Treeningvõistlus “Balti tee 2000” võistkonnale

Tartus, 29. oktoobril 2000

1. Telemängus esitati kahele mängijale ühtesid ja samu küsimusi. Mängija A vastas valesti 99% neist küsimustest, millele mängija B vastas õigesti, mängija B aga vastas valesti $\frac{10}{11}$ neist küsimustest, millele mängija A vastas õigesti.
   a) Tõesta, et mängija A vastas valesti vähemalt 90% kõigist küsimustest.
   b) Leia esitatud küsimuste arvu võimalikud väärtused.

2. Tähistame $f(x) = \dfrac{2000^x}{2000^x + \sqrt{2000}}$. Arvuta summa

$$f\Big(\frac{1}{2001}\Big) + f\Big(\frac{2}{2001}\Big) + \ldots + f\Big(\frac{2000}{2001}\Big) .$$

3. Olgu a, b, c mistahes sellised reaalarvud, et $a+b+c=0$. Tõesta, et kehtib võrratus

$$\log_2(3^a+1) + \log_2(3^b+1) + \log_2(3^c+1) \geqslant 3 .$$

4. Tõesta, et

$$\Big(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\Big)^n + \Big(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\Big)^n$$

on paaritu täisarv iga positiivse täisarvu n korral.

5. Tõesta, et nullist erinevad reaalarvud a, b ja c rahuldavad tingimust $abc = a+b+c$ siis ja ainult siis, kui nad on mingi kolmnurga sise- või välisnurkade tangensiteks.

6. Kas leiduvad kaks niisugust erinevat arvu 2 astet, mille kümnendesitused on teineteisest saadavad numbrite ümberjärjestamise teel?

7. Leia kõik sellised algarvud, mille k-ndesituses mingi naturaalarvu $k \geqslant 2$ korral esineb iga number $0, 1, \ldots, k-1$ täpselt üks kord.

8. Kas leidub selline positiivne täisarv n, et arv $\underbrace{11\ldots1}_{3n \text{ numbrit}}$ jagub arvuga $3n$, kuid arv $\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ numbrit}}$ ei jagu arvuga n?

9. Tõesta, et:
   a) leiduvad sellised 10 erinevat positiivset täisarvu, millest ühegi kuue summa ei jagu arvuga 6;
   b) ei leidu selliseid 11 erinevat positiivset täisarvu, millest ühegi kuue summa ei jagu arvuga 6.

10. Olgu $a > 1$ täisarv. Tõesta, et mistahes positiivsete täisarvude n ja m korral kehtib võrdus

$$\text{SÜT}(a^m - 1, a^n - 1) = a^{\text{SÜT}(m,n)} - 1 \,.$$

11. Kolmnurga küljed pikkustega 13, 14 ja 15 puutuvad sfääri raadiusega 5. Leia sfääri keskpunkti kaugus kolmnurga tasandist.

12. Teravnurkse kolmnurga ABC külgedele AC ja BC kolmnurgast väljapoole konstrueeritakse ruudud $ACXE$ ja $CBDY$. Tõesta, et lõikude AD ja BE lõikepunkt paikneb kolmnurga ABC tipust C tõmmatud kõrgusel.

13. Kolmnurgas ABC on $\angle A = 30^\circ$. Olgu O ja I vastavalt selle kolmnurga ümber- ja siseringjoone keskpunktid ning olgu D ja E sellised punktid vastavalt kolmnurga külgedel AB ja AC, et $|BD| = |BC| = |CE|$. Tõesta, et lõigud OI ja DE on võrdse pikkusega ja teineteisega risti.

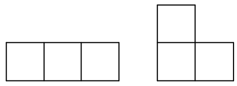
14. Ringjooned $\mathcal{C}_1$ ja $\mathcal{C}_2$, mille keskpunktid on vastavalt O_1 ja O_2, lõikuvad punktides A ja B. Kiir O_1B lõikab ringjoont $\mathcal{C}_2$ teistkordselt punktis F ning kiir O_2B lõikab ringjoont $\mathcal{C}_1$ teistkordselt punktis E, kusjuures $|O_1F| > |O_1B|$ ja $|O_2E| > |O_2B|$. Sirge, mis on tõmmatud läbi punkti B paralleelselt sirgega EF, lõikab ringjooni $\mathcal{C}_1$ ja $\mathcal{C}_2$ teistkordselt vastavalt punktides M ja N. Tõesta, et $|MN| = |AE| + |AF|$.

15. Ruumis paiknevad kolm ringjoont, mis paarikaupa teineteist puutuvad (s.t. iga kahe ringjoone ühisest punktist neile ringjoontele tõmmatud puutujad langevad kokku). Tõesta, et need ringjooned paiknevad kas ühel tasandil või ühel sfääril.

16. Kuubikujulise täringu ühe vastastahkude paari kummalgi tahul on üks täpp, teise vastastahkude paari kummalgi tahul on kaks täppi ja kolmanda vastastahkude paari kummalgi tahul on kolm täppi. Kaheksast sellisest täringust pannakse kokku $2 \times 2 \times 2$ kuup. Kas on võimalik, et selle kuubi tahkudel olevad täppide arvud on kuus järjestikust täisarvu?

17. Liliputtide maal on rahaühikuteks lili ja puti (1 puti on väärt 100 lilit) ning käibivad mündid väärtusega 1, 2, 5, 10, 20 ja 50 lilit ning 1 puti. Tõesta, et kui M lili suurust summat saab tasuda N mündiga, siis saab ka N puti suurust summat tasuda M mündiga.

18. Tõesta, et 7×7 ruudustikust on võimalik välja lõigata üks ruut nii, et ruudustiku ülejäänud osa ei saa katta 15 joonisel näidatud kujundiga A ja ühe kujundiga B.



A B

19. Olgu $ABCD$ ruut küljepikkusega 20 ning $T_1, T_2, \ldots, T_{2000}$ ruudu $ABCD$ suvalised sellised sisepunktid, et ükski punktide kolmik hulgast $\{A, B, C, D, T_1, T_2, \ldots, T_{2000}\}$ ei paikne ühel sirgel. Tõesta, et mingid kolm punkti sellest hulgast on sellise kolmnurga tippudeks, mille pindala on väiksem kui $\frac{1}{10}$.

20. Lõpmatu tabeli read ja veerud on nummerdatud positiivsete täisarvudega. Selle tabeli igasse ruutu on kirjutatud mingi arvust 2000 väiksem positiivne täisarv. Tõesta, et leidub arvujada $d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots$, mille korral iga positiivse täisarvu k jaoks leidub tabelis rida, mille järjekorranumber on suurem kui k ning esimeses k ruudus on arvud $d_1, d_2, \ldots, d_k$ (selles järjekorras).