Treeningvõistlus “Balti tee 2001” võistkonnale

Vastused ja lahendusvihjed

1. *Vastus:* $x = \dfrac{1}{2}$.

   Korruta võrrand läbi teguriga $(x+1)-(x-2)=3$.

2. a) Tõestame induktsiooniga i järgi, et iga $1 \leqslant i \leqslant n$ korral

   $$\sum_{j=1}^{i} \frac{1}{y_j} - \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{x_j} \geqslant \frac{\sum_{j=1}^{i} x_j - \sum_{j=1}^{i} y_j}{x_i y_i} .$$

   b) Olgu näiteks $x_1 = n^2$, $x_2 = \ldots = x_n = 1$ ja $y_1 = \ldots = y_n = n$.

3. *Vastus:* $x = y = z = 2$.

   Olgu $x+y+z=p$, $xy+yz+zx=q$ ja $xyz=r$, siis AM-GM võrratusest saame ühelt poolt

   $$2 = \frac{p}{3} \geqslant \sqrt[3]{r} ,$$

   kust $r \leqslant 8$, ja teiselt poolt

   $$\frac{r}{2} = \frac{q+4}{4} \geqslant \sqrt[4]{4x^2y^2z^2} = \sqrt{2r} ,$$

   kust $r \geqslant 8$. Seega $r = 8$ ja $x = y = z = 2$.

4. *Vastus:* $f(m) = m^2 + m + 1$.

   Võttes $m = n = 0$ saame $f(0) = 1$. Võttes $n = 0$ saame $f(2m) = 4f(m) - 2m - 3$, mis esialgsesse võrrandisse asendades annab

   $$f(m+n) + f(m-n) = 2f(m) + 2f(n) - 2n - 2 .$$

   Võttes siin $n = 1$, saame rekurrentse seose $f(m+1) - f(m)$ jaoks, kust algväärtusi $f(0) = 1$ ja $f(1) = 3$ arvestades leiame $f(m+1) - f(m) = 2(m+1)$ ja $f(m) = m^2 + m + 1$.

5. *Vastus:* -2, -1, 10, 19, 34, 342.

   Tegurite astmed võivad olla $(1,4)$ või $(2,3)$. Esimene juht on samaväärne sellega, et polünoomil $x^5 - nx - n - 2$ on täisarvuline nullkoht y, ehk

   $$n = \frac{y^5 - 2}{y+1} = y^4 - y^3 + y^2 - y + 1 - \frac{3}{y+1}$$

   on täisarv. Siit saame n väärtused -2, 10, 34, 342.

   Teisel juhul $x^5 - nx - n - 2 = (x^2 + rx + q)(x^3 + sx^2 + tx + u)$, kust kordajaid võrreldes leiame $s = -r$, $t = r^2 - q$ ja $u = 2rq - r^3$. Asendades ja võttes $x = -1$ saame võrduse

   $$(1 - r + q)(-1 - r - r^2 + q + 2rq - r^3) = -3$$

   kust nelja võimaliku juhu läbivaatamisega leiame ülejäänud lahendid.

6. Paneme tähele, et

$$5^n < 10^k \iff 10^n < 10^k \cdot 2^n \iff 2^n > 10^{n-k} \iff 2^n \geqslant 10^{n-k} .$$

7. *Vastus:* SÜT (a_n, a_{n+1}) maksimaalne väärtus on 109 ja vastav minimaalne n on 54.
Olgu d arvude a_n ja a_{n+1} ühine tegur, siis $d \mid a_{n+1} - a_n = 2n+1$ ja

$$d \mid 2a_n - n(2n+1) = 54 - n$$

ning

$$d \mid (2n+1) + 2(54-n) = 109 .$$

Kui $d = 109$, siis $2n+1 \geqslant 109$, kust $n \geqslant 54$. Kontroll näitab, et SÜT $(a_{54}, a_{55}) = 109$.

8. *Vastus:* arvud kujul $(10k)^3$ ning $11^3 = 1331$ ja $12^3 = 1728$.
Olgu otsitav arv $N = (10a+b)^3$, kus $1 \leqslant b \leqslant 9$, ning ühtlasi $N = 1000c^3 + d$, kus $0 < d < 1000$. Siis

$$d = (10a+b)^3 - (10c)^3 = (10a+b-10c)\big((10a+b)^2 + 10(10a+b)c + 100c^2\big) < 1000 ,$$

kust $10(a-c)+b < 10$ ning $a = c$. Seega

$$b \cdot (300a^2 + 30ab + b^2) < 1000 ,$$

kust $a = c = 1$. Arv N on niisiis neljakohaline ja $b \leqslant 2$, sest $13^2 > 2000$.

9. *Vastus:* ainus selline arv on 101.
Paarisarvu numbreid 1 sisaldav arv kujul $1010\ldots101$ jagub arvuga 101. Olgu nüüd numbreid 1 paaritu arv, s.t. $n = \sum\limits_{k=0}^{m} 10^{2k}$, kus m on paarisarv. Siis

$$\begin{aligned} n &= \frac{100^{m+1}-1}{100-1} = \frac{(10^{m+1}+1)(10^{m+1}-1)}{99} = \\ &= (10^m + 10^{m-1} + \ldots + 10 + 1) \cdot (10^m - 10^{m-1} + \ldots - 10 + 1) , \end{aligned}$$

s.t. n on kordarv.

10. Uurides 2 astmeid *modulo* 25 näeme, et need moodustavad perioodi pikkusega 20 ning sellesse perioodi kuuluvate jääkide summa on 250. Seega

$$\begin{aligned} \frac{1}{25}\sum_{k=0}^{2001}\left[\frac{2^k}{25}\right] &= \frac{1}{625}\left(\sum_{k=0}^{2001} 2^k - (250\cdot 100 + 3)\right) = \\ &= \frac{2^{2002} - 1 - (250\cdot 100+3)}{625} = \frac{2^{2002}-4}{625} - 40 . \end{aligned}$$

Euleri teoreemi kohaselt $2^{4\cdot 125} - 1$ jagub 625-ga ning seega $2^{2000} - 1$ jagub 625-ga ja $2^{2002} - 4$ jagub 625-ga.

11. Et $AQPR$ on kõõlnelinurk ja $\angle XAY = \angle PXY$, siis

$$\angle XAY = \angle PXY = \angle PYX = \frac{180^\circ - \angle QPR}{2} = \frac{\angle QAR}{2} .$$

12. *Vastus:* $r_n = \dfrac{1}{2n(n+1)}$.

Pythagorase teoreemist saame $(1+r_1)^2 = (1-r_1)^2+1$, kust $r_1 = \dfrac{1}{4}$ ja $1-2r_1 = \dfrac{1}{2}$, ning $(1+r_2)^2 = (\dfrac{1}{2}-r_2)^2+1$, kust $r_2 = \dfrac{1}{12}$ ja $1-2r_1-2r_2 = \dfrac{1}{3}$. Tõestame induktsiooniga väite, et

$$1-2r_1-2r_2-\ldots-2r_n = \frac{1}{n+1}\,,$$

kust leiame $r_n = \dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{1}{2n(n+1)}$.

13. Olgu BX kolmnurga ABC ümberringjoone diameeter ning $|AX| = h$ ja $|CX| = k$. Tähistame $a = |BC|$, $b = |CA|$ ja $c = |AB|$, siis $a^2+k^2 = 4R^2 = c^2+h^2$ ning $a^2+c^2+k^2+h^2 = 8R^2$. Kui kolmnurk ABC on teravnurkne, siis A ja C on erineval pool diameetrit BX ning kõõlnelinurgast $ABCX$ leiame, et $\angle AXC > 90°$ ja $b^2 > k^2+h^2$, mistõttu $a^2+b^2+c^2 > 8R^2$. Analoogiliselt veendume, et täisnurkse kolmnurga korral $a^2+b^2+c^2 = 8R^2$ ja nürinurkse kolmnurga korral $a^2+b^2+c^2 < 8R^2$.

14. Näitame, et X on ringjoonele punktides P ja Q tõmmatud puutujate lõikepunkt. Ilmselt on $ABCD$ võrdhaarne trapets ning sirge MX on joonise sümmeetriatelg, mis läbib ringjoone keskpunkti O. Et $\angle ACX = 180° - \angle ACB = 180° - \dfrac{\angle AOB}{2} = \angle AOX$, siis $AOCX$ on kõõlnelinurk ja

$$|MX|\cdot|MO| = |MA|\cdot|MC| = |MP|\cdot|MQ|\,,$$

s.t. $XPOQ$ on kõõlnelinurk. Seega $\angle XPO + \angle XQO = 180°$ ja $\angle XPO = \angle XQO = 90°$.

15. Olgu M diameetri AB keskpunkt ning G ja H sirge MC lõikepunktid vastavalt sirgetega AF ja AD. Et $|AC| = |CD|$, siis MC ja AD on risti. Et samuti BD ja AD on risti ning $CE \parallel AD$, siis $CHDE$ on ristkülik. Kolmnurkade AHG ja ADE sarnasusest ja võrdusest $|AH| = |HD|$ saame, et G on lõigu CH keskpunkt.

Sarnased kolmnurgad AHC ja BEC saadakse teineteisest $90°$ pöördega ümber punkti C ja homoteetiaga selle punkti suhtes. Et AF ja BF on risti, siis punktile G vastab seejuures sirgete BF ja CE lõikepunkt J, ning J on lõigu CE keskpunkt. Et aga $|BC| > |BE|$, siis nurga $\angle CBE$ poolitaja lõikab sirget CE lõigu JE sisepunktis, mistõttu $\angle CBF < \angle DBF$, ehk $|CF| < |FD|$.

16. Oletame, et sellist ühevärvilist kolmnurka ei leidu. Kui leiduvad kaks musta lõiku BA_i ja BA_j, kus A_iA_j on seitsenurga diagonaal, siis lõigud CA_i ja CA_j on punased ning olenemata diagonaali A_iA_j värvist saame ikkagi ühevärvilise kolmnurga. Kui aga seitsenurga iga diagonaali A_iA_j korral vähemalt üks lõikudest BA_i ja BA_j on punane, siis leidub lõikude $BA_1, \ldots, BA_7$ hulgas maksimaalselt kaks musta (ning sel juhul vastavad tipud A_k on järjestikused) — üldisust kitsendamata eeldame, et lõigud $BA_1, \ldots, BA_5$ on punased. Siis kas kolmnurk $A_1A_3A_5$ või selle mingi kahe tipu ja punkti B poolt moodustatud kolmnurk on ühevärviline.

17. Erineva kujuga neljast omavahel külgipidi ühendatud ruudust koosnevaid kujundeid on täpselt 7 (tetrise kujundid ;-) ja seega juhul, kui tükkide hulgas ühesuguseid pole, esineb igaüks neist täpselt ühe korra. Värvides ruudustiku malelauana näeme, et kõik need kujundid peale ühe katavad suvalise paigutuse korral 2 valget ja 2 musta ruutu, see üks aga 3 üht värvi ja 1 teist värvi ruudu. Et valgeid ja musti ruute on kokku ühepalju, pole selline tükeldus võimalik.

18. *Vastus:* miinimum on $2(N-1)$, maksimum $\left[\dfrac{N^2}{2}\right]$.

Vaadeldavate positiivsete vahede summa kummalgi päkapikkude 1 ja N vahelisel kaarel on vähemalt $N-1$ ning otsitav miinimum seega vähemalt $2(N-1)$ — see realiseerub, kui päkapikud paigutada ümber laua pikkuse järjekorras.

Maksimumi leidmiseks paneme tähele, et kõigi vaadeldavate positiivsete vahede summa sisaldab igaühe arvudest 1 kuni N kaks korda, kusjuures neist $2N$ liidetavast täpselt N on kummagi märgiga. Suurima väärtuse saamiseks võtame suuremad arvud kaks korda plussmärgiga ja väiksemad kaks korda miinusmärgiga; paaritu N korral võtame $\frac{N+1}{2}$ üks kord kummagi märgiga. Nii saame paaris N korral summaks $\frac{N^2}{2}$ ja paaritu N korral $\frac{N^2-1}{2}$ — see realiseerub, kui paigutada päkapikud järjekorras 1, N, 2, $N-1$, 3, $N-2$, ...

19. *Vastus:* ei ole võimalik.

Jaotame suure kuubi 27 kuubikujuliseks pesaks ja nummerdame need arvudega 1 kuni 27 kihtide kaupa, nii et järgmise kihi vähima numbriga pesa on eelmise kihi suurima numbriga pesa naaber. Värvides pesad kahe värviga "ruumilises malekorras" (s.t. nii, et mistahes kaks naaberpesa on eri värvi) näeme, et üht värvi on parajasti kõik paarisnumbritega pesad ja teist värvi kõik paaritute numbritega pesad.

Nimetame *inversiooniks* olukorda, kus mingist kahest kuubikust (k, m) suurema numbriga kuubik paikneb väiksema numbriga pesas. Et iga ümberpaigutus liigutab ühe kuubiku esialgsest pesast paaritu arvu võrra erineva numbriga pessa, siis muutub inversioonide koguarv igal ümberpaigutusel paarisarvu võrra ning inversioonide koguarvu paarsus on seega muutumatu. Teisalt aga on kuubikute paare kokku $\frac{26 \cdot 25}{2}$, s.t. paaritu arv, ning soovitud lõppseisus peaksid inversioonid andma parajasti need kuubikute paarid, mis algseisus inversiooni ei andnud, ja vastupidi — seega peaks inversioonide koguarv kokkuvõttes muutuma paaritu arvu võrra.

20. *Vastus:* $n-3$.

Kui $n = 4$, siis punkti A_1 naabrid moodustavad erilise paari, punkt A_1 aga ei saa erilisse paari kuuluda — seega on erilisi paare 1. Näitame nüüd, et n suurendamisel 1 võrra suureneb ka eriliste punktipaaride arv 1 võrra. Tõepoolest, olgu $n+1$ punkti korral A_k ja A_m punkti A_1 naabrid — ilmselt moodustavad nad erilise paari. Kui punkt A_1 ära jätta ja kõigi ülejäänud punktide indekseid vähendada ühe võrra, siis kõik ülejäänud erilised paarid peale (A_k, A_m) säilivad ja uusi erilisi paare juurde ei teki, eriline paar (A_k, A_m) aga kaob, sest A_k ja A_m on nüüd teineteise naabrid.