Treeningvõistlus “Balti tee 2000” võistkonnale

Tartus, 29. oktoobril 2000

Ülesanded, vastused ja lahendusvihjed

Ülesannete 1, 5, 8, 10 ja 20 autor on Härmel Nestra. Ülejäänud ülesanded pärinevad: Horvaatia (2, 3, 4, 11, 12), Sloveenia (7, 16, 17, 18, 19), Iraani (6, 14, 15) ja Suurbritannia (9) 1999.-2000. õppeaasta olümpiaadidelt ning LAV 2000.a. IMO-võistkonna ettevalmistusprogrammist (13).

1. Telemängus esitati kahele mängijale ühtesid ja samu küsimusi. Mängija A vastas valesti 99% neist küsimustest, millele mängija B vastas õigesti, mängija B aga vastas valesti $\dfrac{10}{11}$ neist küsimustest, millele mängija A vastas õigesti.

   a) Tõesta, et mängija A vastas valesti vähemalt 90% kõigist küsimustest.

   b) Leia esitatud küsimuste arvu võimalikud väärtused.

   Vastus: b) küsimuste arv võis olla suvaline.

   Vihje. a) Näitame, et küsimuste arv, millele vähemalt üks mängija õigesti vastas, on võrdne mängija A poolt õigesti vastatud küsimuste kümnekordse arvuga.
   b) Kui kumbki mängijaist ei vastanud õigesti ühelegi küsimusele, siis rahuldab mistahes küsimuste arv ülesande tingimusi.

2. Tähistame $f(x) = \dfrac{2000^x}{2000^x + \sqrt{2000}}$. Arvuta summa

   $$f\Big(\frac{1}{2001}\Big) + f\Big(\frac{2}{2001}\Big) + \ldots + f\Big(\frac{2000}{2001}\Big) .$$

   Vastus: 1000.

   Vihje. Paneme tähele, et $f(x) + f(1-x) = 1$, ning vaatleme liidetavaid paarikaupa.

3. Olgu a, b, c mistahes sellised reaalarvud, et $a+b+c=0$. Tõesta, et kehtib võrratus

   $$\log_2(3^a+1) + \log_2(3^b+1) + \log_2(3^c+1) \geqslant 3 .$$

   Vihje. Teisendame tõestatava võrratuse kujule

   $$(3^a+1)(3^b+1)(3^c+1) \geqslant 2^3 = 8$$

ning rakendame vasakul pool igale tegurile aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust.

Teine võimalus. Avades võrratuse $(3^a+1)(3^b+1)(3^c+1) \geqslant 8$ vasakul pool sulud ning arvestades tingimust $a+b+c=0$, saame

$$2+(3^a+3^{-a})+(3^b+3^{-b})+(3^c+3^{-c}) \geqslant 8\ ,$$

mis kehtib, kuna $x+\dfrac{1}{x} \geqslant 2$ mistahes positiivse reaalarvu x korral.

4. Tõesta, et

$$\Big(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\Big)^n + \Big(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\Big)^n$$

on paaritu täisarv iga positiivse täisarvu n korral.

Vihje. Tähistame vaadeldava avaldise a_n ning tõestame rekurrentse seose $a_{n+1} = 3a_n + 2a_{n-1}$.

5. Tõesta, et nullist erinevad reaalarvud a, b ja c rahuldavad tingimust $abc = a+b+c$ siis ja ainult siis, kui nad on mingi kolmnurga sise- või välisnurkade tangensiteks.

Vihje. Olgu mistahes nullist erineva reaalarvu x korral $A(x)$ selline arv vahemikust $(0,\pi)$, mille korral $\tan A(x) = x$. Kasutades seost

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

näitame, et nullist erinevate a, b, c korral kehtib võrdus $abc = a+b+c$ siis ja ainult siis, kui $A(a)+A(b)+A(c) = n\pi$, kus n on mingi täisarv. Arvude $A(x)$ definitsiooni põhjal saab n olla ainult 1 või 2 ning nendel juhtudel leidub kolmnurk, mille jaoks $A(a)$, $A(b)$ ja $A(c)$ on vastavalt sise- või välisnurkade suurusteks.

6. Kas leiduvad kaks niisugust erinevat arvu 2 astet, mille kümnendesitused on teineteisest saadavad numbrite ümberjärjestamise teel?

Vastus: Ei.

Vihje. Oletame vastuväiteliselt, et sellised arvud $N = 2^n$ ja $M = 2^m$ leiduvad, kusjuures $n > m$. Siis arv $N - M = 2^m(2^{n-m}-1)$ jagub 9-ga, mistõttu $n-m$ peab jaguma 6-ga. See pole aga võimalik, kuna arvud N ja M sisaldavad ühepalju numbreid.

7. Leia kõik sellised algarvud, mille k-ndesituses mingi naturaalarvu $k \geqslant 2$ korral esineb iga number $0, 1, \ldots, k-1$ täpselt üks kord.

Vastus: $2 = (10)_2$, $11 = (102)_3$ ja $19 = (201)_3$; kui lubame arvu esimese numbrina 0, siis ka $5 = (012)_3$ ja $7 = (021)_3$.

Vihje. Olgu $p = a_0 + a_1 k + \ldots + a_{k-1} k^{k-1}$, kus $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ on numbrid $0, 1, \ldots, k-1$ mingis järjekorras võetuna. Veendume, et paaris k korral jagub p arvuga $k-1$ ning paaritu k korral arvuga $\frac{k-1}{2}$, mistõttu k peab olema 2 või 3.

8. Kas leidub selline positiivne täisarv n, et arv $\underbrace{11\ldots1}_{3n \text{ numbrit}}$ jagub arvuga $3n$, kuid arv $\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ numbrit}}$ ei jagu arvuga n?

Vastus: jah: selline arv on näiteks 37.

Vihje. Teguriteks lahutus

$$\underbrace{11\ldots1}_{3n} = 111 \cdot \underbrace{100100\ldots100}_{n-1 \text{ blokki } 100}1$$

annab mõtte proovida $3n = 111$, kust $n = 37$. Esitus

$$\underbrace{11\ldots1}_{37} = 10 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{36} + 1 = 10 \cdot 111 \cdot \underbrace{100100\ldots100}_{11 \text{ blokki } 100}1 + 1$$

näitab, et arv $\underbrace{11\ldots1}_{37}$ ei jagu 37-ga.

9. Tõesta, et:
   a) leiduvad sellised 10 erinevat positiivset täisarvu, millest ühegi kuue summa ei jagu arvuga 6;
   b) ei leidu selliseid 11 erinevat positiivset täisarvu, millest ühegi kuue summa ei jagu arvuga 6.

Vihje. Väite a) tõestuseks sobivad mistahes 10 arvu, millest viis annavad 6-ga jagamisel jäägi 0 ja ülejäänud viis jäägi 1.

Väite b) tõestuseks paneme tähele, et mistahes 11 täisarvu hulgast saame leida viis paari, nii et iga paari arvude summa jagub 2-ga, ning mistahes viie täisarvu hulgast saame leida kolm, mille summa jagub 3-ga.

10. Olgu $a > 1$ täisarv. Tõesta, et mistahes positiivsete täisarvude n ja m korral kehtib võrdus

$$\text{SÜT}(a^m - 1, a^n - 1) = a^{\text{SÜT}(m,n)} - 1 .$$

Vihje. Teeme induktsiooni $\max(m,n)$ järgi, kasutades seoseid

$$\text{SÜT}(m,n) = \text{SÜT}(m, n-m)$$

ja

$$\text{SÜT}(a^m-1, a^n-1) = \text{SÜT}(a^m-1, a^{n-m}-1)\,,$$

kus $m<n$.

11. Kolmnurga küljed pikkustega 13, 14 ja 15 puutuvad sfääri raadiusega 5. Leia sfääri keskpunkti kaugus kolmnurga tasandist.

    Vastus: 3.

    Vihje. Vaadeldava kolmnurga tasandi ja sfääri lõige on selle kolmnurga siseringjoon, mille raadiuseks saame 4.

12. Teravnurkse kolmnurga ABC külgedele AC ja BC kolmnurgast väljapoole konstrueeritakse ruudud $ACXE$ ja $CBDY$. Tõesta, et lõikude AD ja BE lõikepunkt paikneb kolmnurga ABC tipust C tõmmatud kõrgusel.

    Vihje. Olgu T ja T' vastavalt tipust A lõigule BE tõmmatud ristsirge ja tipust B lõigule AD tõmmatud ristsirge lõikepunktid tipust C tõmmatud kõrgusega määratud sirgega. Näitame, et kolmnurgad EAB ja ACT on kongruentsed ning seega $|CT| = |AB|$. Analoogiliselt ka $|CT'| = |AB|$, s.t. $T = T'$. Kolmnurga ABT kõrgused paiknevad vastavalt sirgetel AD, BE ja CT, mistõttu AD ja BE lõikepunkt paikneb sirgel CT.

13. Kolmnurgas ABC on $\angle A = 30^\circ$. Olgu O ja I vastavalt selle kolmnurga ümber- ja siseringjoone keskpunktid ning olgu D ja E sellised punktid vastavalt kolmnurga külgedel AB ja AC, et $|BD| = |BC| = |CE|$. Tõesta, et lõigud OI ja DE on võrdse pikkusega ja teineteisega risti.

    Vihje. Näitame, et $\angle DIE = \angle IDO = \angle IEO = 45^\circ$ ning seega on punkt O kolmnurga DIE kõrguste lõikepunkt. Olgu nüüd L kolmnurga DIE tipust D tõmmatud kõrguse aluspunkt, siis kolmnurgad IOL ja DEL on kongruentsed (saadakse teineteisest 90° pöördel ümber punkti L).

14. Ringjooned $\mathcal{C}_1$ ja $\mathcal{C}_2$, mille keskpunktid on vastavalt O_1 ja O_2, lõikuvad punktides A ja B. Kiir O_1B lõikab ringjoont $\mathcal{C}_2$ teistkordselt punktis F ning kiir O_2B lõikab ringjoont $\mathcal{C}_1$ teistkordselt punktis E, kusjuures $|O_1F| > |O_1B|$ ja $|O_2E| > |O_2B|$. Sirge, mis on tõmmatud läbi punkti B paralleelselt sirgega EF, lõikab ringjooni $\mathcal{C}_1$ ja $\mathcal{C}_2$ teistkordselt vastavalt punktides M ja N. Tõesta, et $|MN| = |AE| + |AF|$.

    Vihje. Näitame, et punktid O_1, O_2, E ja F paiknevad ühel ringjoonel, ning $|AE| = |MB|$ ja $|AF| = |NB|$.

15. Ruumis paiknevad kolm ringjoont, mis paarikaupa teineteist puutuvad (s.t. iga kahe ringjoone ühisest punktist neile ringjoontele tõmmatud puutujad langevad kokku). Tõesta, et need ringjooned paiknevad kas ühel tasandil või ühel sfääril.

Vihje. Olgu vaadeldavad ringjooned $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ ja $\mathcal{C}_3$ ja nende puutepunktid A, B ja C, ning olgu l_i ringjoone $\mathcal{C}_i$ "pöördetelg" (s.t. selle keskpunkti läbiv ja selle tasandiga ristiolev sirge). Vastavalt ülesande tingimustele on mistahes kaks sirget l_i ja l_j kas paralleelsed või lõikuvad. Kui mingid kaks sirget l_i ja l_j on paralleelsed, siis ka kolmas sirge on nendega paralleelne ning ringjooned paiknevad ühel tasandil. Kui aga sirged l_1, l_2 ja l_3 on paarikaupa mitteparalleelsed, siis nende lõikepunktidest K, L ja M igaüks on võrdsel kaugusel mingi kahe ringjoone kõikidest punktidest, sh. punktidest A, B ja C. Punktid K, L ja M asuvad seega ühel sirgel, mis on võimalik ainult siis, kui nad langevad kokku, ning $K = L = M$ on otsitava kõiki kolme ringjoont sisaldava sfääri keskpunkt.

16. Kuubikujulise täringu ühe vastastahkude paari kummalgi tahul on üks täpp, teise vastastahkude paari kummalgi tahul on kaks täppi ja kolmanda vastastahkude paari kummalgi tahul on kolm täppi. Kaheksast sellisest täringust pannakse kokku $2 \times 2 \times 2$ kuup. Kas on võimalik, et selle kuubi tahkudel olevad täppide arvud on kuus järjestikust täisarvu?

Vastus: Ei.

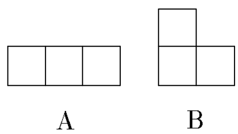
Vihje. Iga täringu nähtavatel tahkudel on kokku 6 täppi ning kuubi välispinnal on seega kokku 48 täppi, ent mistahes kuue järjestikuse täisarvu summa on paaritu arv.

17. Liliputtide maal on rahaühikuteks lili ja puti (1 puti on väärt 100 lilit) ning käibivad mündid väärtusega 1, 2, 5, 10, 20 ja 50 lilit ning 1 puti. Tõesta, et kui M lili suurust summat saab tasuda N mündiga, siis saab ka N puti suurust summat tasuda M mündiga.

Vihje. Käibivate müntide väärtused on 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{50}$ ja $\frac{1}{100}$ putit ning võrduse $N = a_1 + a_2 + a_5 + a_{10} + a_{20} + a_{50} + a_{100}$, kus $M = a_1 + 2a_2 + 5a_5 + 10a_{10} + 20a_{20} + 50a_{50} + 100a_{100}$, saame kirjutada kujul

$$N = a_1 \cdot 1 + 2a_2 \cdot \frac{1}{2} + 5a_5 \cdot \frac{1}{5} + 10a_{10} \cdot \frac{1}{10} + 20a_{20} \cdot \frac{1}{20} + 50a_{50} \cdot \frac{1}{50} + \\ + 100a_{100} \cdot \frac{1}{100}.$$

18. Tõesta, et 7×7 ruudustikust on võimalik välja lõigata üks ruut nii, et ruudustiku ülejäänud osa ei saa katta 15 joonisel näidatud kujundiga A ja ühe kujundiga B.



Vihje. Värvime ruudustiku ruudud kolme värviga kahel erineval viisil: ühtpidi diagonaalide kaupa ja teistpidi diagonaalide kaupa. Lõikame välja suvalise nurgaruudu, siis kummagi värvimise korral jääb iga värvi ruute alles ühepalju. Et iga kujund A katab kolm eri värvi ruutu, siis peab ka ainus kujund B katma kolm eri värvi ruutu — seda tingimust rahuldavad kujundi B asendid on aga kummagi värvimise korral erinevad.

19. Olgu $ABCD$ ruut küljepikkusega 20 ning $T_1, T_2, \ldots, T_{2000}$ ruudu $ABCD$ suvalised sellised sisepunktid, et ükski punktide kolmik hulgast $\{A, B, C, D, T_1, T_2, \ldots, T_{2000}\}$ ei paikne ühel sirgel. Tõesta, et mingid kolm punkti sellest hulgast on sellise kolmnurga tippudeks, mille pindala on väiksem kui $\frac{1}{10}$.

    Vihje. Lisame punktid $T_1, T_2, \ldots, T_{2000}$ ühekaupa ning iga punkti lisamisel ühendame selle vähima sellise hulknurga kõikide tippudega, mille sisepiirkonnas lisatav punkt paikneb. Siis punkti T_1 lisamine jaotab ruudu $ABCD$ neljaks kolmurgaks ning iga järgmise punkti T_i lisamine jaotab ühe olemasolevatest kolmnurkadest kolmeks kolmnurgaks. Pärast kõikide punktide T_i lisamist on ruut jaotatud $4 + 1999 \cdot 2 = 4002$ kolmnurgaks.

20. Lõpmatu tabeli read ja veerud on nummerdatud positiivsete täisarvudega. Selle tabeli igasse ruutu on kirjutatud mingi arvust 2000 väiksem positiivne täisarv. Tõesta, et leidub arvujada $d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots$, mille korral iga positiivse täisarvu k jaoks leidub tabelis rida, mille järjekorranumber on suurem kui k ning esimeses k ruudus on arvud $d_1, d_2, \ldots, d_k$ (selles järjekorras).

    Vihje. Võtame jada esimeseks elemendiks d_1 suvalise arvu, mis esineb tabeli lõpmata paljudes ridades esimeses ruudus. Edasi võtame iga $i = 2, 3, \ldots$ korral elemendiks d_i suvalise arvu, mis esineb i. ruudus lõpmata paljudes sellistes tabeli ridades, kus esimeses $i - 1$ ruudus on vastavalt arvud $d_1, \ldots, d_{i-1}$.