2 - y) + 4f(x) \cdot y.$$

3. Naturaalarvul n $(n > 1)$ on täpselt k naturaalarvulist jagajat. Tõesta, et nende summa on
   a) suurem kui $k \cdot \sqrt{n}$;
   b) väiksem kui $\sqrt{2k} \cdot n$.

4. Olgu λ fikseeritud reaalarv. Mitu lahendit vahemikus $(0, \frac{\pi}{2})$ on võrrandil

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \lambda(\tan^4 x - \cot^4 x)\,?$$

5. Leia võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x^5 + x^5y^2 - 2y = 0 \\ y^5 + y^5z^2 - 2z = 0 \\ z^5 + z^5x^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

   kõik reaalarvulised lahendid.

6. Olgu n positiivne täisarv. Nimetame positiivsete täisarvude järjendit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *heaks*, kui

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 2n$$

   ja ükski summa selle järjendi erinevatest kohtadest võetud elementidest (summa liidetavate arv võib olla ka 1) ei ole võrdne arvuga n. Leia kõik head järjendid.

7. Tõesta, et kui k on paaritu naturaalarv, siis mistahes naturaalarvu n korral jagub arv $1^k + 2^k + \ldots + n^k$ arvuga $1 + 2 + \ldots + n$.

8. Olgu a ja b sellised täisarvud, et $201a^2 + a = 237b^2 + b$. Tõesta, et $|a - b|$ on täisruut.

9. Kui palju on arvude $1, 2, \ldots, 2002$ seas selliseid, mille ristsumma jagub 5-ga?

10. Tõesta, et võrrandil

$$4^x + 6^x = 9^x$$

   puuduvad ratsionaalarvulised lahendid.

11. Kumera kuusnurga $ABCDEF$ küljed AB, CD ja EF puutuvad ringjoont vastavalt oma keskpunktides P, Q ja R, küljed BC, DE ja FA puutuvad sama ringjoont punktides X, Y ja Z. Tõesta, et sirged PY, QZ ja RX lõikuvad ühes punktis.

12. Olgu M ruudu $ABCD$ külje BC keskpunkt ning E punkt küljel AD, nii et $|AE| > |ED|$. Lõigaku sirge, mis läbib punkti M ja on paralleelne sirgega EB, külge CD punktis H. Tõesta, et sirge EH on ruudu $ABCD$ siseringjoone puutuja.

13. Kolmnurga ABC nurga $\angle BAC$ suurus on 60°. Lõigaku nurga $\angle ACB$ poolitaja külge AB punktis E ning nurga $\angle ABC$ poolitaja külge AC punktis D. Olgu M sirgete CE ja BD lõikepunkt. Tõesta, et kolmnurk EMD on võrdhaarne.

14. Võrdhaarses kolmnurgas, mille pindala on S, tõmmatakse alusnurkade poolitajad. Vaatleme kolmnurka, mille tippudeks on nende nurgapoolitajate lõikepunktid vastaskülgedega ning omavahel, olgu selle kolmnurga pindala S'. Millised peavad olema esialgse võrdhaarse kolmnurga nurgad, et suhe S'/S oleks maksimaalne?

15. Kolmnurga ABC külje AC pikkus on ülejäänud külgede pikkuste aritmeetiline keskmine. Tõesta, et

$$\cos(\angle A - \angle C) + 4\cos\angle B = 3\,.$$

16. Tahvlile on kirjutatud arvud 4, 5 ja 6. Ühe sammuga võib valida kaks tahvlil olevat arvu, olgu need a ja b, kustutada need ning asemele kirjutada arvud $0{,}6a - 0{,}8b$ ja $0{,}8a + 0{,}6b$. Kas lõpliku arvu selliste sammude järel võivad tahvlil olla arvud 1, 6 ja 6?

17. Tõesta, et 7×7 ruudustikku, millest on välja lõigatud üks ruut, saab tükeldada 16-ks tükiks, millest 14 on 1×3 ristkülikud ja 2 on L-kujulised tükid.

18. Üheksa päkapikku istuvad ringis, keskel istub hiiglane. Iga kaks mittekõrvuti istuvat päkapikku, samuti ka iga päkapikk ja hiiglane, on omavahel kas sõbrad või vaenlased (oma naabrite suhtes on iga päkapikk ükskõikne). Tõesta, et võib valida kolm muinasjututegelast nii, et kõik kolm on omavahel sõbrad või kõik kolm on omavahel vaenlased.

19. Olgu $A_x = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \ldots + (x_{2001} - x_{2002})^2$, kus x on mingi permutatsioon arvudest $1, 2, \ldots, 2002$. Leia arvude A_x aritmeetiline keskmine üle kõikvõimalike permutatsioonide x.

    Märkus. Permutatsioon arvudest $1, 2, \ldots, n$ on järjend, mis sisaldab parajasti igat neist arvudest täpselt üks kord. Kui σ on permutatsioon, siis σ_i tähendab σ-s i-ndal kohal olevat elementi.

20. Kümnekorruselise kortermaja ühistu otsustab maja üle värvida korruste kaupa, iga korruse kas siniseks või kollaseks, kuid mistahes kaks järjestikust korrust ei tohi olla mõlemad kollased. Mitu erinevat võimalust on ühistul maja värvimiseks?

Treeningvõistlus "Balti tee 2002" võistkonnale

Tartus, 27. oktoobril 2002

Vastused ja lahendusvihjed

1. Kasutame algul aritmeetilise ja harmoonilise keskmise vahelist võrratust kolme arvu jaoks ja seejärel võrratust $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+xz+yz$, mis on hõlpsasti tõestatav, kasutades kolm korda aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust kahe arvu jaoks.

2. Asendame alguses $y = x^2$, siis $y = -f(x)$, ühendame saadud võrdused. Saame, et mistahes x korral kas $f(x) = 0$ või $f(x) = x^2$. Et igal juhul $f(0) = 0$, siis asendame esialgses võrduses $x = 0$ ja saame, et tegemist on paarisfunktsiooniga. Et funktsioon f on pidev, saame, et $f(x) \equiv 0$ või $f(x) \equiv x^2$.

3. Mõlemat osa saab standardselt lahendada Tšebõševi võrratusega. Ilma selleta tuleb järgmiselt.
   a) Liidame iga tegurit kaks korda ning grupeerime kahekaupa paaridesse, nii et korrutis on n; siis rakendame igale paarile aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust.
   b) Olgu $d_1 < d_2 < \ldots < d_k$. Et

$$\frac{d_1+\ldots+d_k}{k} \leqslant \sqrt{\frac{d_1^2+\ldots+d_k^2}{k}}.$$

siis

$$\frac{d_1+\ldots+d_k}{n} \leqslant \sqrt{k \cdot \frac{d_1^2+\ldots+d_k^2}{n^2}} = \sqrt{k} \cdot \sqrt{\frac{d_1^2}{n^2}+\ldots+\frac{d_k^2}{n^2}} = \sqrt{k} \cdot \sqrt{\frac{1}{d_k^2}+\ldots+\frac{1}{d_1^2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{k} \cdot \sqrt{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{k^2}} < \sqrt{k} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(k-1)k}} =$$

$$= \sqrt{k} \cdot \sqrt{1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}} < \sqrt{2k}.$$

4. Võtame $a = (\sin x)^2$, siis antud võrrand kirjutub ümber kujul

$$a^2-(1-a)^2 = \lambda\left(\left(\frac{a}{1-a}\right)^2-\left(\frac{1-a}{a}\right)^2\right),$$

mis teisendub kujule

$$2a-1 = (2a-1)\lambda\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(1-a)^2}\right).$$

Seega $a = \frac{1}{2}$ ehk $x = \frac{\pi}{4}$ on lahend suvalise λ korral. Funktsiooniuurimise meetoditega leiame, et funktsiooni $f(a) = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{(1-a)^2}$ graafik meid huvitavas vahemikus $a \in (0,1)$ on sümmeetriline sirge $a = \frac{1}{2}$ suhtes ja tema minimaalne väärtus selles vahemikus on $f(\frac{1}{2}) = 8$. Seega võrrandil on 1 lahend, kui $\lambda \leqslant 0$ või $\lambda \geqslant 1/8$, ja 3 lahendit, kui $0 < \lambda < 1/8$.

5. Märkame, et $x = y = z = 0$ on lahend. Kui $x > 0$, siis $y > 0, z > 0$, ja kui (x,y,z) on lahend, siis on lahend ka $(-x,-y,-z)$. Seega mistahes lahendi puhul on muutujate väärtused ühemärgilised.

Olgu $x, y, z > 0$, mis rahuldavad võrrandisüsteemi. Vaatleme esimest võrrandit ruutvõrrandina y suhtes. Diskriminandi mittenegatiivsusest saame $x \leqslant 1$. Teistest võrranditest saame analoogiliselt $y, z \leqslant 1$.

Lõpuks näeme, et kui $x < y$, siis esimesest võrrandist $x^5 = \frac{2y}{1+y^2} > \frac{2x}{1+y^2}$, kust $x^4 > \frac{2}{1+y^2}$, mis on vastuolus teadaoleva tingimusega $x, y \leqslant 1$. Et süsteem on muutujate suhtes sümmeetriline, siis $x = y = z$. Asendades ükskõik millisesse võrrandisse, on kerge näha, et ainsana sobivad $x = y = z = 0$, $x = y = z = 1$, $x = y = z = -1$.

6. Vaatleme summasid x_1, $x_1 + x_2$, ..., $x_1 + \ldots + x_{n-1}$. Need peavad kõik andma erinevad jäägid *modulo* n, seega üks neist summadest peab andma sama jäägi mis x_2; see "summa" saab olla vaid x_1. Et ülesanne on kõigi x_i-de suhtes sümmeetriline, siis peavad kõik arvud $x_1, \ldots, x_n$ andma arvuga n jagades sama jäägi, saame n võimalust, kus üks arvudest on $n+1$ ja ülejäänud 1; kui n on paaritu arv, siis veel lisaks võimaluse $(2, \ldots, 2)$.

7. Tähistame $S_n(k) = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$. Tõestame, et $2S_n(k)$ jagub $2S_n(1)$ ehk $n(n+1)$-ga. Paneme tähele, et arv $2S_n(k)$ jagub arvuga $n+1$ (jaotame summa liidetavad n paari kujul $a^k + b^k$, kus $a + b = n + 1$, siis iga paari liidetavate summa jagub arvuga $n+1$). Et $2S_n(k) = 2S_{n-1}(k) + 2n^k$, siis $2S_n(k)$ jagub ka n-ga. Kokkuvõttes $2S_n(k)$ jagub $n(n+1)$-ga, sest n ja $n+1$ on ühistegurita.

8. Teisendades saame $(a-b)(201(a+b)+1) = (6b)^2$. Vastuväiteliselt tõestame, et vasaku poole tegurid on ühistegurita. Kui $p \mid a-b$, $p \mid 201(a+b)+1$, siis $p^2 \mid (6b)^2$ ehk $p \mid 6b$, kust 3 võimalust: $p = 2$, $p = 3$ ja $p \mid b$. Kõik annavad vastuolu.

   Nüüd $|a-b|$ ja $|201(a+b)+1|$ on ka ühistegurita, nende korrutis on täisruut, järelikult nad ise on täisruudud.

9. Vaatleme alguses arve 0 kuni 1999, nende ristsummade jääke modulo 5. Arvude 0..9 seas on igasse jäägiklassi (ristsumma järgi) kuuluvaid ühepalju, see omadus ei muutu, kui kõigi nende arvude ette kirjutada sama number. Seega on arvude 1...2002 seas 399 arvu, mille ristsumma jagub viiega.

10. Olgu x võrrandi lahend, siis teisendades saame

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

   Kui $x = \frac{p}{q}$, kus p, q on täisarvud, siis esitades $(1+\sqrt{5})^q = a + b\sqrt{5}$ (induktsiooniga q järgi on lihtne tõestada, et sellised täisarvud a, b leiduvad), siis selgub, et $\sqrt{5}$ peaks olema ratsionaalarv.

11. Olgu ringjoone keskpunkt O. Et $|ZA| = |AP| = |PB| = |BX|$, siis $\angle ZOP = \angle XOP$, järelikult asub punkt P kaare ZPX keskpunktis ning PY on $\angle ZYX$ poolitaja. Analoogiliselt on ka RX ja QZ kolmnurga XYZ nurgapoolitajad ning need lõikuvad ju ühes punktis.

12. Olgu K, N vastavalt külgede CD, AB keskpunktid. Olgu L kolmnurga FCP siseringjoone puutepunkt küljega FC. Homoteetia tõttu on punktid P, L, N ühel sirgel. Võrdsete puutujalõikude fakti korduvalt kasutades ilmneb, et $|LC| = |FK|$. Nüüd

$$\frac{|PM|}{|PB|} = \frac{\frac{1}{2}(|LC| + |NB|)}{|NB|} = \frac{\frac{1}{2}(|FK| + |KC|)}{|KC|} = \frac{|FC|}{|DC|} = \frac{|PF|}{|PE|},$$

   mis ütlebki, et EB ja FM on paralleelsed.

13. Kuna $\angle DEM + \angle EDM = \angle MBC + \angle MCB = \frac{1}{2}(180° - \angle BAC) = 60°$, siis $\angle EMD = 120°$ ja $AEMD$ on kõõlnelinurk. Nüüd $\angle EAM = \angle DAM$ annab $|EM| = |MD|$.

14. Olgu kolmnurga tipud A, B, C ja võtame $|AB| = |AC| = 1$. Olgu P nurgapoolitajate lõikepunkt ning olgu D, E nurgapoolitajate lõikepunktid vastavalt külgedega AB, AC. Olgu $|BD| = |CE| = x$, $|BC| = a$ ja $\angle ABC = \angle ACB = 2\alpha$. Saame $\angle DBE = \angle EBC = \angle BED$, millest $|DE| = x$.

Nüüd $S_{\triangle ABE} = (1-x)T$ ja $S_{\triangle BDE} = x(1-x)T$. Kasutades nurgapoolitajateoreemi ja kolmnurkade ABC ja ADE sarnasust, saame

$$\frac{S_{\triangle BPD}}{S_{\triangle EPD}} = \frac{|BP|}{|PE|} = \frac{a}{x} = \frac{1}{1-x}.$$

Seega

$$\frac{T'}{T} = \frac{x(1-x)^2}{2-x}.$$

Kui $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, siis $x \in (0, \frac{2}{3})$. Seega tuleb leida funktsiooni $f(x) = \dfrac{x(1-x)^2}{2-x}$ maksimum vahemikus $(0, \frac{2}{3})$. Standardse funktsiooniuurimistehnikaga saame, et see on $x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. Paneme tähele, et $(1-x)^2 = x$, seega $a = 1 - x$, mistõttu kolmnurgad ADE ja BCE on sarnased ja $\angle BAC = \alpha$. Seega $\alpha = 36^\circ$ ja kolmnurga nurgad on $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$.

15. Tähistame $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$. Siinusteoreemist saame $2\sin\beta = \sin\alpha + \sin\gamma$. Siit

$$4\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2},$$

kust

$$2\sin\frac{\beta}{2} = \cos\frac{\alpha-\gamma}{2}.$$

Tõstes pooled ruutu ja kasutades tuntud trigonomeetriaseadusi, saame

$$2(1-\cos\beta) = \frac{1+\cos(\alpha-\gamma)}{2},$$

kust vajalik võrdus järeldub kergesti.

16. Ei saa, sest ruutude summa ei muutu.

17. Saab. Katame 11 ristkülikuga kõik peale 4×4 ruudu, sellest katame 3 ristkülikuga ja ühe L-kujulise tükiga kõik peale 2×2 ruudu.

18. Oletame vastuväiteliselt, et niisugust kolme tegelast ei ole. Olgu hiiglane sõber 5 päkapikuga, kes on ringis järjekorras $P_1, \ldots, P_5$. Kui nad kõik istuvad kõrvuti, moodustavad P_1, P_3, P_5 lubamatu kolmnurga. Kui P_i ja P_{i+1} ei istu kõrvuti, siis üldisust kitsendamata eeldame, et numeratsioon on tehtud sellises suunas, et $i \leqslant 2$. Nüüd päkapikud P_i, P_{i+1}, P_{i+3} moodustavad lubamatu kolmnurga. Analoogiline arutelu toimib juhul, kui hiiglane on vaenlane 5 päkapikuga.

19. *Vastus:* 1337337001.

Lahendame ülesande üldisel juhul, kus 2002 asemel on n. Iga paar (a, b), $1 \leqslant a, b \leqslant n$ esineb summas üle permutatsioonide $(n-1)!$ korda. Suvaline arv k^2, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on saavutatav $2(n-k)$ erineva paari (a, b) korral liikmena $(a-b)^2$. Permutatsioonide arv on $n!$. Seega otsitav arv avaldub kujul

$$\frac{(n-1)!}{n!}\sum_{k=1}^{n-1} 2(n-k)k^2 = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)k^2 = \frac{2}{n}\left(n\sum_{k=1}^{n-1}k^2 - \sum_{k=1}^{n-1}k^3\right).$$

Kasutades esimeste positiivsete täisarvude ruutude ja kuupide summa valemeid, saame avaldise teisendada kujule $\frac{(n-1)n(n+1)}{6}$, kust $n = 2002$ puhul tulebki ülaltoodud vastus.

20. *Vastus:* 144. Tähistame n-korruselise maja võimalike värvimiste arvu $A(n)$. n-korruselise maja värvimised jaotuvad kaheks vastavalt sellele, kas ülemine korrus on värvitud siniseks või kollaseks. Esimest liiki värvimised võimaldavad alumistel $n-1$ korrustel olla värvitud suvalisel viisil, millel $n-1$-korruseline maja saab olla värvitud. Teist liiki värvimise puhul peab $n-1$. korrus olema värvitud siniseks, $n-2$ alumist korrust aga võivad olla värvitud suvalisel viisil, millel $n-2$-korruseline maja saab olla värvitud. Seega $A(n) = A(n-1) + A(n-2)$ iga $n \geqslant 2$ korral. Vahetu loendamisega leiame, et $A(0) = 1$ ja $A(1) = 2$. Edasi jääb vaid leitud rekurrentse seose järgi arvutamine.