Treeningvõistlus “Balti tee 2001” võistkonnale

Tartus, 28. oktoobril 2001

1. Leia võrrandi

$$(x+1)^{2001} + (x+1)^{2000}(x-2) + \ldots + (x+1)(x-2)^{2000} + (x-2)^{2001} = 0$$

kõik reaalarvulised lahendid.

2. Olgu $n > 1$ täisarv ning $x_1, \ldots, x_n$ ja $y_1, \ldots, y_n$ sellised positiivsed reaalarvud, et

$$x_1 + \ldots + x_i \geqslant y_1 + \ldots + y_i\,, \quad i = 1, \ldots, n\,. \tag{1}$$

a) Tõesta, et kui lisaks võrratustele (1) kehtib

$$x_1y_1 < x_2y_2 < \ldots < x_ny_n\,, \tag{2}$$

siis

$$\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n} \leqslant \frac{1}{y_1} + \ldots + \frac{1}{y_n}\,. \tag{3}$$

b) Näita, et kui tingimust (2) mitte nõuda, siis leiduvad mistahes $n > 1$ korral võrratusi (1) rahuldavad arvud $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ja $y_1, y_2, \ldots, y_n$, mille korral võrratus (3) ei kehti.

3. Leia võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 2 - \dfrac{4}{xyz} \end{cases}$$

kõik lahendid (x, y, z), kus x, y, z on positiivsed reaalarvud.

4. Leia kõik mittenegatiivsete täisarvude hulgal määratud reaalarvuliste väärtustega funktsioonid f, mis rahuldavad tingimusi $f(1) = 3$ ning

$$f(m+n) + f(m-n) - m + n - 1 = \frac{f(2m) + f(2n)}{2}$$

mistahes täisarvude $m, n \geqslant 0$ korral.

5. Leia kõik täisarvud n, mille korral polünoom $x^5 - nx - n - 2$ esitub kahe mittekonstantse täisarvuliste kordajatega polünoomi korrutisena.

6. Olgu n ja k positiivsed täisarvud. Tõesta, et arv 5^n on mitte rohkem kui k-kohaline siis ja ainult siis, kui arv 2^n on mitte vähem kui $(n-k+1)$-kohaline.

7. Olgu $a_n = 27 + n^2$, $n = 1, 2, \ldots$. Leia SÜT (a_n, a_{n+1}) suurim võimalik väärtus ja vähim indeks n, mille korral see väärtus realiseerub.

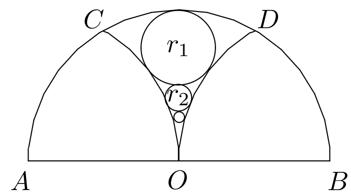
8. Leia kõik sellised positiivsete täisarvude kuubid, millest kolme viimase numbri ärajätmisel saadav arv on samuti mingi täisarvu kuup.

9. Leia kõik algarvud kujul $1010\ldots101$.

10. Tõesta, et $\frac{1}{25}\sum_{k=0}^{2001}\left[\frac{2^k}{25}\right]$ on täisarv (siin $[x]$ tähistab arvu x täisosa).

11. Ringjoon $\mathcal{C}_2$ puutub ringjoont $\mathcal{C}_1$ seestpoolt punktis A. Ringjoone $\mathcal{C}_1$ mingist punktist $P \neq A$ ringjoonele $\mathcal{C}_2$ tõmmatud puutujad lõikavad ringjoont $\mathcal{C}_1$ teistkordselt vastavalt punktides Q ja R ning nende puutepunktid ringjoonega $\mathcal{C}_2$ on vastavalt X ja Y. Tõesta, et $\angle QAR = 2\angle XAY$.

12. Lõik AB on raadiusega 1 poolringjoone diameeter, O selle keskpunkt ning OC ja OD on raadiusega 1 ringjoonte kaared, mille keskpunktid on vastavalt punktides A ja B. Kaartega OC, OD ja CD piiratud alasse konstrueerime ringjooned $\mathcal{C}_i$ raadiustega r_i, $i = 1, 2, \ldots$ nii, et ringjoon $\mathcal{C}_1$ puutub kaari OC, OD ja CD, ringjoon $\mathcal{C}_2$ puutub kaari OC, OD ja ringjoont $\mathcal{C}_1$, jne. (vt. joonist). Leia valem ringjoone $\mathcal{C}_n$ raadiuse r_n jaoks.



13. Tõesta, et kolmnurk küljepikkustega a, b, c ja ümberringjoone raadiusega R on teravnurkne siis ja ainult siis, kui $a^2 + b^2 + c^2 > 8R^2$.

14. Olgu M ringjoone kõõlu PQ keskpunkt ja A suvaline punkt sellel ringjoonel, mis erineb punktidest P ja Q. Lõigaku läbi punkti A paralleelselt kõõluga PQ tõmmatud sirge ringjoont teistkordselt punktis B ning lõigaku sirged AM ja BM ringjoont teistkordselt vastavalt punktides C ja D. Tõesta, et sirgete AD ja BC lõikepunkti X asukoht sõltub ainult kõõlust PQ, mitte aga punkti A valikust ringjoonel.

15. Poolringjoonel diameetriga AB valitakse punktidest A ja B erinevad punktid C ja D, nii et $|AC| = |CD|$. Poolringjoonele punktis C tõmmatud puutuja lõikab sirget BD punktis E ning sirge AE lõikab poolringjoont punktis F. Tõesta, et $|CF| < |FD|$.

16. Kumera seitsenurga $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ tasandist erineval pool võetakse punktid B ja C. Lõik BC ning mõned seitsenurga 14 diagonaalist ja 14 lõigust A_iB ja A_iC värvitakse mustaks ja kõik ülejäänud mainitud lõigud punaseks. Tõesta, et leidub nendest lõikudest moodustuv kolmnurk, mille kõik kolm külge on üht ja sama värvi.

17. Ristkülik, mis koosneb 4×7 ruudust, lõigatakse seitsmeks tükiks, millest igaüks koosneb neljast omavahel külgipidi ühendatud ruudust. Tõesta, et nende tükkide hulgas leiduvad kaks ühesugust (s.t. sellist, mis on teineteisest saadavad nihutamise ja pööramise teel — tükki tasandilt üles tõsta ja ümber pöörata ei ole lubatud).

18. Ümmarguse laua ümber istuvad N päkapikku pikkustega vastavalt 1, 2, 3, …, N päkka. Iga kahe kõrvuti istuva päkapiku jaoks leiame nende pikkuste positiivse vahe. Leia kõigi selliste vahede summa vähim ja suurim võimalik väärtus.

19. Mõõtmetega $3 \times 3 \times 3$ kuubi sees on 26 servapikkusega 1 kuubikut, mis on nummerdatud arvudega 1 kuni 26; 27-nda kuubiku koht on vaba. Kuubikuid saab suure kuubi sees ümber paigutada, nihutades igal sammul mõne vaba koha kõrval paikneva kuubiku sellele vabale kohale. Kas selliste ümberpaigutustega on võimalik saavutada olukord, kus algseisuga võrreldes on kohad vahetanud 1. ja 26. kuubik, 2. ja 25. kuubik, …, 13. ja 14. kuubik ning vaba koht on sealsamas kus alguses?

20. Ringjoonel valitakse mingil viisil $n \geqslant 4$ punkti $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Nimetame valitud punktide paari (A_i, A_j) *eriliseks*, kui kummalgi punktidega A_i ja A_j määratud ringjoone kaarel paikneb vähemalt üks ülejäänud valitud punktidest ning vähemalt ühel neist kaartest paiknevad valitud punktid A_k on kõik indeksitega $k < \min(i, j)$. Tõesta, et eriliste punktipaaride arv sõltub ainult n väärtusest, mitte aga punktide paigutusest ringjoonel, ja leia see arv.