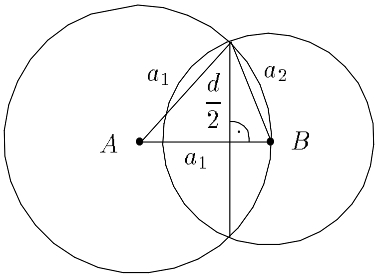
Bratislava kaugõppekooli ülesanded stereomeetriast

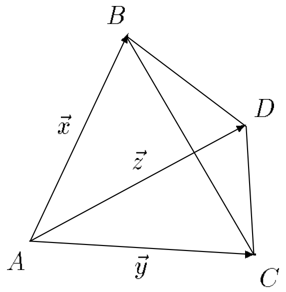
Ülesanded ja lahendused

1. Kõik ruumi punktid jaotatakse kolmeks paarikaupa lõikumatuks hulgaks. Tõesta, et vähemalt ühel neist kolmest hulgast (olgu see hulk X) on järgmine omadus: mistahes reaalarvu $a > 0$ korral leiduvad hulgas X sellised punktid A ja B , et $|AB| = a$.

   Lahendus: Oletame vastuväiteliselt, et ruum on jagatud kolmeks mittetühjaks hulgaks X_1 , X_2 ja X_3 (kui kaks neist hulkadest on tühjad, siis on ülesande väide ilmne; ühe tühja hulga korral sobib alltooduga sarnane, kuid lihtsam arutelu) ning iga hulga X_i jaoks leidub selline positiivne reaalarv a_i , et hulgas X_i ei ole punkte, mis asuksid teineteisest kaugusel a_i . Olgu $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3$ (vastasel juhul nimetame hulgad ümber). Võtame punkti A hulgas X_1 ja selle ümber sfääri raadiusega a_1 . Selle sfääri iga punkt peab kuuluma kas hulka X_2 või hulka X_3 . Kui kõik sfääri punktid kuuluksid ainult ühte neist hulkadest (nt. hulka X_2), oleks vastuolu käes, sest tingimuse $a_1 \geqslant a_2$ tõttu saame ilmselt leida sfääril kaks punkti, mis asuvad teineteisest kaugusel a_2 . Kui aga sfääril on punkte nii hulgast X_2 kui ka hulgast X_3 , võtame sfääril punkti B hulgast X_2 ja selle ümber sfääri raadiusega a_2 . Nende kahe sfääri lõikeks olev ringjoon saab koosneda ainult hulga X_3 punktidest ja et selle diameeter d (vt. joonist 1) rahuldab võrratust $d \geqslant \sqrt{3} \cdot a_2 > a_3$ (miks?), siis saame sellel ringjoonel leida kaks punkti, mis asuvad teineteisest kaugusel a_3 — see aga on vastuolus arvu a_3 valikuga.



Joonis 1



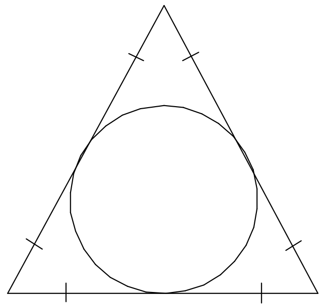
Joonis 2

2. Tetraeedri $ABCD$ servad AB ja CD on risti ning servad BC ja AD on risti. Tõesta, et ka servad AC ja BD on risti.

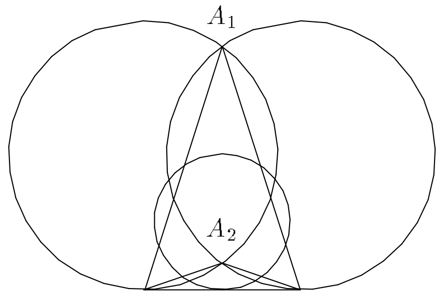
   Lahendus: Vaatleme vektoreid $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{y} = \overrightarrow{AC}$ ja $\vec{z} = \overrightarrow{AD}$ (vt. joonist 2). Ülesande tingimustest ja vektorite skalaarkorrutise omadustest saame $\vec{x}(\vec{y}-\vec{z}) = 0$ ehk $\vec{x}\vec{y} = \vec{x}\vec{z}$ (lõigud AB ja CD on risti) ning $\vec{z}(\vec{x}-\vec{y}) = 0$ ehk $\vec{z}\vec{x} = \vec{z}\vec{y}$ (lõigud BC ja AD on risti). Vaja on tõestada, et lõigud AC ja BD on risti, s.t. $\vec{y}(\vec{x}-\vec{z}) = 0$ ehk $\vec{y}\vec{x} = \vec{y}\vec{z}$, see aga on otsene järeldus ülaltoodud võrdustest.

3. Püramiidi põhjaks oleva kolmnurga kõik servad on puutujateks ühele ja samale sfäärile. Seejuures on iga serva puutepunkt sfääriga ühtlasi selle serva keskpunktiks ning vaadeldav sfäär lõikab püramiidi ülejäänud kolme serva nende keskpunktides. Tõesta, et püramiidi põhjaks olev kolmnurk on võrdkülgne ja püramiidi ülejäänud kolm serva on ühepikkused.

   Lahendus: Vaatleme kõigepealt püramiidi põhjaks olevat kolmnurka ning ringjoont, mida mööda selle kolmnurga tasand lõikab sfääri. Kuna selle kolmnurga suvalisest tipust vaadeldavale ringjoonele tõmmatud puutujalõigud on võrdse pikkusega ja iga puutujalõik moodustab kolmnurga vastavast küljest täpselt poole, siis peavad kõik puutujalõigud olema võrdse pikkusega (vt. joonist 3). Seega on püramiidi põhjaks võrdkülgne kolmnurk.



Joonis 3



Joonis 4

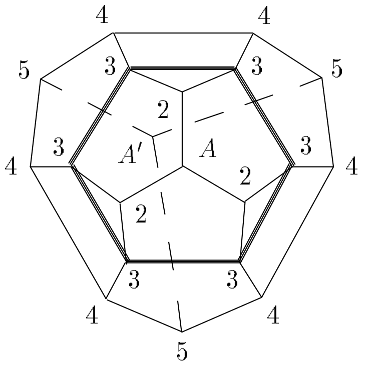
Vaatleme nüüd püramiidi suvalist külgtahku. Valime selle kahest alustipust ühe homoteetiakeskpunktiks ning teeme homoteetsusteisenduse teguriga 2 . Tahu ja sfääri lõikejooneks olev ringjoon (mis puutub vastavalt ülesande tingimustele tahu alusserva selle keskpunktis) teiseneb siis ringjooneks, millel paiknevad valitud tipust väljuva külgserva teise otspunkti võimalikud asukohad, sest esialgne ringjoon jagab eelduse põhjal selle serva pooleks. Samasuguse ringjoone konstrueerime ka vaadeldava külgtahu teise alustipu jaoks. Selle tahu kolmas tipp peab niisiis paiknema ühes nende kahe ringjoone lõikepunktidest (punktid A_1 ja A_2 joonisel 4). Kuna aga need ringjooned on teineteise peegeldusteks vaadeldava külgtahu alusserva keskristsirge suhtes (miks?), siis nende mõlemad lõikepunktid asuvad nimetatud keskristsirgel, s.t. selle tahu mõlemad külgservad on ühepikkused. Et see arutlus kehtib mistahes külgtahu jaoks, olemegi näidanud, et püramiidi kõik kolm külgserva on võrdse pikkusega.

4. Leia korrapärase dodekaeedri (kaksteisttahuka) kõikide ruumiliste diagonaalide pikkused, kui dodekaeedri servad on pikkusega 1 .

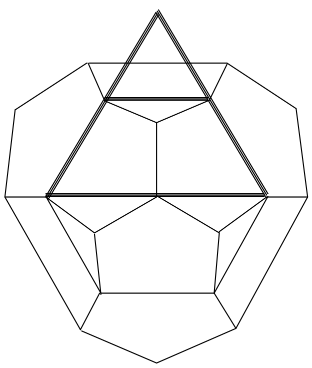
Vastus: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{5}+1)$, $\dfrac{1}{2}(\sqrt{5}+3)$ ja $\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{5}+1)$.

Lahendus: Olgu A dodekaeedri suvaline tipp ja A' selle vastastipp (lõik AA' on seega dodekaeedri diameeter). Jagame dodekaeedri tipud 6 rühma vastavalt nende kaugusele tipust A :

1) tipp A ;
2) tipu A kolm naabertippu;
3) tippu A ümbritseva kolme tahu ülejäänud 6 tippu;
4) tippu A' ümbritseva kolme tahu 6 tipust A' kaugeimat tippu;
5) tipu A' kolm naabertippu;
6) tipp A' .



Joonis 5



Joonis 6

Meie ülesandeks on leida tipu A kaugused rühmadesse 4, 5 ja 6 kuuluvatest tippudest — olgu need vastavalt d_1, d_2 ja d_3. Selleks paneme kõigepealt tähele, et kui korrapärase viisnurga küljepikkus on 1, siis selle viisnurga diagonaal on pikkusega $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ (tõestuseks tõmbame viisnurga ühe külje ja kahe diagonaali poolt moodustatud võrdhaarses kolmnurgas alusnurga poolitaja ja vaatleme tekkivaid sarnaseid kolmnurki).

Vaatleme nüüd kuusnurka, mille moodustavad rühma 3 kuuluvad tipud (vt. joonist 5). Selle kuusnurga nurgad on kõik võrdse suurusega, s.t. $120°$, küljepikkusteks on vaheldumisi 1 ja $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ ning diagonaalid on pikkustega d_1 ja d_2. Koosinusteoreemist kuusnurga kahe naaberkülje ja nende otspunkte ühendava diagonaali poolt moodustatud kolmnurgas saame

$$d_1^2 = 1^2 + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 - 2\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{5}+3 = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

ning seega $d_1 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{5}+1)$. Edasi pikendame selle kuusnurga kahte võrdse pikkusega külge kuni lõikumiseni. Et nende külgedega määratud sirgete vaheline nurk on $60°$ (miks?), siis moodustuvad kaks võrdkülgset kolmnurka (need on joonisel 6 näidatud jämeda joonega), millest leiame $d_2 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} + 1 = \dfrac{1}{2}(\sqrt{5}+3)$.

Suuruse d_3 leidmiseks vaatleme kolmnurka, mille moodustavad tipud A, A' ja tipu A' mingi naabertipp. See kolmnurk on täisnurkne, sest AA' on dodekaeedri ümber joonestatud sfääri diameeter. Pythagorase teoreemist leiame

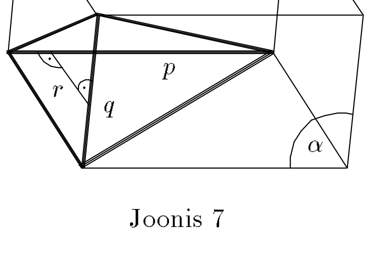
$$d_3^2 = 1^2 + \left(\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right)^2 = \frac{3\sqrt{5}+9}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{2}\right)^2,$$

kust $d_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{5}+1)$.

5. Tetraeedri $ABCD$ kaks tippu paiknevad sfääril raadiusega $\sqrt{10}$ ja kaks ülejäänud tippu paiknevad sfääril raadiusega 2, kusjuures neil sfääridel on ühine keskpunkt. Leia tetraeedri $ABCD$ ruumala suurim võimalik väärtus.

   Vastus: $6\sqrt{2}$.

   Lahendus: Kui tetraeedri vastasservade pikkused on p ja q, nende servadega määratud sirgete vaheline kaugus on r ning sirgete vaheline nurk on α, siis tetraeedri ruumala on $V = \dfrac{1}{6}\cdot pqr\cdot\sin\alpha$. Selle valemi kehtivuses veendumiseks täiendame tetraeedri rööptahukaks, lisades kummagi vaadeldava serva otspunktidesse teise servaga paralleelsed ja sama pikad lõigud (vt. joonist 7), ning arvestame, et nii saadud rööptahuka ruumala on tetraeedri ruumalast 6 korda suurem.



Joonis 7

Võttes nüüd vaadeldavateks vastasservadeks tetraeedri serva, mille mõlemad otstipud paiknevad välimisel sfääril, ning serva, mille mõlemad otstipud paiknevad sisemisel sfääril, saame ülaltoodud valemist teha järelduse, et need kaks serva peavad olema risti (muidu saaksime servade pööramisega tetraeedri ruumala suurendada) ning et mõlema serva keskpunkte ühendav lõik peab läbima sfääride ühist keskpunkti (muidu saaksime tetraeedri ruumala suurendada servadevahelist kaugust suurendades).

Olgu nüüd a välimisel sfääril asuvaid tippe ühendava serva kaugus sfääride ühisest keskpunktist ning b sisemisel sfääril asuvaid tippe ühendava serva kaugus samast punktist. Siis $r = a + b$, $\sin\alpha = 1$, $p = 2\sqrt{10 - a^2}$, $q = 2\sqrt{4 - b^2}$ ja $V = \frac{2}{3}(a+b)\sqrt{10-a^2}\sqrt{4-b^2}$. Seega on meil vaja leida niisugused a ja b väärtused (kusjuures $0 \leqslant a \leqslant \sqrt{10}$ ja $0 \leqslant b \leqslant 2$), mille korral avaldise $(a+b)^2(10-a^2)(4-b^2)$ väärtus on maksimaalne.

Selleks fikseerime kõigepealt b väärtuse ja leiame vaadeldava avaldise maksimumkoha a järgi. Vastava tuletise $2(b^2-4)(a+b)(2a^2+ab-10)$ kolmest nullkohast sobib suuruste a ja b positiivsuse tingimuse tõttu ainult $a = \frac{-b+\sqrt{b^2+80}}{4}$. Fikseerime nüüd a väärtuse ja leiame maksimumkoha b järgi — vastava tuletise $2(a^2-10)(a+b)(2b^2+ab-4)$ ainus sobiv nullkoht on $b = \frac{-a+\sqrt{a^2+32}}{4}$. Otsitava maksimumi saame nendel a ja b väärtustel, mis rahuldavad mõlemaid leitud tingimusi, s.t.

$$\begin{cases} a = \dfrac{\sqrt{b^2+80}-b}{4} \\ b = \dfrac{\sqrt{a^2+32}-a}{4} \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} 4a+b = \sqrt{b^2+80} \\ 4b+a = \sqrt{a^2+32} \end{cases}.$$

Tõstes mõlemad võrrandid ruutu:

$$\begin{cases} 2a^2+ab = 10 \\ 2b^2+ab = 4 \end{cases}$$

ning lahutades esimesest saadud võrrandist teise, saame $a^2-b^2=3$. Avaldades siit a, asendades selle teise võrrandisse ning tulemuseks saadud võrrandis liikmeid teisele poole viies ja võrrandi pooli ruutu tõstes jõuame biruutvõrrandini $4b^4-16b^2+16 = 3b^2+b^4$. Selle positiivsed lahendid on $b=1$ ja $b=\frac{4\sqrt{3}}{3}$, millest tingimuse $0 \leqslant b \leqslant 2$ tõttu sobib ainult esimene. Edasi leiame $a = \sqrt{3+b^2} = 2$.

Tetraeedri ruumala maksimaalne väärtus on niisiis $V = \frac{2}{3}(a+b)\sqrt{10-a^2}\sqrt{4-b^2} = 6\sqrt{2}$.