Bratislava kaugõppekooli ülesanded polünoomidest

Tähtaeg: 2. detsember 1996

1. Täisarvuliste kordajatega polünoomi $P(x)$ juurte seas on kaks järjestikust täisarvu. Mitme erineva täisarvu n korral võib kehtida võrdus $P(n) = 1996$?

2b. Leia kõik reaalarvud a , mille korral polünoomi $x^4+(a-3)x^2+(a+10)^2$ neli juurt moodustavad aritmeetilise progressiooni.

3b. Leia kõik polünoomid $P(x)$, mis rahuldavad iga reaalarvu x korral tingimust

$$xP(x-1) = (x-2)P(x) .$$

4b. Olgu $\mathcal{M}$ kõikide selliste polünoomide $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ hulk, mille kordajad a, b, c, d on reaalarvud ja mis rahuldavad tingimust $|P(x)| \leqslant 1$ iga lõigule $[-1, 1]$ kuuluva reaalarvu x korral. Tõesta, et leidub niisugune arv k , et $|a| \leqslant k$ iga polünoomi $P(x)$ korral hulgast $\mathcal{M}$, ning leia arvu k vähim võimalik väärtus.

5b. Kas leiduvad niisugused ratsionaalarvud a ja b , et polünoomidel x^2+ax+b ja $x^5 - x + 1$ on ühine juur?