Valikvõistlus 2018

Võistluskomplekti valmimisse panustasid:

Oleg Košik
Härmel Nestra
Erik Paemurru
Jaan Toots

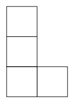
IMO'18 Eesti võistkonna valikvõistlus

6.–7. mai 2018 **Esimene päev**

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.
Palun vormista erinevate ülesannete lahendused eraldi lehtedele!

1. Tasandil on antud erinevad punktid O, A, B, $K_1, \ldots, K_n$, $L_1, \ldots, L_n$, millest ükski kolm ei asu ühel sirgel. Lõikude $K_1L_1, \ldots, K_nL_n$ kõik sisepunktid on värvitud punaseks, teised tasandi punktid on värvimata. *Lubatav tee* punktist O punkti X on murdjoon, mille otspunktid on O ja X ning millel ei ole ühtki punast punkti. Näiteks kui $n = 1$ ning $K_1(-1; 0)$, $L_1(1; 0)$, $O(0; -1)$ ja $X(0; 1)$, siis lubatavad teed punktist O punkti X on näiteks OK_1X ja OL_1X; lühemaid lubatavaid teid nende tippude vahel pole. Leia vähim positiivne täisarv n, mille korral on võimalik, et esimene O-st erinev murdjoone tipp igal võimalikult lühikesel teel punktist O punkti A asub punktile B lähemal kui punktile A ning esimene O-st erinev murdjoone tipp igal võimalikult lühikesel teel punktist O punkti B asub punktile A lähemal kui punktile B.

2. Olgu n positiivne täisarv. Leia suurim joonisel kujutatud 4 ühikruudust koosnevate nurgikute arv, mida saab ilma ülekateteta paigutada ruudustikule mõõtmetega $n \times n$ nii, et mingist nurgast vastasnurka on võimalik liikuda mööda katmata ruute (ruudult ruudule liikumine toimub üle nende ühise serva). Nurgikuid tohib pöörata ja peegeldada.



3. On antud reaalarv c ja täisarv m, $m \geqslant 2$. Reaalarvud $x_1, x_2, \ldots, x_m$ rahuldavad tingimusi $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 0$ ja $\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2}{m} = c$. Leia $\max(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, kui on teada, et see on võimalikult väike.

IMO'18 Eesti võistkonna valikvõistlus

6.–7. mai 2018 **Teine päev**

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.
Palun vormista erinevate ülesannete lahendused eraldi lehtedele!

4. Leia kõik funktsioonid f, mis on määratud kõigi reaalarvude hulgal ja mille väärtused on reaalarvud ning mis rahuldavad kõigi reaalarvude x ja y korral võrdust
$$f\big(xy + f(xy)\big) = 2xf(y).$$

5. Olgu O teravnurkse eriküljse kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt. Sirge OA lõikab kolmnurga ABC tippudest B ja C tõmmatud kõrgusi vastavalt punktides P ja Q. Olgu H kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt. Tõesta, et kolmnurga PQH ümberringjoone keskpunkt asub kolmnurga ABC tipust A tõmmatud mediaanil.

6. Nimetame korduvate numbriteta positiivset täisarvu n *säravaks*, kui kas n on ühekohaline või arvul n leidub selline tegur, mis on saadav arvust n ühe numbri väljajätmisel ja on omakorda särav. Leia suurim särav positiivne täisarv. (Eeldame, et arvud ei alga nulliga.)

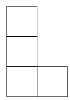
Отборочный конкурс на ММО’18

6–7 мая 2018 г. **Первый день**

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.
Пожалуйста, оформляйте решения разных заданий на отдельных листках!

1. На плоскости даны различные точки O, A, B, $K_1, \ldots, K_n$, $L_1, \ldots, L_n$, среди которых никакие три не лежат на одной прямой. Все внутренние точки отрезков $K_1L_1, \ldots, K_nL_n$ раскрашены в красный цвет, все остальные точки плоскости бесцветные. *Разрешённый путь* из точки O в точку X – это ломаная, концы которой O и X, и на которой нет ни одной красной точки. Например, если $n = 1$ и даны точки $K_1(-1;0)$, $L_1(1;0)$, $O(0;-1)$ и $X(0;1)$, то разрешёнными путями из точки O в точку X будут, например, OK_1X ja OL_1X; более коротких разрешённых путей между этими точками нет. Найти наименьшее положительное целое число n, при котором возможно, что в каждом кратчайшем пути из точки O в точку A первая вершина ломаной, отличная от O, будет находиться к точке B ближе, чем к точке A, а в каждом кратчайшем пути из точки O в точку B первая вершина ломаной, отличная от O, будет находиться к точке A ближе, чем к точке B.

2. Пусть n – положительное целое число. Найти наибольшее возможное число изображённых на рисунке уголков, состоящих из 4 клеток, которые можно без перекрываний разместить на клетчатое поле размерами $n \times n$ так, что возможно перейти из какого-то угла поля в противоположное только через непокрытые клетки (перемещение из одной клетки в другую происходит через их общую сторону). Уголки разрешается поворачивать и отражать.



3. Дано действительное число c и целое число m, $m \geqslant 2$. Действительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$ удовлетворяют условиям $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 0$ и $\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2}{m} = c$. Найти $\max(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, если известно, что это значение наименьшее возможное.

Отборочный конкурс на ММО'18

6–7 мая 2018 г. **Второй день**

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.
Пожалуйста, оформляйте решения разных заданий на отдельных листках!

4. Найти все функции f, которые определены на множестве всех действительных чисел, принимают действительные значения и которые при всех действительных x и y удовлетворяют равенству

$$f\big(xy + f(xy)\big) = 2xf(y).$$

5. Пусть O – центр описанной окружности остроугольного разностороннего треугольника ABC. Прямая OA пересекает высоты треугольника ABC, опущенные из вершин B и C, соответственно в точках P и Q. Пусть H – точка пересечения высот треугольника ABC. Доказать, что центр описанной окружности треугольника PQH лежит на медиане треугольника ABC, опущенной из вершины A.

6. Назовём положительное целое число n, не содержащее повторяющихся цифр, *ярким*, если оно или однозначное, или у числа n найдётся делитель, который можно получить из n путём удаления из записи одной из цифр, и который при этом сам является ярким. Найти самое большое яркое целое число. (Полагаем, что числа не начинаются с нуля.)

Lahendused

1. *Vastus:* 2.

Ütleme, et tee $OX_1 \ldots X_{k-1}A$ on *sobiv*, kui ta on lühim lubatav tee punktist O punkti A ja $|X_1A| \leqslant |X_1B|$. Analoogselt nimetame teed $OY_1 \ldots Y_{k-1}B$ *sobivaks*, kui ta on lühim lubatav tee punktist O punkti B ja $|Y_1B| \leqslant |Y_1A|$.

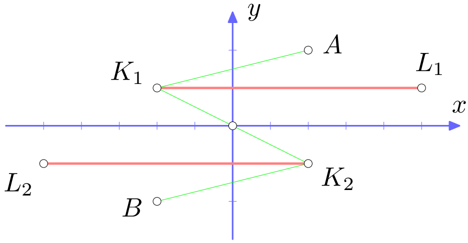
Näitame, et juhul $n = 2$ saame punktid A, B, O, K_1, L_1, K_2, L_2 valida nii, et ükski lühim tee punktist O punkti A ega punktist O punkti B pole sobiv. Valime $A(2;2)$, $B(-2;-2)$, $K_1(-2;1)$, $L_1(5;1)$, $K_2(2;-1)$ ja $L_2(-5;-1)$ (joonis 1). Kui võtta $O(0;0)$, siis ainsad lühimad teed punktist O punktidesse A ja B on vastavalt OK_1A ja OK_2B, samas kui $|K_1A| > |K_1B|$ ja $|K_2B| > |K_2A|$, mistõttu nad pole sobivad. Nihutades punkti O pisut kõrvale, väldime kolme punkti paiknemist ühel sirgel, kuid olukord jääb samaks.

Näitame, et juhul $n = 1$ leidub alati vähemalt üks sobiv tee punktist O punkti A või punkti B. Kui lõik OA või lõik OB ei sisalda punaseid punkte, on vastav lõik sobiv tee. Eeldame seetõttu järgnevas, et mõlemad lõigud OA ja OB sisaldavad punaseid punkte. Üldisust kitsendamata $|K_1A| \leqslant |K_1B|$ (vastasel korral vahetame A ja B).

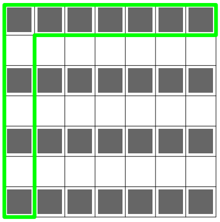
Kui OK_1A on lühim tee punktist O punkti A, siis see tee on sobiv. Vastasel korral on OL_1A ainus lühim tee punktist O punkti A. Kui $|L_1A| \leqslant |L_1B|$, siis on see tee sobiv. Eeldame seetõttu järgnevas, et $|L_1A| > |L_1B|$.

Kui OL_1B on lühim tee punktist O punkti B, siis see tee on sobiv. Vastasel korral on OK_1B ainus lühim tee punktist O punkti B. Sel juhul peaks kehtima võrratus

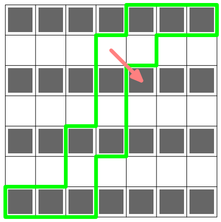
$$|OL_1| + |L_1A| + |OK_1| + |K_1B| < |OK_1| + |K_1A| + |OL_1| + |L_1B|,$$



Joonis 1



Joonis 2



Joonis 3

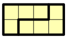
millest sarnaste liikmete koondamisel tekib $|K_1B| + |L_1A| < |K_1A| + |L_1B|$. Liites aga võrratuste $|K_1B| \geqslant |K_1A|$ ja $|L_1A| > |L_1B|$ vastavad pooled, saame $|K_1B| + |L_1A| > |K_1A| + |L_1B|$. Vastuolu näitab, et vähemalt üks sobiv tee punktist O punkti A või B peab leiduma.

2. *Vastus:* $\frac{n^2-2n}{4}$, kui n on paaris; $\frac{(n-1)^2}{4}$, kui $n \equiv 1 \pmod 4$; $\frac{(n-1)^2}{4}-1$, kui $n \equiv 3 \pmod 4$.

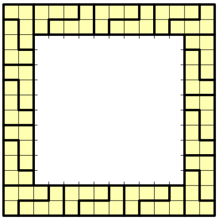
Et liikumisel nurgast vastasnurka tehakse vähemalt $n-1$ sammu horisontaalis ja $n-1$ sammu vertikaalis, hõivab tee vähemalt $2n-1$ ühikruutu. Seega saavad nurgikud katta ülimalt $(n-1)^2$ ühikruutu ja nurgikuid saab järelikult olla paarituarvulise n korral ülimalt $\frac{(n-1)^2}{4}$ ja paarisarvulise n korral ülimalt $\frac{(n-1)^2-1}{4}$ ehk $\frac{n^2-2n}{4}$.

Näitame, et kui $n \equiv 3 \pmod 4$, siis nõutud tingimustel pole võimalik paigutada $\frac{(n-1)^2}{4}$ nurgikut. Oletame väitevastaselt, et sel arvul nurgikuid on paigutatud. Sel juhul on katmata täpselt $2n-1$ ühikruutu vastasnurkade vahelisel teel. Paneme tähele, et nurgikute arv $\frac{(n-1)^2}{4}$ on paaritu, sest $n-1$ jagub 2-ga, kuid mitte 4-ga, millest tulenevalt on 4 suurim 2 aste, millega $(n-1)^2$ jagub. Värvime ruudud ridade kaupa vaheldumisi mustaks ja valgeks ning olgu m ja v vastavalt nurgikutega kaetud mustade ja valgete ruutude arvud. Et iga nurgik katab täpselt 3 üht ja 1 teist värvi ruudu, peavad m ja v olema paaritud.

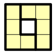
Kui vaba tee kulgeks mööda serva (joonisel 2 kujutatud $n = 7$ jaoks), moodustaks nurgikutega kaetav ala $(n-1)\times(n-1)$ ruudustiku, kus on nii musti kui ka valgeid ruute paarisarv (sest igas reas on paarisarv ühte värvi ruute). Tee iga muu asend on saavutatav mööda serva kulgevast teest sammudega, millega asendatakse tee ühes pöördepunktis tee alla kuuluv ruut temast diagonaalis paikneva vastasvärvi naaberruuduga (joonis 3). Seega tee alla jäävate mustade ja valgete ruutude arvude paarsused igal sellisel sammul



Joonis 4



Joonis 5



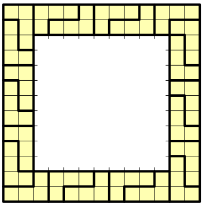
Joonis 6

muutuvad. Kuna teest üle jääva ala katmiseks peab kummalegi poole teed jääma 4-ga jaguv arv ruute ja iga samm muudab ruutude arvu kummalgi pool teed 1 võrra, tuleb samme teha 4-ga jaguv arv. Sel juhul on tee alla jäävate mustade ja valgete ruutude arvude paarsused samad nagu tee algseisus, mistõttu on ka nurgikutega kaetud mustade ja valgete ruutude arvude paarsused samad nagu $(n-1)\times(n-1)$ ruudustikul. Seega m ja v on tegelikult paarisarvud. Vastuolu näitab, et $\frac{(n-1)^2}{4}$ nurgikut nõutud tingimustel paigutada ei saa.

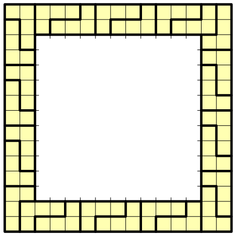
Et näidata, et paaris n korral on võimalik paigutada $\frac{n^2-2n}{4}$ nurgikut, $n \equiv 1 \pmod 4$ korral $\frac{(n-1)^2}{4}$ nurgikut ja $n \equiv 3 \pmod 4$ korral $\frac{(n-1)^2}{4}-1$ nurgikut, piisab paigutada vastaval arvul nurgikuid $(n-1)\times(n-1)$ ruudustikule.

- Kui $n \equiv 1 \pmod 4$, siis on $(n-1)\times(n-1)$ ruudustik üleni kaetav 2×4 ristkülikutega, millest igaüks on kokku pandav 2 nurgikust (joonis 4).
- Näitame, et kui $n \equiv 3 \pmod 4$, siis on võimalik paigutada nurgikud $(n-1)\times(n-1)$ ruudustikule nii, et vaid 2×2 ala ruudustiku keskel jääb katmata. Juhul $n=3$ on see triviaalne. Kui $n>3$, siis katame kõigepealt 2 ruudu laiuse riba ruudustiku ääres, nagu näidatud joonisel 5. Üle jääva 4 võrra väiksema küljepikkusega ruudu katame samal moel, kuni jõuame küljepikkuseni 2.
- Näitame, et kui $n \equiv 2 \pmod 4$ või $n \equiv 0 \pmod 4$, siis on võimalik paigutada nurgikud $(n-1)\times(n-1)$ ruudustikule nii, et vaid keskmine ruut jääb katmata. Juhul $n=2$ on see triviaalne ja juhul $n=4$ on paigutus näidatud joonisel 6. Kui $n>4$, siis katame kõigepealt 2 ruudu laiuse riba ruudustiku äärtes, nagu näidatud joonistel 7 ja 8 vastavalt $n \equiv 2 \pmod 4$ ja $n \equiv 0 \pmod 4$ jaoks. Üle jääb 4 võrra väiksema küljepikkusega ruut, mille katame samal moel, kuni jõuame küljepikkuseni 1 või 3.

3. *Vastus:* $\sqrt{\frac{c}{m-1}}$.



Joonis 7



Joonis 8

Üldisust kitsendamata $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_m$, siis $\max(x_1, x_2, \ldots, x_m) = x_1$. Näitame, et $x_1 \geqslant \sqrt{\frac{c}{m-1}}$. Olgu arvude $x_1, x_2, \ldots, x_m$ seas täpselt n mittenegatiivset. Kui $n = m$, siis eelduse $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 0$ tõttu peab kehtima $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$, millest $c = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2}{m} = 0$ ja $x_1 = 0 = \sqrt{\frac{c}{m-1}}$. Eeldame järgnevas, et $n \leqslant m - 1$.

Oletame väitevastaselt, et $x_1 < \sqrt{\frac{c}{m-1}}$. Siis

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant nx_1 < n\sqrt{\frac{c}{m-1}}$$

ja

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant nx_1^2 < n \cdot \frac{c}{m-1}.$$

Et $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 0$, siis ka

$$|x_{n+1}| + \ldots + |x_m| = x_1 + x_2 + \ldots + x_n < n\sqrt{\frac{c}{m-1}}.$$

Seega $|x_m| < n\sqrt{\frac{c}{m-1}}$, mistõttu

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 + \ldots + x_m^2 &\leqslant |x_{n+1}| \cdot |x_m| + \ldots + |x_m| \cdot |x_m| = \\ &= (|x_{n+1}| + \ldots + |x_m|) \cdot |x_m| < \\ &< n\sqrt{\frac{c}{m-1}} \cdot n\sqrt{\frac{c}{m-1}} = \\ &= n^2 \cdot \frac{c}{m-1}. \end{aligned}$$

Kokku

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 < n \cdot \frac{c}{m-1} + n^2 \cdot \frac{c}{m-1} = \frac{n(n+1)}{m-1} \cdot c.$$

Et $n \leqslant m-1$, siis $n(n+1) \leqslant (m-1)m$. Seega

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 < \frac{(m-1)m}{m-1} \cdot c = mc,$$

mis on aga vastuolus eeldusega. Järelikult $x_1 \geqslant \sqrt{\frac{c}{m-1}}$.

Võrdus $x_1 = \sqrt{\frac{c}{m-1}}$ võimalik, kui $x_1 = x_2 = \ldots = x_{m-1} = \sqrt{\frac{c}{m-1}}$ ja $x_m = -(m-1)\sqrt{\frac{c}{m-1}}$.

Lahendused

4. *Vastus:* $f(x) = 0$ ja $f(x) = x$.

Lahendus 1. Valides algses võrrandis $(x, y) = (z, 1)$, kus z on suvaline reaalarv, saame

$$f\left(z + f(z)\right) = 2zf(1). \tag{1}$$

Valides aga algses võrrandis $(x, y) = (1, z)$, saame

$$f\left(z + f(z)\right) = 2f(z). \tag{2}$$

Võrdustest (1) ja (2) saame kokku

$$f(z) = f(1)z. \tag{3}$$

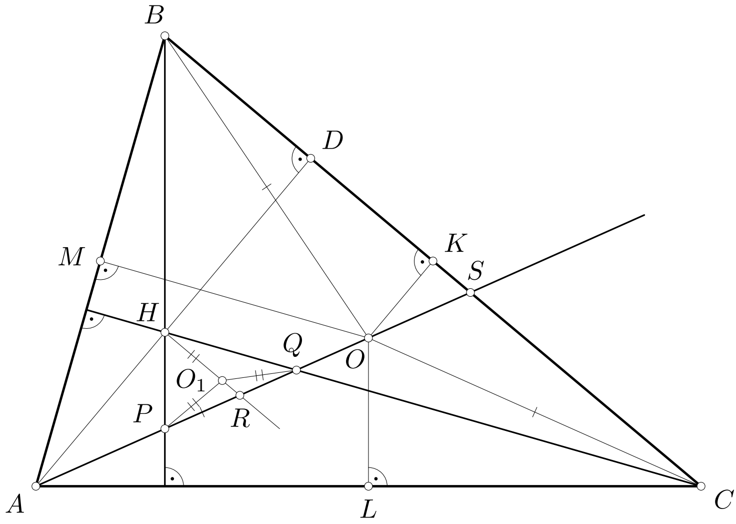
Valides võrduses (1) $z = 1$, saame $f\left(1 + f(1)\right) = 2f(1)$, valides aga võrduses (3) $z = 1 + f(1)$, saame $f\left(1 + f(1)\right) = f(1)\left(1 + f(1)\right)$. Kokkuvõttes $\left(1 + f(1)\right) f(1) = 2f(1)$ ehk $f(1)\left(f(1) - 1\right) = 0$, kust $f(1) = 0$ või $f(1) = 1$. Seega võrduse (3) põhjal kas iga z korral $f(z) = 0$ või iga z korral $f(z) = z$. Kontroll näitab, et mõlemad funktsioonid rahuldavad algset võrrandit.

Lahendus 2. Valides algses võrrandis $y = 0$, saame $f\left(f(0)\right) = 2xf(0)$. Et x on suvaline reaalarv, saab see kehtida vaid juhul, kui $f(0) = 0$.

Valides algses võrrandis $x = \dfrac{1}{y}$, saame $f\left(1 + f(1)\right) = \dfrac{2}{y} f(y)$. Sellest tulenevalt kehtib iga $y \neq 0$ korral

$$f(y) = \frac{f\left(1 + f(1)\right)}{2} y. \tag{4}$$

Juhul $f\left(1 + f(1)\right) = 0$ annab võrdus (4) $f(y) = 0$ iga y korral. Sama tuleb välja, kui $1 + f(1) = 0$, sest $f(0) = 0$. Kui aga $1 + f(1) \neq 0$ ja $f(1 + f(1)) \neq 0$, siis saame võtta võrduses (4) $y = 1 + f(1)$ ja taandada suurusega $f(1 + f(1))$, mis annab $\dfrac{1 + f(1)}{2} = 1$ ehk $f(1) = 1$. Nüüd annab $y = 1$ võrduses (4) $\dfrac{f\left(1 + f(1)\right)}{2} = 1$, seega $f(y) = y$ iga y korral.



Joonis 9

5. *Lahendus 1.* Olgu kolmnurga ABC tipust A tõmmatud kõrguse aluspunkt D ning külgede BC, CA ja AB keskpunktid vastavalt K, L ja M; olgu veel O_1 kolmnurga HPQ ümberringjoone keskpunkt (joonis 2). Et O on kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt, siis $\angle AOL = \frac{1}{2}\angle AOC = \angle ABC$ ja $\angle AOM = \frac{1}{2}\angle AOB = \angle ACB$. Seega $\angle QPH = \angle AOL = \angle ABC$ ja $\angle PQH = \angle AOM = \angle ACB$. Järelikult on kolmnurgad ABC ja HPQ sarnased tunnuse NN põhjal. Sellest tulenevalt

$$\angle O_1HQ = \angle OAC = 90^\circ - \angle AOL = 90^\circ - \angle ABC = \angle HCB,$$

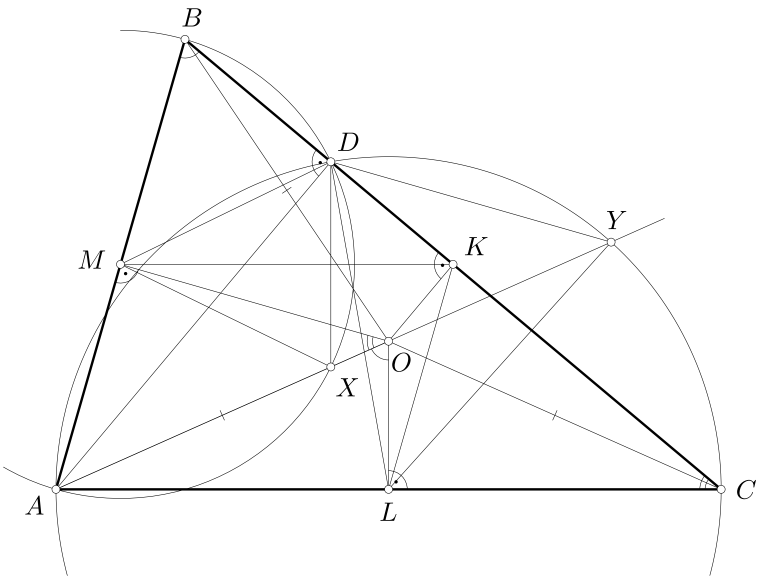
Seega $HO_1 \parallel BC$.

Olgu nüüd R ja S sirge AO lõikepunktid vastavalt sirgetega HO_1 ja BC. Kolmnurkade ABC ja HPQ sarnasuse tõttu $\frac{|O_1R|}{|HR|} = \frac{|OS|}{|AS|}$. Et OK ja AD on mõlemad risti küljega BC, siis $OK \parallel AD$, millest tulenevalt $\frac{|OS|}{|AS|} = \frac{|KS|}{|DS|}$. Kokkuvõttes niisiis

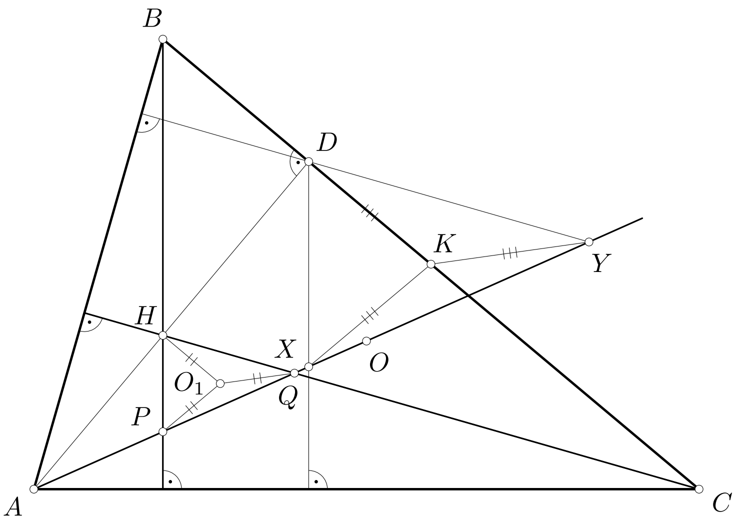
$$\frac{|O_1R|}{|HR|} = \frac{|KS|}{|DS|}.$$

Et sirged HR ja DS on paralleelsed, siis järeldub sellest võrdusest, et punktid A, O_1 ja K on ühel sirgel.

Lahendus 2. Nagu lahenduses 1 tähistame punktid D, K, L ja M ning tõestame võrdused $\angle AOL = \angle ABC$ ja $\angle AOM = \angle ACB$. Eeldame üldisust kit-



Joonis 10



Joonis 11

sendamata, et $|AB| < |AC|$. Olgu X ja Y sirge AO teised lõikepunktid vastavalt kolmnurkade ABD ja ACD ümberringjoontega (joonis 10). Saame $\angle DXY = 180^\circ - \angle DXA = \angle ABD = \angle AOL$ ja $\angle DYX = \angle DCA = \angle MOA$, millest vastavalt $DX \parallel OL$ ja $DY \parallel OM$. Et $OL \perp AC$ ja $OM \perp AB$, siis seega ka $DX \perp AC$ ja $DY \perp AB$. Kesklõigu omadusest $MK \parallel AC$ ja $LK \parallel AB$, mistõttu $DX \perp MK$ ja $DY \perp LK$. Et $AD \perp BC$, on M ja L vastavalt kolmnurkade ABD ja ACD ümberringjoonte keskpunktid, mistõttu $|MD| = |MX|$ ja $|LD| = |LY|$. Võrdhaarse kolmnurga tipunurgast tõmmatud kõrgus poolitab aluse, mistõttu eelneva põhjal on MK lõigu DX keskristsirge ja LK lõigu DY keskristsirge. Nende sirgete lõikepunkt K on kolmnurga DXY ümberringjoone keskpunkt.

Kiirteteoreemist $\dfrac{|AH|}{|AD|} = \dfrac{|AP|}{|AX|} = \dfrac{|AQ|}{|AY|}$ (joonis 11). Seega homoteetia keskpunktiga A teguriga $\dfrac{|AH|}{|AD|}$ viib kolmnurga DXY kolmnurgaks HPQ ja punkti K niisiis kolmnurga HPQ ümberringjoone keskpunktiks. Järelikult asub kolmnurga HPQ ümberringjoone keskpunkt lõigul AK.

6. *Vastus:* 146250.

Näitame kõigepealt, et kui arv $10n$ on särav, siis ka arv n on särav. Teeme induktsiooni arvu n pikkuse järgi. Eeldame, et ühe numbri võrra lühemate arvude puhul väide kehtib. Kui arvu $10n$ lõpunulli kaotamisel tekib särav tegur n, siis väide kehtib. Kui arvu $10n$ särav tegur tekib mõne muu numbri kaotamisel, siis ka selle teguri lõpus on 0 ehk ta esitub kujul $10d$. Induktsiooni eelduse põhjal on d särav. Siis aga tekib arvust n vastava numbri eemaldamisel särav tegur d, mis tähendab, et ka n on särav.

Edasi näitame, et mitmekohalise 0-ga mitte lõppeva sărava arvu iga särav tegur on temast saadav esimese või teise numbri eemaldamisel. Oletame väitevastaselt, et särava arvu n särav tegur d saadakse kolmanda või kaugema numbri eemaldamisel. See tähendab, et $n = (10a + x) \cdot 10^k + b$ ja $d = a \cdot 10^k + b$, kus $a \geqslant 10$, $0 \leqslant x < 10$ ja $b < 10^k$. Et

$$\begin{aligned}9d = 9a \cdot 10^k + 9b &< 9a \cdot 10^k + 9 \cdot 10^k = (9a + 9) \cdot 10^k < \\ &< 10a \cdot 10^k \leqslant \\ &\leqslant (10a + x) \cdot 10^k + b = 10a \cdot 10^k + x \cdot 10^k + b < \\ &< 10a \cdot 10^k + a \cdot 10^k + 11b = 11d,\end{aligned}$$

siis ainsa võimalusena $n = 10d$. See aga tähendab, et n lõpeb nulliga, mis on vastuolus eeldusega.

Olgu nüüd n suvaline särav 5-kohaline arv, mille viimane number pole 0, ning d tema särav tegur. Vaatleme kahte juhtu vastavalt sellele, millise numbri väljajätmisel d saadakse.

- Kui tegur d tekib esimese numbri eemaldamisel, siis $d \mid n-d = 10^4 \cdot x$, kus x on eemaldatud number. Et d ei lõpe nulliga, siis d ei jagu kas 2-ga või 5-ga. Kui d ei jagu 5-ga, siis $d \leqslant 2^4 \cdot x \leqslant 2^4 \cdot 9 < 10^3$, vastuolu. Seega d ei jagu 2-ga, millest tulenevalt $d \mid 5^4 \cdot x$. Et d on 4-kohaline paaritu arv, peab d jagama üht arvudest 1875, 3125, 4375, 5625. Arvu 3125 võib arvestusest välja jätta, sest sel puhul arvu n esimene number $x = 5$, kuid viimane number on samuti 5. Ülejäänud kolme arvu 4-kohalised tegurid on 1125, 1875, 4375, 5625. Esimene ja viimane sisaldavad korduvaid numbreid; ülejäänud kaks pole samuti säravad, sest esimese ega teise numbri väljajätmisel ei teki tegurit.
- Kui tegur d tekib teise numbri kaotamisel, siis $d \mid n-d = 10^3 \cdot y$, kus y on mingi naturaalarv. Et d ei lõpe 0-ga, siis d ei jagu 2-ga või 5-ga, mis tähendab, et $\frac{n-d}{d}$ jagub kas arvuga 2^3 või arvuga 5^3. Kuid kuna n ja d algavad mingi ühe ja sama numbriga a, siis

  $$\frac{n}{d} < \frac{(a+1)\cdot 10^4}{a \cdot 10^3} = 10 + \frac{10}{a} \leqslant 20,$$

  mistõttu $\frac{n-d}{d}$ saab olla ainult 8 või 16, mõlemal juhul $5^3 \mid d$. Kirjutame $d = 1000a + 125r$, kus $r \in \{1,3,5,7\}$. Kui $\frac{n-d}{d} = 16$ ehk $n = 17d$, siis $n = 17000a + 2125r = 1000(17a+2r) + 125r$. Et n algab numbriga a ja $125r < 1000$, siis $17a + 2r < 10(a+1)$, kust $7a + 2r < 10$. See annab $a = 1$ ja $r = 1$ ehk $d = 1125$, mis pole särav. Kui $\frac{n-d}{d} = 8$ ehk $n = 9d$, siis $n = 9000a + 1125r = 1000(9a + r) + 125r$. Et n algab numbriga a, siis siis $9a + r + \frac{r}{8} > 10a$, kust $r > \frac{8}{9}a \geqslant a - 1$ ehk $r \geqslant a$. Jättes kõrvale korduvate numbritega kandidaadid, saame $d \in \{1375, 1625, 1875, 2375, 2875, 3625, 3875, 4625, 4875, 6875\}$, kus ainult arv 1625 on särav, sest teiste esimese ega teise numbri eemaldamisel ei teki tegurit. Kontroll näitab, et ka $9 \cdot 1625$ ehk 14625 on särav.

Seega 14625 on ainus 5-kohaline särav arv, mis ei lõpe nulliga. Olgu nüüd n suvaline 6-kohaline särav arv. Kui n lõpeb nulliga, siis eelneva põhjal tekib nulli eemaldamisel 5-kohaline särav arv, mis nulli ei sisalda. Seega $n = 146250$. Kui n ei lõpe nulliga, siis peab temast esimese või teise numbri eemaldamisel tekkima särav tegur d, mis samuti ei lõpe nulliga. Seega $d = 14625 = 117 \cdot 125$, mistõttu $117 \mid n - d = 10^4 \cdot z$, kus z on ülimalt kahekohaline. Et 117 on 10-ga ühistegurita, on see võimatu. Seega 146250 on ainus 6-kohaline särav arv. Kui n oleks 7-kohaline särav arv, tekiks temast esimese või teise numbri eemaldamisel 146250, mistõttu peaks ka arv n lõppema 0-ga, mis aga tähendab, et $\frac{n}{10}$ oleks särav 6-kohaline arv, milles nulli ei esine. Sellist aga varasema põhjal ei eksisteeri. Kuna 7-kohalisi säravaid arve pole, ei saa leiduda ka pikemaid. Kokkuvõttes on 146250 suurim särav arv.

Märkus. Neljakohalised säravad arvud ei tarvitse jaguda 125-ga, kontranäited on 2475 ja 6075.

Hindamisskeemid

1. *(Janno Veeorg)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antavad punktid summeeriti.

- Tõestatud, et $n = 1$ ei sobi: 4 p

  Sealhulgas:
  - Leitud, et lõigud OA ja OB peavad mõlemad sisaldama vähemalt ühte punast punkti: *1 p*
- Olemas näide, et $n = 2$ sobib: 3 p

Näite eest, kus ei olnud antud punktide koordinaate või ei olnud kuidagi teisiti üheselt määratud punktide asukohti, anti 2 punkti.

Mitmed tööd kaotasid punkti, sest olid $n = 1$ mittesobivuse tõestamisel eeldanud, et lõik K_1L_1 lõikub lõikudega OA ja OB, ilma seda kuidagi põhjendamata.

2. *(Sandra Schumann)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud, et tükkide arv on ülimalt $\frac{(n-1)^2}{4}$: 1 p
- Põhjendatud tükkide maksimaalarv ja toodud sobivad konstruktsioonid paaris n jaoks: 2 p
- Toodud sobiv konstruktsioon $n \equiv 1 \pmod 4$ jaoks: 1 p
- Toodud sobiv konstruktsioon $n \equiv 3 \pmod 4$ jaoks: 1 p
- Põhjendatud, miks $(n-1) \times (n-1)$ ruudustikule pole võimalik rohkem tükke paigutada $n \equiv 3 \pmod 4$ korral: 1 p
- Põhjendatud kõigi teede jaoks $n \equiv 3 \pmod 4$ puhul: 1 p

3. *(Jaan Toots)*

Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Toodud näide $x_1 = \ldots = x_{m-1} = \sqrt{\frac{c}{m-1}}$ ja $x_m = -\sqrt{(m-1)c}$: 1 p
- Näidatud, et $\max(x_1, \ldots, x_m) < \sqrt{\frac{c}{m-1}}$ ei ole võimalik: 6 p

Lahenduse peamisekse osaks on näidata konstruktsioonist tuleneva väärtuse minimaalsust, kuid kahjuks oli seda edukalt proovitud vaid üksikutes töödes. Miinimumi rahuldava konstruktsioonini on samas võrdlemisi triviaalne jõuda.

Hindamisskeemid

4. *(Kaur Aare Saar)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Täislahendus: 7 p
- Täislahendus ükskikute puudustega, näiteks veendumata $f(0)$ väärtuses: 6 p
- Põhjendatud, et kõik funktsioonid, mis täidavad tingimust, esinevad kujul $f(x) = ax$: 4 p
- Leitud kõik funktsioonid kujul $f(x) = ax$, mis rahuldavad võrrandit: 2 p
- Õige vastus: 1 p

Ülesanne oli ootuspäraselt hästi lahendatud. Sõltuvana lahenduse meetodist, näiteks lahendades analoogselt žürii lahendusega 2, võis jääda ammendavalt veendumata selles, mis on $f(0)$ väärtus. Vähem kogenud lahendajad otsisid sobilikke funktsioone teatud klassidest, näiteks polünoomidest, ent selline lahendamise meetod ei garanteeri, et kõik võimalikud funktsioonid leitakse, ning seetõttu juhtude läbivaatuse eest punkte ei antud.

5. *(Oleg Košik)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud kolmnurkade ABC ja HPQ sarnasus: 2 p
- Tõestatud HO_1 ja BC paralleelsus: 2 p
- Tõestus lõpule viidud: 3 p

Koordinaatidega lahenduse eest on võimalik saada punkte vaid siis, kui on selge, et lahendust on võimalik mõistliku vaevaga lõpule viia.

6. *(Härmel Nestra)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antavad punktid summeeriti.

- Tõestatud, et nulliga mitte lõppeva mitmekohalise särava arvu särav tegur saadakse esimese või teise numbri väljajätmisel: 2 p
- Tõestatud, et pole nulliga mitte lõppevaid viiekohalisi säravaid arve, mille särav tegur saadaks esimese numbri väljajätmisel: 1 p

- Tõestatud, et ainus nulliga mitte lõppev viiekohaline särav arv, mille särav tegur saadakse teise numbri väljajätmisel, on 14625: 2 p
- Lahendus lõpule viidud: 2 p

  Sealhulgas tüüpiliste osaliste mõttekäikude eest:

  - Põhjendatud, et kui $10n$ on särav, siis n on särav: *1 p*
  - Põhjendatud, et kui särava arvu särav tegur jagub 9-ga, siis saadakse ta 0 või 9 väljajätmisel: *1 p*

Ainult üks võistleja oli leidnud õige arvu. Populaarsemad pakkumised olid 91250, 31250 ja 8910.