Täiendav valikvõistlus 2018

Võistluskomplekti valmimisse panustasid:

Joonas Jürgen Kisel
Oleg Košik
Aleksei Lissitsin
Härmel Nestra
Heiki Niglas
Ago-Erik Riet
Sandra Schumann

IMO'18 Eesti võistkonna valikvõistlus

19.–20. mai 2018 **Teine voor. Esimene päev**

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.
Palun vormista erinevate ülesannete lahendused eraldi lehtedele!

1. Olgu AD teravnurkse kolmnurga ABC kõrgus. Sirgel AD valitakse erinevad punktid E ja F nii, et $|DE| = |DF|$ ja punkt E on kolmnurga ABC sisepiirkonnas. Kolmnurga BEF ümberringjoon lõikab lõike BC ja BA teist korda vastavalt punktides K ja M. Kolmnurga CEF ümberringjoon lõikab lõike CB ja CA teist korda vastavalt punktides L ja N. Tõesta, et sirged AD, KM ja LN lõikuvad ühes punktis.

2. Leia kõik täisarvud $k \geqslant 5$, mille korral leidub positiivne täisarv n, millel on kokku täpselt k positiivset tegurit $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$ ja mis rahuldavad tingimust $d_2d_3 + d_3d_5 + d_5d_2 = n$.

3. Olgu m ja n positiivsed täisarvud. Mängijal A on laud mõõtmetega $m \times n$, mängijal B aga laud mõõtmetega $1 \times n$ (vasakpoolne mõõde tähistab ridade arvu). Avakäigul paneb kumbki mängija meelevaldselt igale oma laua ruudule kas valge või musta nupu. Igal järgneval käigul võib kumbki mängija muuta oma laual vabalt valitud nuppude värvi vastupidiseks, kuid üheski reas ei tohi samal käigul muuta rohkem kui ühe nupu värvi (on lubatud ka mitte ühegi nupu värvi muuta). Käike tehakse kordamööda, alustab A. Mängija A võidab, kui tekib seis, milles mängija B laua ainsal real on nuppude värvid vasakult paremale samasugused kui mängija A laua mõnes reas. Tõesta, et mängijal A on võimalik võita B suvalise vastumängu korral parajasti siis, kui $n < 2m$.

IMO'18 Eesti võistkonna valikvõistlus

19.–20. mai 2018 **Teine voor. Teine päev**

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.
Palun vormista erinevate ülesannete lahendused eraldi lehtedele!

4. Positiivsete reaalarvude jada $a_1, a_2, a_3, \ldots$ rahuldab iga $n \geqslant 3$ korral tingimust $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Jada $b_1, b_2, b_3, \ldots$ on defineeritud seostega

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1, \\ b_n &= a_n + (b_1 + b_3 + \ldots + b_{n-1}) \quad \text{iga paaris } n > 1 \text{ korral,} \\ b_n &= a_n + (b_2 + b_4 + \ldots + b_{n-1}) \quad \text{iga paaritu } n > 1 \text{ korral.} \end{aligned}$$

Tõesta, et iga $n \geqslant 3$ korral $\frac{1}{3} < \frac{b_n}{n \cdot a_n} < 1$.

5. Olgu k positiivne täisarv. Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille korral on võimalik kolmnurga külgedel märkida kokku n kolmnurga tippudest erinevat punkti ja ühendada mõned märgitud punktid omavahel sirglõiguga nii, et kehtivad järgmised tingimused.

1) Igal küljel on märgitud vähemalt 1 punkt.

2) Iga kahe erinevatel külgedel märgitud punkti X ja Y jaoks leidub kolmandal küljel täpselt k märgitud punkti, mis on ühendatud nii punktiga X kui ka punktiga Y, ja täpselt k märgitud punkti, mis pole ühendatud ei punktiga X ega punktiga Y.

6. Nimetame polünoomi $P(x)$ *lihtsaks*, kui tema iga liikme kordaja kuulub hulka $\{-1, 0, 1\}$.

Olgu n positiivne täisarv, $n > 1$. Leia vähim võimalik nullist erineva kordajaga liikmete arv lihtsas n-nda astme polünoomis, mille kõik väärtused täisarvulistel kohtadel jaguvad arvuga n.

Отборочный конкурс на ММО'18

19–20 мая 2018 г. **Второй тур. Первый день**

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.
Пожалуйста, оформляйте решения разных заданий на отдельных листках!

1. Пусть AD – высота остроугольного треугольника ABC. На прямой AD выбираются различные точки E и F так, что $|DE| = |DF|$, а точка E находится внутри треугольника ABC. Окружность, описанная вокруг треугольника BEF, пересекает отрезки BC и BA второй раз соответственно в точках K и M. Окружность, описанная вокруг треугольника CEF, пересекает отрезки CB и CA второй раз соответственно в точках L и N. Доказать, что прямые AD, KM и LN пересекаются в одной точке.

2. Найти все целые числа $k \geqslant 5$, при которых найдётся целое положительное число n, у которого всего ровно k положительных делителей $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$, причём $d_2d_3 + d_3d_5 + d_5d_2 = n$.

3. Пусть m и n целые положительные числа. У игрока A поле размером $m \times n$, а у игрока B поле размером $1 \times n$ (первым указано число рядов). Первым ходом каждый из игроков ставит на каждую клетку своего поля белую или чёрную фишку так, как ему вздумается. На каждом следующем ходу каждый игрок может поменять цвет произвольно выбранных фишек на своём поле на противоположный при условии, что ни в одном ряду за данный ход не поменяется более одной фишки (разрешено и не менять ни одной фишки). Ходы делаются по очереди, начинает игрок A. Игрок A выигрывает, если возникает такое положение, что в единственном ряду поля игрока B цвета фишек слева направо такие же, как и в некотором ряду поля игрока A. Доказать, что игрок A имеет возможность выиграть при любой игре игрока B тогда и только тогда, когда $n < 2m$.

Отборочный конкурс на ММО'18

19–20 мая 2018 г. **Второй тур. Второй день**

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.
Пожалуйста, оформляйте решения разных заданий на отдельных листках!

4. Последовательность действительных положительных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ при каждом $n \geqslant 3$ удовлетворяет условию $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Последовательность $b_1, b_2, b_3, \ldots$ определена зависимостями

$$\begin{aligned} &b_1 = a_1, \\ &b_n = a_n + (b_1 + b_3 + \ldots + b_{n-1}) \quad \text{при чётном } n > 1, \\ &b_n = a_n + (b_2 + b_4 + \ldots + b_{n-1}) \quad \text{при нечётном } n > 1. \end{aligned}$$

Доказать, что при каждом $n \geqslant 3$ имеет место $\dfrac{1}{3} < \dfrac{b_n}{n \cdot a_n} < 1$.

5. Пусть k положительное целое число. Найти все положительные целые числа n, для которых на сторонах треугольника возможно отметить всего n различных точек, отличных от вершин треугольника, и соединить некоторые из них между собой отрезками таким образом, что

1) На каждой стороне отмечена по крайней мере 1 точка.
2) Для любых двух отмеченных на разных сторонах точек X и Y на третьей стороне найдутся ровно k отмеченных точек, которые соединены как с точкой X, так и с точкой Y, а также ровно k отмеченных точек, которые не соединены ни с точкой X, ни с точкой Y.

6. Назовём многочлен $P(x)$ *простым*, если коэффициент при каждом его члене принадлежит множеству $\{-1, 0, 1\}$.

Пусть n целое число, $n > 1$. Найти наименьшее возможное число членов с отличным от нуля коэффициентом в простом многочлене n-ой степени, у которого все значения в целочисленных точках делятся на n.

Lahendused

1. *Lahendus 1.* Et $AD \perp BC$, on BC kolmnurgak BEF keskristsirge (joonis 1). Järelikult asub kolmnurga BEF ümberringjoone keskpunkt sirgel BC, mistõttu BK on kolmnurga BEF ümberringjoone diameeter. Seega $\angle BMK = 90^\circ$. Analoogiliselt saame $\angle CNL = 90^\circ$.

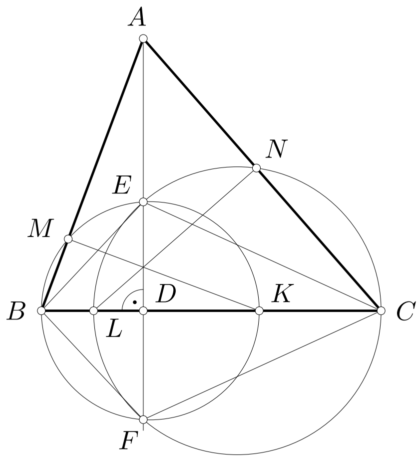
Olgu X ja Y vastavalt sirgete KM ja LN lõikepunktid sirgega AD. Täisnurksetel kolmnurkadel AXM ja ABD on ühine teravnurk tipu A juures, mistõttu nad on sarnased. Seega $\frac{|AX|}{|AB|} = \frac{|AM|}{|AD|}$ ehk $|AX| = \frac{|AM| \cdot |AB|}{|AD|}$. Kolmnurkadest AYN ja ACD saame analoogselt $|AY| = \frac{|AN| \cdot |AC|}{|AD|}$.

Nelinurgad $BMEF$ ja $CNEF$ on kõõlnelinurgad, seega potentsivõrdustest

$$|AM| \cdot |AB| = |AE| \cdot |AF| = |AN| \cdot |AC|.$$

Kokkuvõttes $|AX| = |AY|$, kust $X = Y$ ehk sirged KM, LN ja AD lõikuvad ühes punktis.

Lahendus 2. Olgu kolmnurga BEF ümberringjoon c_1 ja kolmnurga CEF ümberringjoon c_2.



Joonis 1

Nagu lahenduses 1 näitame, et $\angle BMK = \angle CNL = 90^\circ$. Potentsivõrdustest saame

$$|AM| \cdot |AB| = |AE| \cdot |AF| = |AN| \cdot |AC|,$$

millest tulenevalt on $BMNC$ kõõlnelinurk. Nüüd

$$\angle KMN = 180^\circ - \angle NCB - \angle BMK = 90^\circ - \angle NCB = \angle CLN = \angle KLN,$$

mistõttu ka $KLMN$ on kõõlnelinurk; olgu selle ümberringjoon c_3.

Paneme tähele, et AD on ringjoonte c_1 ja c_2 radikaaltelg, KM on ringjoonte c_1 ja c_3 radikaaltelg ning LN on ringjoonte c_2 ja c_3 radikaaltelg. Kolme ringjoone radikaalteljed aga lõikuvad ühes punktis.

2. *Vastus:* 8, 9.

Paneme tähele, et iga $i = 1, \ldots, k$ korral $d_{k+1-i} = \dfrac{n}{d_i}$. Seega kui $k = 5$, siis $d_5 = d_1 d_5 = n$, kui $k = 6$, siis $d_2 d_5 = n$, ja kui $k = 7$, siis $d_3 d_5 = n$. Sellistel juhtudel $d_2 d_3 + d_3 d_5 + d_5 d_2 > n$ ja nõutud võrdus kehtida ei saa. Järelikult $k \geqslant 8$.

Juhul $k = 8$ sobib $n = 135 = 3^3 \cdot 5$, mille tegurid on $1, 3, 5, 9, 15, 27, 45, 135$, sest $3 \cdot 5 + 5 \cdot 15 + 15 \cdot 3 = 135$. Juhul $k = 9$ sobib $n = 36 = 2^2 \cdot 3^2$, mille tegurid on $1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$, sest $2 \cdot 3 + 3 \cdot 6 + 6 \cdot 2 = 36$.

Oletame, et $k \geqslant 10$. Et arvude d_2 ja d_3 kõik tegurid on ühtlasi ka arvu n tegurid, saab arv d_2 jaguda ainult arvudega 1 ja d_2 ning arv d_3 jaguda ainult arvudega 1, d_2 ja d_3. Seega d_2 on algarv. Kui $d_2 \nmid d_3$, siis ka d_3 on algarv, mistõttu korrutise $d_2 d_3$ ainsad temast väiksemad tegurid on 1, d_2 ja d_3. Kui $d_2 \mid d_3$, siis $d_3 = d_2^2$ ja jällegi on korrutise $d_2 d_3$ ainsad temast väiksemad tegurid 1, d_2 ja d_3. Kuna aga $d_5 \mid d_3 d_5$, $d_5 \mid d_5 d_2$ ja $d_5 \mid n$, järeldub võrdusest $d_2 d_3 + d_3 d_5 + d_5 d_2 = n$, et $d_5 \mid d_2 d_3$. Et $d_5 > d_3 > d_2 > 1$, saame kokkuvõttes $d_5 = d_2 d_3$.

Seega $n = d_2 d_3 + d_3 d_5 + d_5 d_2 = d_5 + d_3 d_5 + d_5 d_2 = d_5(1 + d_2 + d_3)$, millest tulenevalt $1 + d_2 + d_3 = d_{k-4} \geqslant d_6 > d_5 = d_2 d_3$. Võrratus $1 + d_2 + d_3 > d_2 d_3$ on samaväärne võrratusega $2 > (d_2 - 1)(d_3 - 1)$, mis pole võimalik, sest $d_2 - 1 \geqslant 1$ ja $d_3 - 1 \geqslant 2$. Vastuolu näitab, et rohkem tingimustele vastavaid positiivseid täisarve k ei leidu.

3. *Lahendus 1.* Fikseeritud seisus defineerime iga $i = 1, \ldots, m$ jaoks d_i kui värvierinevuste arvu mängija A i-nda rea ja mängija B rea vahel; vastavalt reeglitele A võidab, kui mingi i korral $d_i = 0$.

Olgu kõigepealt $n \geqslant 2m$. Avakäigul saab B valida nuppude värvid nii, et $d_i \geqslant 2$ iga i korral, näiteks valides kaks esimest nuppu erinevad A laua esimese rea vastavatest nuppudest, kaks järgmist nuppu erinevad A laua teise rea vastavatest nuppudest jne kuni nupud järjekorranumbriga $2n - 1$ ja $2n$

erinevad A laua viimase rea vastavatest nuppudest, ülejäänud nupud aga valida suvaliselt. Järgnevalt olgu B strateegiaks mitte jätta A lauale selliseid ridu i, mille korral $d_i \leqslant 1$. On selge, et kui B selline strateegia on võimalik, siis A ei võida kunagi, sest igal käigul on võimalik iga väärtust d_i vähendada ülimalt 1 võrra. Et veenduda kirjeldatud strateegia võimalikkuses, vaatleme suvalist seisu, kus B on käigul. Olgu a ja b nende ridade i arv, mille korral vastavalt $d_i = 1$ või $d_i = 2$; siis veerge, kus asuvad selliste ridade erinevused mängija B lauast, on ülimalt $a + 2b$. Kui $a = 0$, siis võib B lihtsalt passida. Kui $a \geqslant 1$, siis $a + 2b \leqslant a + 2(m - a) = 2m - a \leqslant 2m - 1 < 2m \leqslant n$. Mängija B saab seega valida veeru, mille nupud kõigis vaadeldavates ridades on sama värvi nagu mängija A vastav nupp, ja muuta seal oma nupu värvi. Sellega suureneb d_i iga i jaoks, kus $d_i \leqslant 2$, ja teistes ridades ei vähene d_i alla 2.

Olgu nüüd $n < 2m$. Olgu iga veeru $j = 1, \ldots, n$ korral c_j nende ridade arv, milles veeru j nupp A laual on erinev B vastavast nupust. Nimetame seisu c-skooriks summat $\sum_j |c_j - 1|$ ja d-skooriks summat $\sum_i |d_i - 2|$.

Näitame, et A saab oma käigu järgset c-skoori iga käiguga vähendada, kuni see jõuab nullini. Selleks oletame, et B muudab positiivse c-skooriga seisus nupu värvi veerus j. Kui B käigu eel $c_j \neq 1$, siis saab A muuta veerus j nuppude värve nii, et A käigu järel $c_j = 1$. Sellega on c-skoor vähenenud. Vaatame juhtu, kus B käigu eel $c_j = 1$. Et c-skoor B käigu eel on positiivne, leidub veerg j', mille korral $c_{j'} \neq 1$. Kui $c_{j'} = 0$, siis võib A muuta veeru j nuppude värve $m - 2$ reas nii, et A käigu järel $c_j = 1$, ja lisaks vahetada ülejäänud kahest reast ühes veeru j' nupu värvi nii, et ka $c_{j'} = 1$. Sellega c-skoor väheneb. Kui aga $c_{j'} > 1$, siis leidub rida i, mille nupud veergudes j ja j' on pärast B viimast käiku mõlemad B vastavatest nuppudest erinevad. Mängija A võib muuta reas i veeru j' nupu värvi ning $m-2$ ülejäänud reas veeru j nupu värvi nii, et A käigu järel $c_j = 1$. Sellega on jällegi c-skoor vähenenud, sest $c_{j'}$ on vähenenud. Kui B ei muuda positiivse c-skooriga seisus ühegi nupu värvi, siis valib A veeru j, milles $c_j \neq 1$, ja muudab selles nuppude värve nii, et A käigu järel $c_j = 1$.

Näitame, et edasi saab A igal käigul kas võita või oma käigu järgset d-skoori vähendada, hoides samas c-skoori nullis. Et takistada A võitu järgmisel käigul, peab B muutma oma käigul värvi sellises veerus j, mille korral A laua see rida i, milles paikneb veeru j ainus B nupust erinevat värvi nupp, rahuldab enne B käiku tingimust $d_i \geqslant 3$. Kuna c-skoor enne B käiku on 0 ja A pole veel võitnud, peab leiduma ka selline rida i', mille korral enne B käiku $d_{i'} = 1$. Tõepoolest, oletades väitevastaselt, et iga rea i' korral $d_{i'} \geqslant 2$, saaksime $n < 2m$ tõttu Dirichlet' printsiibist, et mingis veerus on kahe rea nupp B vastavast nupust erinev, kuid see on vastuolus eeldusega, et c-skoor on 0. Mängija A saab muuta veeru j nuppude värve kõigis ridades peale i ja i'. Sellega jääb c-skoor nulli, samas kui d-skoor väheneb, sest ainsad liidetavad d-skooris, mille väärtus muutub, vastavad ridadele i ja i' ning mõlemad liidetavad vähenevad.

Et d-skoor ei saa väheneda lõputult, peab A selliselt mängides lõpuks võitma.

Lahendus 2. Defineerime suurused d_i nagu lahenduses 1 ja tähistame $s = \sum_i d_i$. Olgu veel suurus t antud kui nende A laua veergude arv, mille kõik nupud on B vastava nupuga sama värvi.

Tõestame kõigepealt, et kui A käigu eel $s \geqslant m+n$, siis saab A mängida nii, et pärast lõplikku arvu käike on A käigu eelne s väiksem. Kasutagu A järgmist strateegiat: kui igas reas saab valida ühe vastavast B nupust erinevat värvi nupu nii, et kõigi valitud nuppude värvide muutmisel t ei suurene, siis vahetada selliselt valitud nuppude värvid; kui niimoodi pole nuppe võimalik valida, siis vahetada suvaliselt igas reas vastavast B nupust erinevat värvi nupu värv. Kuna A iga käiguga s väheneb m võrra ja B saab oma käigul suurendada väärtust s ülimalt m võrra, siis A käigu eelne s sellise mängu käigus ei suurene. Olukord, kus A käigu eelne s ka ei vähene, on võimalik vaid juhul, kui B käiguga suureneb d_i iga i jaoks, mis omakorda on võimalik vaid juhul, kui B muudab sellise nupu värvi, millele vastavas veerus on kõik A nupud sama värvi. Sellisel käigul tekib A laual veerg, mille kõik nupud on B vastavast nupust erinevat värvi, ja suurus t väheneb. Ülejäänud $n-1$ veerus on kokku $s-m$ erinevust vastavast B nupust. Et $s \geqslant m+n$, siis on neis $n-1$ veerus vähemalt n erinevust. Dirichlet' printsiibi põhjal leidub nende $n-1$ veeru hulgas selline, mille vähemalt kaks nuppu on vastavast B nupust erinevat värvi. Mängija A saab vahetada värvi ühel nupul neist kahest, kõigis ülejäänud ridades aga vahetada värvi selle veeru nupul, mille värvi vahetas B. Selle käiguga t ei suurene. Kuna t ei saa lõpmatuseni väheneda, on B varem või hiljem sunnitud tegema käigu, millega A käigu eelne s väheneb.

Eeldame, et $n < 2m$. Eelneva põhjal saab A mängida nii, et tema käigu eelne s väheneb, kuni muutub väiksemaks suurusest $m+n$. Kui seejärel oleks iga i korral $d_i \geqslant 3$, oleks $s \geqslant 3m > m+n$, vastuolu. Seega leidub rida i, milles ülimalt kahe nupu värvid erinevad B vastavate nuppude värvidest.

Näitame nüüd induktsiooniga m järgi, et kui $n < 2m$, siis A võidab. Kui $m = 1$, siis ainus võimalus on $n = 1$ ja A saab võita kohe, kui B oma nupu on ära paigutanud. Eeldame nüüd, et $m-1$ rea puhul A võidab, ja vaatleme olukorda, kus A laual on m rida. Eelneva põhjal saab A tekitada seisu, kus mingi rea i puhul $d_i \leqslant 2$. Kui $d_i = 1$, siis A saab kohe võita, seetõttu oletame, et $d_i = 2$. Eeldame üldisust kitsendamata, et $i = m$ ja kaks nuppu, mis on B vastavatest nuppudest erinevat värvi, asuvad veergudes $n-1$ ja n. Järgnevalt toimib A oma laua reas m järgnevalt: kui B teeb käigu mujale kui veergudesse $n-1$ ja n, siis kopeerib A tema käiku oma reas m, jättes kehtima võrduse $d_m = 2$, kui aga B muudab värvi ruudul $n-1$ või n, siis võidab A kohe, vahetades veergudest $n-1$ ja n teises oma nupu värvi real m. Kuna B ei tohi nuppude $n-1$ ja n värvi muuta, saab A ülimalt kahe käiguga oma ridade 1 kuni $m-1$ nupud veergudes $n-1$ ja n muuta samavärviliseks B vastavate nuppudega. Seejärel on veerud $n-1$ ja n ning rida m „mängust väljas“ ja A võidab, kasutades ülejäänud $(m-1)\times(n-2)$ laual oma võidustrateegiat, mis induktsiooni eelduse põhjal leidub.

Juhtu $n \geqslant 2m$ käsitleme nagu lahenduses 1.

Lahendus 3. Vaatleme juhtu $n < 2m$. Näitame, et mängijal A on võimalik saavutada olukord, kus tema mingi rea ülimalt 2 nupu värvid erinevad B vastavate nuppude värvidest. Selleks nimetame *ebaolulisteks* A laua 1. rea kaht esimest nuppu, 2. rea kaht järgmist nuppu jne, ning kõiki ülejäänud nuppe *olulisteks*. Et $n < 2m$, leidub igas veerus ebaoluline nupp, mistõttu saab B käik muuta ülimalt $m-1$ olulise nupu värvid erinevaks B vastava nupu värvist. Seni, kuni igas reas leidub B vastavast nupust erinevat värvi olulisi nuppe, saab aga A oma käigul muuta m olulise nupu värvid samasuguseks B vastava nupu värviga. Seega on mängijal A võimalik B vastavast nupust erinevat värvi oluliste nuppude arvu vähendada, kuni tekib olukord, kus vähemalt ühes reas on kõik olulised nupud vastava B nupuga ühte värvi. Selles reas saavad aga ülimalt 2 nupu värvid erineda B vastavate nuppude värvidest.

Edasi näitame induktsiooniga m järgi nagu lahenduses 2, et A võidab juhul $n < 2m$. Juhu $n \geqslant 2m$ käsitleme nagu lahenduses 1.

Lahendused

4. Jada (b_n) definitsioonist nähtub, et $b_n - b_{n-2} = a_n - a_{n-2} + b_{n-1}$ iga $n \geqslant 3$ korral. Et $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, siis $b_n - b_{n-2} = a_{n-1} + b_{n-1}$ ehk

$$b_n = a_{n-1} + b_{n-1} + b_{n-2}.$$

Märkame, et vasakpoolne nõutud võrratus $\frac{1}{3} < \frac{b_n}{n \cdot a_n}$ kehtib $n = 2$ ja $n = 3$ korral, sest

$$\begin{aligned}
\frac{b_2}{2a_2} &= \frac{a_2 + b_1}{2a_2} = \frac{a_1 + a_2}{2a_2} > \frac{a_2}{2a_2} = \frac{1}{2} > \frac{1}{3}, \\
\frac{b_3}{3a_3} &= \frac{a_3 + b_2}{3a_3} = \frac{2(a_1 + a_2)}{3(a_1 + a_2)} = \frac{2}{3} > \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Olgu nüüd $n \geqslant 4$ suvaline ja eeldame, et see võrratus kehtib $n - 1$ ja $n - 2$ korral; siis

$$\begin{aligned}
b_n &= a_{n-1} + b_{n-1} + b_{n-2} \\
&> a_{n-1} + \frac{1}{3}(n-1)a_{n-1} + \frac{1}{3}(n-2)a_{n-2} \\
&= \frac{1}{3}n(a_{n-1} + a_{n-2}) + \frac{2}{3}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\
&> \frac{1}{3}na_n,
\end{aligned}$$

kus viimane võrratus tuleneb sellest, et $a_{n-1} = a_{n-2} + a_{n-3} > a_{n-2}$. Induktsiooniga saame $b_n > \frac{1}{3}na_n$ iga $n \geqslant 2$ korral.

Edasi märkame, et parempoolne nõutud võrratus $\frac{b_n}{n \cdot a_n} < 1$ kehtib $n = 3$ ja $n = 4$ korral, sest $\frac{b_3}{3a_3} = \frac{2}{3} < 1$ ja

$$\frac{b_4}{4a_4} = \frac{a_4 + b_3 + b_1}{4a_4} = \frac{a_4 + a_3 + a_2 + a_1}{4a_4} < 1.$$

Olgu $n \geqslant 5$ suvaline ja eeldame tõestatava võrratuse kehtivust $n-1$ ja $n-2$ korral; siis

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n-1} + b_{n-1} + b_{n-2} \\ &< a_{n-1} + (n-1)a_{n-1} + (n-2)a_{n-2} \\ &= n(a_{n-1} + a_{n-2}) - 2a_{n-2} \\ &< na_n. \end{aligned}$$

Induktsiooniga saame võrratuse $b_n < na_n$ iga $n \geqslant 3$ korral.

5. *Vastus:* $12k$.

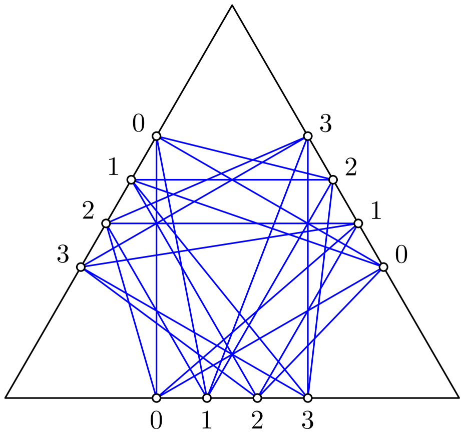
Olgu märgitud punktide hulgad kolmnurga erinevatel külgedel vastavalt A, B ja C ning olgu neis hulkades vastavalt a, b ja c punkti.

Loendame kõik sellised punktikolmikud (p, q, r), kus $p \in A$, $q \in B$ ja $r \in C$ ning kas nad on kõik omavahel ühendatud või pole ükski kaks neist ühendatud. Iga $p \in A$, $q \in B$ jaoks leidub täpselt k punkti $r \in C$, mille korral see tingimus kehtib: kui p ja q on ühendatud, siis sobivad need k punkti, mis on ühendatud mõlemaga, ja kui p ja q pole ühendatud, siis need k punkti, mis pole ühendatud kummagagi. Seega on niisuguseid kolmikuid kab. Samamoodi iga $q \in B$, $r \in C$ jaoks arutledes leiame, et nende kolmikute arv on kbc, ja iga $r \in C$, $p \in A$ jaoks arutledes, et nende kolmikute arv on kca. Seega $ab = bc = ca$, kust $a = b = c = \dfrac{n}{3}$.

Loendame nüüd kõik ülejäänud punktikolmikud (p, q, r), kus $p \in A$, $q \in B$ ja $r \in C$. Sarnaselt eelmise lõigu arutlusega näeme, et iga $p \in A$, $q \in B$ jaoks leidub täpselt k punkti $r \in C$, mille korral r pole kummagagi neist ühendatud, kui p ja q on omavahel ühendatud, ja r on ühendatud mõlemaga, kui p ja q pole omavahel ühendatud. Selliseid kolmikuid (p, q, r) on kokku kab ehk $k\left(\dfrac{n}{3}\right)^2$. Analoogselt leiame, et kolmikuid (p, q, r), kus p pole ühendatud q-ga ega r-ga, kui q ja r on omavahel ühendatud, ja p on ühendatud q-ga ja r-ga, kui q ja r pole omavahel ühendatud, on $k\left(\dfrac{n}{3}\right)^2$. Samuti saame, et kolmikuid (p, q, r), kus q pole ühendatud r-ga ega p-ga, kui r ja p on omavahel ühendatud, ja q on ühendatud r-ga ja p-ga, kui r ja p pole omavahel ühendatud, on $k\left(\dfrac{n}{3}\right)^2$. Sellega on kõik soovitud punktikolmikud loendatud.

Kokku on seega $4k\left(\dfrac{n}{3}\right)^2$ kolmikut (p, q, r), kus $p \in A$, $q \in B$ ja $r \in C$. Teisalt aga on nende kolmikute arv ilmselt $\left(\dfrac{n}{3}\right)^3$. Võrdusest $4k\left(\dfrac{n}{3}\right)^2 = \left(\dfrac{n}{3}\right)^3$ saame $n = 12k$.

Jääb näidata, et kolmnurga igal küljel on võimalik märkida $4k$ punkti nii, et ülesande tingimused on täidetud. Vaatame algul juhtu $k = 1$. Olgu kolmnurga küljed nummerdatud arvudega 0, 1, 2 ning märgitud punktid igal



Joonis 2

küljel arvudega 0, 1, 2, 3. Iga $i = 0, 1, 2$ korral ühendame külje nr i paarisnumbriga punktid külje nr $(i+1) \mod 3$ punktidega nr 0 ja 1 ning külje nr i paaritu numbriga punktid külje $(i+1) \mod 3$ punktidega nr 2 ja 3 (joonis 2). Siis leidub iga kahe erinevatel külgedel märgitud punkti jaoks kolmandal küljel täpselt üks märgitud punkt, mis on mõlemaga ühendatud, ja täpselt üks märgitud punkt, mis pole ühendatud kummagagi. Juhul $k > 1$ asendame kirjeldatud näites iga punkti k erineva punktiga ja ühendame parajasti need punktid, mis on tekkinud kirjeldatud näites omavahel ühendatud punktidest.

6. *Vastus:* 2.

Ühest nullist erinevast kordajast ei piisa ühegi $n > 1$ korral, sest sellised lihtsad polünoomid on kõik kujul $P(x) = x^n$ ja $P(x) = -x^n$, millest kumbki ei jagu arvuga n näiteks kohal 1.

Näitame, et polünoom $P_n(x) = x^n - x^{n-\varphi(n)}$ jagub igal täisarvulisel kohal arvuga n, kus φ on Euleri funktsioon, st $\varphi(n)$ on selliste arvuga n ühistegurita positiivsete täisarvude arv, mis pole arvust n suuremad. Sellest järeldub, et piisab 2 nullist erineva kordajaga liikmest.

Olgu k suvaline täisarv. Olgu $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m}$ kanooniline esitus ja eeldame üldisust kitsendmata, et k jagub algarvudega $p_1, \ldots, p_l$ ning ei jagu algarvudega $p_{l+1}, \ldots, p_m$. Defineerime $u = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_l^{\alpha_l}$ ja $v = p_{l+1}^{\alpha_{l+1}} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m}$. Näitame, et $u \mid k^{n-\varphi(n)}$ ja $v \mid k^{\varphi(n)} - 1$; kuna $uv = n$, siis järeldub sellest vajalik väide $n \mid P_n(k)$, sest $P_n(k) = k^n - k^{n-\varphi(n)} = k^{n-\varphi(n)}(k^{\varphi(n)} - 1)$.

Et tõestada väidet $u \mid k^{n-\varphi(n)}$, piisab suvalise $i = 1, \ldots, l$ jaoks näidata, et $p_i^{\alpha_i} \mid k^{n-\varphi(n)}$. Selle jaguvuse jaoks piisab näidata, et $\alpha_i \leqslant n - \varphi(n)$, sest eelduse kohaselt $p_i \mid k$. Võrratus $\alpha_i \leqslant n - \varphi(n)$ aga kehtib, sest $p_i, p_i^2, \ldots, p_i^{\alpha_i}$

on α_i positiivset täisarvu, mis pole arvust n suuremad ega arvuga n ühistegurita.

Et tõestada väidet $v \mid k^{\varphi(n)} - 1$, paneme tähele, et Euleri teoreemi kohaselt $v \mid k^{\varphi(v)} - 1$, sest k ja v on ühistegurita. Et ka u ja v on ühistegurita, siis $\varphi(n) = \varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v)$, mistõttu $k^{\varphi(v)} - 1 \mid k^{\varphi(n)} - 1$. Kokkuvõttes tõepoolest $v \mid k^{\varphi(n)} - 1$.

Hindamisskeemid

1. *(Sandra Schumann)*

Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud, et $\angle BMK = \angle CNL = 90^\circ$: 2 p
- Jõutud võrduseni $|AM| \cdot |AB| = |AN| \cdot |AC|$ või võrdusteni $|EX| \cdot |XF| = |AX| \cdot |XD|$ ja $|EY| \cdot |YF| = |AY| \cdot |YD|$: 3 p
- Lahendus lõpule viidud: 2 p

Koordinaatidega lahenduste eest anti punkte vaid juhul, kui lahendus oli täielik või osalisi punkte juhul, kui vahetulemustel olid geomeetrilised tähendused, mis olid ekvivalentsed mõne žürii lahenduses punkte andva osaga.

Ülesanne oli üldiselt lahendatud hästi, nagu teisele valikvõistlusele jõudnud võistlejatest oodatagi võib.

2. *(Oleg Košik)*

Tüüpilisi lahendusi hinnati kahe järgneva skeemi järgi. Kummagi skeemi puhul lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

Lahendused, mis kasutasid seost $n = d_i d_{k+1-i}$.

- Leitud, et $d_5 \mid d_2 d_3$: 1 p
- Tõestatud seos $d_5 = d_2 d_3$ juhul, kui $d_3 = d_2^2$: 1 p
- Tõestatud seos $d_5 = d_2 d_3$ juhul, kui d_3 on algarv: 1 p
- Lahenduse lõpuleviimine: 4 p

  Sealhulgas:
  - Valemi $n = d_i d_{k+1-i}$ kasutamine: *1 p*
  - Näited $k = 8$ ja $k = 9$ jaoks: *1 p*

Lahendused, mis ei kasutanud seost $n = d_i d_{k+1-i}$.

- Leitud, et $d_5 \mid d_2 d_3$: 1 p
- Juht $d_3 = d_2^2$: 2 p
  - Tõestatud, et $d_5 = d_2^3$: *1 p*
  - Järeldatud, et d_4 on algarv ning leitud $k = 8$: *1 p*
- Juht, kus d_3 on algarv: 4 p
  - Tõestatud, et $d_5 = d_2 d_3$: *1 p*

- Käsitletud juht $d_2 = 2$ ning leitud $k = 9$: *1 p*
- Juhul $d_2 > 2$ tõestatud range võrratus $d_2 + d_3 + 1 < d_2 d_3$: *1 p*
- Õigesti käsitletud juht, kus $d_4 = d_2^2$, ja juht, kus d_4 on algarv: *1 p*

3. *(Urve Kangro)*

Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Juht $n \geqslant 2m$: 2 p
- Juht $n < 2m$: 5 p

Mõnedes töödes esines ebakorrektseid argumente nagu „kuna käike on lõpmatult, peab B varem või hiljem ka mingit konkreetset nuppu muutma“ või oli kahe silma vahele jäetud võimalus, et mingi poolinvariant igal sammul ei pruugi siiski väheneda vms.

Väikeste n ja m väärtuste läbivaatamise eest punkte ei antud.

Hindamisskeemid

4. *(Härmel Nestra)*

Žürii tüüpi lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Leitud seos $b_n = a_{n-1} + b_{n-1} + b_{n-2}$ või midagi ilmselgelt samaväärset: 2 p
- Viidud täielikult läbi induktsiooni baas mõlema võrratuse jaoks: 1 p
- Viidud läbi induktsiooni samm ühe võrratuse jaoks: 2 p
- Viidud läbi induktsiooni samm teise võrratuse jaoks: 2 p

Selle skeemi järgi sai tegelikult ainult täispunkte. Osalised lahendused kasutasid teistsugust lähenemist, kus algul leiti Fibonacci arvude kaudu valemid $a_n = F_{n-2}a_1 + F_{n-1}a_2$ ja $b_n = a_n + F_1 a_{n-1} + F_2 a_{n-2} + \ldots + F_{n-1}a_1$ ja hinnati nõutud võrratusi nende abil. Nende lahenduste järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Leitud vajalikud kaks valemit Fibonacci jada kaudu koos tõestustega: 4 p

  Sealhulgas:
  - Leitud rekurrentne võrdus $b_n = a_{n-1} + b_{n-1} + b_{n-2}$ või muu b_n valemi tõestust niisama oluliselt lihtsustav seos: *2 p*
- Tuletatud nende valemite kaudu vajalikud võrratused: 3 p

  Sealhulgas:
  - Piirjuhud õigesti läbi vaadatud: *1 p*

Ülesanne on peaaegu standardne induktsiooniharjutus. Selles valguses olid üllatavalt kesised tulemused.

5. *(Kaarel Hänni)*

Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et $n \neq 12k$ on võimatu: 5 p

  Sealhulgas:
  - Idee loendada täielikult ühendatud või täielikult ühendamata kolmikuid või kõiki ülejäänud kolmikuid: *2 p*
- Konstruktsioon $n = 12k$ jaoks: 2 p

  Sealhulgas:

- Konstruktsioon $k = 1$ jaoks: *1 p*

6. *(Joonas Jürgen Kisel)*

Hindamisskeem:

- Tõestatud, et vastus on suurem kui 1: 1 p
- Tõestatud, et vastus on 2 juhul $\text{SÜT}(x, n) = 1$: 2 p
- Tõestatud, et vastus on 2 juhul $\text{SÜT}(x, n) > 1$: 4 p

Ülesanne osutus ootamatult raskeks: täispunktid sai hindaja anda vaid ühele tööle. Peamisteks komistuskivideks osutusid reeglina viljatud meetodid (nt $P(-1)$, $P(0)$ ja $P(1)$ uurimine) ning ebakindlus suurima ühisteguri kasutamisel. Sageli oli ka tõestus, et vastus pole kunagi 1, puudulik. Kergete eksimuste eest võeti kuni 1 punkt maha.