Bratislava kaugõppekooli ülesanded 1997/98

"Matemaatiline kaaviar"

Ülesanded ja lahendused

1. Kokal on potis 18 liitrit kuuma teed. Ta tahab valada kahele seltskonnale 7-liitristesse kannudesse kummassegi 6 liitrit teed. Kuidas saab kokk seda teha, kui tal on lisaks nimetatud nõudele kasutada veel ainult suur 4-liitrine kulp?

   Lahendus 1 (ülesande autorilt): Kokk võib valada teed järgmise algoritmi järgi:

   1. Täita esimene kann (kulbiga või otse potist).
   2. Valada esimesest kannust 4 liitrit teed kulpi ja sealt potti tagasi.
   3. Valada kogu esimeses kannus olev tee (3 liitrit) kulpi.
   4. Täita esimene kann potist.
   5. Valada esimesest kannust kulp täis: kannu jääb 6 liitrit teed.
   6. Valada kulbist tee potti tagasi.
   7. Korrata samme 1–6 teise kannuga.

   Märkus: Mõnevõrra küsitav koht on siin punktis 3, kus kokk peab kulbi koos 3 liitri teega käest panema, et potist teed kannu valada. Muidugi võib ka eeldada, et kokk võib kannu täitmiseks sellega otse potist teed ammutada — seda on tal võimalik teha ühe käega, hoides samal ajal pooltäidetud kulpi teises käes.

   Lahendus 2 (Reimo Palmilt): Kokk võib teed valada ka nii:

   1. Võtta potist kulbiga 4 liitrit teed ja valada esimesse kannu.
   2. Võtta potist kulbiga 4 liitrit teed ja valada teise kannu.
   3. Võtta potist kulbiga 4 liitrit teed ja valada esimene kann täis, ülejäänud 1 liiter valada teise kannu.
   4. Valada esimesest kannust kulp täis ja sellest 2 liitrit teed teise kannu, ülejäänud 2 liitrit valada maha (teine kann on nüüd täis).
   5. Valada esimesest kannust 3 liitrit teed kulpi, lisada sellele 1 liiter teisest kannust ja valada see kõik tagasi esimesse kannu.
   6. Valada esimene kann potist täis (potti jääb 3 liitrit teed).
   7. Valada potist 3 liitrit teed kulpi, lisada sellele 1 liiter esimesest kannust ja valada potti tagasi.

   Märkus: Selle lahenduse miinuseks on muidugi vajadus 2 liitrit teed maha valada. Koka jaoks mõnevõrra keeruline koht on ka viimases punktis, kus poti põhjast tuleb viimased 3 liitrit teed kuidagi kulpi saada.

2. Punamütsike kirjutas paberile n täisarvu ja tahab nüüd valida neist mõned (vähemalt ühe) nii, et valitud arvude summa jaguks arvuga n. Tõesta, et Punamütsike saab soovitud valiku teha olenemata sellest, millised arvud on paberile kirjutatud.

   Lahendus: Olgu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ paberil olevad arvud. Tähistame $s_1 = x_1$, $s_2 = x_1 + x_2$, $\ldots$, $s_n = x_1 + \ldots + x_n$. Kui leiduvad sellised arvud s_i ja s_j $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$, mis annavad arvuga n jagades sama jäägi, siis jagub vahe $s_j - s_i$ (ehk teisisõnu summa $x_{i+1} + \ldots + x_j$) arvuga n. Kui aga niisuguseid arve ei leidu, siis annavad arvud $s_1, s_2, \ldots, s_n$ arvuga n jagamisel n erinevat jääki, mille hulgas leidub ka jääk 0, s.t. üks summadest $s_i = x_1 + \ldots + x_i$ jagub arvuga n.

3. Sherlock Holmes leidis paberitüki, kuhu on kirjutatud mõned n-kohalised täisarvud. Põhjalikumal uurimisel avastas ta, et kõik need arvud sisaldavad ainult numbreid 5 ja 8 ning mistahes kaks arvu erinevad teineteisest vähemalt 2 numbri poolest. Kui palju arve võib leitud paberitükil kõige rohkem olla?

Vastus: 2^{n-1} .

Lahendus 1 (ülesande autorilt): Näitame kõigepealt, et paberilehel võis olla 2^{n-1} arvu. Juhul $n = 1$ on see ilmne: $2^{1-1} = 1$ ning paberilehel võis olla üks arv (kas 5 või 8). Kui $n > 1$, siis vaatleme kõikvõimalikke ainult numbritest 5 ja 8 koosnevaid $(n-1)$-kohalisi arve (neid on ilmselt 2^{n-1}) ning lisame igaühele neist lõppu ühe numbri (5 või 8) nii, et saadavas n-kohalises arvus oleks paarisarv numbreid 5 . Veendume, et niiviisi saadud 2^{n-1} arvu on nõutavate omadustega. Tõepoolest, kui mingid kaks $(n-1)$-kohalist arvu erinesid teineteisest ainult ühe numbri poolest, siis on neile lisatavad numbrid ilmselt erinevad (sest ühes neist pidi numbreid 5 olema täpselt ühe võrra rohkem kui teises) ning neist saadavad n-kohalised arvud erinevad teineteisest seega kahe numbri poolest. Kui aga vaadeldavad $(n-1)$-kohalised arvud erinesid teineteisest vähemalt kahe numbri poolest, siis on ilmselt sama omadusega ka neist saadud n-kohalised arvud.

Veendume nüüd, et arve ei saa olla rohkem kui 2^{n-1} . Olgu paberilehel m arvu — muutes nende kõikide esimesed numbrid (5 asemele 8 ja vastupidi), saame ilmselt jällegi ülesande tingimustele vastavad arvud. Seejuures ei esine ükski saadud arvudest paberilehel olevate arvude hulgas, sest ta erineb mingist niisugusest arvust ainult esimese numbri poolest. Niisiis $2m \leqslant 2^n$ (sest üldse leidub 2^n erinevat n-kohalist arvu), kust $m \leqslant 2^{n-1}$.

Lahendus 2 (Reimo Palmilt): Näitame kõigepealt jällegi, et leiduvad 2^{n-1} ülesande tingimusi rahuldavat arvu. Tõepoolest, moodustame numbritest 5 ja 8 kõik n-kohalised arvud, milles number 5 esineb paarisarv kordi. Selliseid arve on kokku

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{4} + \ldots = 2^{n-1} .$$

Siin kirjutis $\binom{m}{k}$ tähistab kombinatsioonide arvu m elemendist k kaupa ning kasutame seoseid $\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1$, $\binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \ldots + \binom{m}{m} = 2^m$ ja $\binom{m}{k} = \binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k}$, kus $1 \leqslant k \leqslant m$.

Mistahes kaks sellist arvu erinevad teineteisest vähemalt kahe numbri poolest, sest vastasel juhul peaks ühes neist number 5 esinema paaritu arv kordi.

Oletame nüüd, et leidub ülesande nõuetele vastav arvukomplekt, milles on rohkem kui 2^{n-1} arvu. Siis leidub nende hulgas rohkem kui 2^{n-2} arvu, mille esimene number on ühine (5 või 8). Selliste arvude seas leidub omakorda rohkem kui 2^{n-3} arvu, mille teine number on ühine. Jätkates seda arutlust jõuame lõpuks olukorrani, kus arvude seas, mille kõik numbrid peale kahe viimase on ühesugused, leiduvad kaks arvu, millel ka eelviimane number on ühine. Need arvud erinevad seega ainult viimase numbri poolest, mis on vastuolus ülesande tingimustega.

4. Kaelakee koosneb punastest ja sinistest helmestest. Kee tootja lubab selles teha järgmisi muudatusi:
   - Lisada mistahes kahe helme vahele üks punane helmes ja muuta nende kahe helme värv (punasest siniseks või vastupidi);
   - Muuta mistahes punase helme naaberhelmeste värv (kui kaelakee sisaldab vähemalt kolm helmest) ja eemaldada see punane helmes kaelakeest.

   Esialgne kaelakee koosneb ainult kahest punasest helmest. Kas lubatud operatsioonide abil on võimalik saada kee, mis koosneb:
   a) ühest punasest ja ühest sinisest helmest;
   b) ühest punasest ja sajast sinisest helmest;
   c) ainult kahest sinisest helmest?

   Vastus: a) ei; b) jah; c) ei.

   Lahendus: a) Kuna igal sammul muutub siniste helmeste arv paarisarvu (-2 , 0 või $+2$) võrra ning esialgses kees on 0 sinist helmest, siis paaritu arvu siniste helmestega keed ei ole lubatud operatsioonide abil võimalik moodustada.

b) Keest PP saame moodustada kee PSS. Kahest sinisest helmest võime saada neli järgmiste operatsioonidega:

$$SS \to PPP \to SPSP \to SSPPP \to SSSS\ .$$

Siit näeme, et on võimalik moodustada suvaline kee, mis ühe punase helme kõrval sisaldab paarisarvu siniseid helmeid.

c) Nagu eespool märgitud, sisaldab iga keest PP lubatud operatsioonide abil saadud kee paarisarvu siniseid helmeid. Seame mistahes niisuguse keega K vastavusse arvu $S(K)$ järgmisel viisil:

- kui kee K sisaldab $2n$ sinist helmest ja nende vahel on vastavalt $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$ punast helmest, siis olgu $S(K) = c_1 - c_2 + c_3 - \ldots + c_{2n-1} - c_{2n}$ (siin $c_i \geqslant 0$, loendamise alguskoha ja suuna valime vabalt);
- kui kee K ei sisalda ühtegi sinist helmest, siis olgu $S(K)$ võrdne punaste helmeste arvuga selles.

Paneme tähele, et alguskoha või suuna muutmine arvude $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$ määramisel võib muuta ainult arvu $S(K)$ märki ega mõjuta seega selle jaguvust või mittejaguvust arvuga 3. On ka lihtne veenduda (kontrollige seda!), et kui kee K' on keest K saadud ühe ülesandes lubatud operatsiooni abil, siis arvud $S(K)$ ja $S(K')$ (mille leidmisel kasutatud loendamise alguskoht ja suund on mõlema kee korral üks ja sama) on võrdsed või erinevad teineteisest täpselt 3 võrra. Et aga kee $K_1 = PP$ korral on $S(K_1) = 2$ (ei jagu kolmega) ja kee $K_2 = SS$ korral $S(K_2) = 0$ (jagub kolmega), siis ei ole keed SS võimalik keest PP lubatud operatsioonide abil saada.

5. "Äkki ilmusid ühikruudule mõned sirglõigud, mille pikkuste summa on 18. Igaüks neist on paralleelne mõne ruudu küljega ja nad jaotavad ruudu osadeks. Mulder arvab, et iga osa pindala on väiksem kui 0,01. Mulle näib, et seekord ta küll eksib."

   Kas agent Scullyl on õigus?

   Vastus: agent Scullyl oli õigus, Mulder eksis tõepoolest.

   Lahendus: Oletame vastuväiteliselt, et Mulder ei eksinud. Vaatleme kujundeid, milleks "ilmunud" sirglõigud ühikruudu jaotavad, ning tõestame, et suvalise niisuguse kujundi ümbermõõdu ja pindala suhe on suurem kui 40. Selleks ümbritseme vaadeldava kujundi vähima võimaliku ristkülikuga, mille servad on paralleelsed ühikruudu servadega, ning paneme tähele, et selle ristküliku pindala on vähemalt sama suur kui vaadeldava kujundi pindala, ümbermõõt aga ei ületa kujundi ümbermõõtu. Seega saab vaadeldava kujundi ümbermõõdu ja pindala suhe olla ainult suurem seda ümbritseva ristküliku vastavast suhtest. Olgu nüüd a ja b selle ristküliku külgede pikkused ning $P = 2(a+b)$ ja $S = ab$ vastavalt selle ümbermõõt ja pindala. Siis

$$\frac{P}{S} = \frac{2}{S}\left(a + \frac{S}{a}\right) = \frac{2}{\sqrt{S}}\left(\frac{a}{\sqrt{S}} + \frac{\sqrt{S}}{a}\right) \geqslant \frac{4}{\sqrt{S}}\ .$$

   Vastavalt eespool tehtud märkusele kehtib see võrratus ka esialgse kujundi korral. Kuna aga selle pindala on tehtud vastuväitelise oletuse kohaselt väiksem kui $0{,}01$, siis saamegi, et vaadeldava kujundi ümbermõõt ja pindala rahuldavad võrratust $P > 40S$.

   Summeerime nüüd kõikidele kujunditele vastavad võrratused. Kujundite pindalade summa saadud võrratuse paremal pool on võrdne ühega; vasakul pool oleva ümbermõõtude summa leidmiseks arvestame, et ruudu küljed lähevad ümbermõõtude summa leidmisel arvesse üks kord, ruudu sees asuvad kaht kujundit eraldavad lõigud aga kaks korda. Seega on kõikide kujundite ümbermõõtude summa ülimalt $4 + 2 \cdot 18 = 40$ ning saame vastuolulise võrratuse

$$40 \geqslant \sum P > 40 \sum S = 40 \cdot 1 = 40\ .$$

   Saadud vastuolu näitabki, et algul tehtud vastuväiteline oletus ei ole õige.

   Märkus: Küll aga võib esineda olukord, kus iga tekkinud kujundi pindala on täpselt $0{,}01$. Ainukese võimalusena realiseerub see juhul, kui "ilmunud" sirglõigud jagavad ühikruudu 100 võrdseks ruuduks.