Valikvõistlus 2017

Võistluskomplekti koostamisse panustasid:

Oleg Košik
Härmel Nestra
Heiki Niglas
Erik Paemurru
Reimo Palm
Sandra Schumann

IMO'17 Eesti võistkonna valikvõistlus

20.–21. aprill 2017 **Esimene päev**

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.
Palun vormista erinevate ülesannete lahendused eraldi lehtedele!

1. Kas leidub kaks naturaalarvu, mis mõlemad on arvu 5 positiivsed astmed ja mille järjestkirjutamisel saadav arv on samuti arvu 5 positiivne aste?

2. Leia vähim reaalarv C, millel on järgmine omadus: mis tahes positiivsete reaalarvude a_1, a_2, a_3, a_4 ja a_5 (mitte tingimata erinevate) puhul saab valida neli paarikaupa erinevat indeksit i, j, k, l nii, et kehtib võrratus

$$\left| \frac{a_i}{a_j} - \frac{a_k}{a_l} \right| \leqslant C.$$

3. Olgu ABC kolmnurk, kus $|AB| = |AC| \neq |BC|$, ja olgu I selle siseringjoone keskpunkt. Sirge BI lõikub küljega AC punktis D ja läbi punkti D tõmmatud küljega AC ristuv sirge lõikub sirgega AI punktis E. Tõesta, et punkti I peegeldus sirge AC suhtes asub kolmnurga BDE ümberringjoonel.

IMO'17 Eesti võistkonna valikvõistlus

20.–21. aprill 2017 **Teine päev**

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.
Palun vormista erinevate ülesannete lahendused eraldi lehtedele!

4. Võrdhaarse kolmnurga ABC tipunurgast on tõmmatud kõrgus AD. Haaral AB valitakse punkt F nii, et see ei ühti punktiga B ja sirge CF puutub kolmnurga ABD siseringjoont. Lisaks osutub, et kolmnurk BCF on võrdhaarne.

a) Tõesta, et nende tingimustega on üheselt määratud, millise nurga juures asub kolmnurga BCF tipunurk.

b) Tõesta, et nende tingimustega on samuti üheselt määratud kolmnurga ABC tipunurga suurus, st leidub vaid üks väärtus α, mis sobib ABC tipunurga suuruseks (α enda täpset väärtust leida ei ole vaja).

5. Ühe IMO võistkonna juht valib positiivsed täisarvud n ja k, kusjuures $n > k$, ning teatab need võistkonna asejuhile ja ühele võistlejale. Seejärel teatab juht asejuhile salaja ühe n-kohalise kahendarvu (nullide ja ühtede järjendi) ning asejuht kirjutab paberile kõik n-kohalised kahendarvud, mis erinevad juhi arvust täpselt k kahendkoha poolest. (Näiteks kui $n = 3$ ja $k = 1$ ning juhi valitud kahendarv on 101, siis kirjutaks asejuht paberile arvud 001, 111 ja 100.) Võistlejal on lubatud vaadata asejuhi kirjutatut. Võistleja proovib ära arvata juhi valitud arvu. Milline on vähim arv pakkumisi, millega on garanteeritud, et võistleja arvab vähemalt ühel korral õigesti? Vastus võib sisaldada arve n ja k.

6. Tähistame sümboliga $\mathbb{R}^+$ kõigi positiivsete reaalarvude hulka. Leia kõik funktsioonid $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, mis kõigi positiivsete reaalarvude x ja y puhul rahuldavad võrdust

$$xf(x^2)f(f(y)) + f(yf(x)) = f(xy)(f(f(x^2)) + f(f(y^2))).$$

Отборочный конкурс на ММО'17

20–21 апреля 2017 г. **Первый день**

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.
Пожалуйста, оформляйте решения разных заданий на отдельных листках!

1. Найдутся ли два натуральных числа, оба являющихся положительными степенями числа 5, при написании которых подряд друг за другом получим число, также являющееся положительной степенью числа 5?

2. Найти наименьшее действительное число C, обладающее следующим свойством: при любых положительных действительных числах a_1, a_2, a_3, a_4 и a_5 (не обязательно различных) можно выбрать четыре попарно различных индекса i, j, k, l так, что выполняется неравенство

$$\left|\frac{a_i}{a_j} - \frac{a_k}{a_l}\right| \leqslant C.$$

3. Пусть ABC — треугольник, в котором $|AB| = |AC| \neq |BC|$, и пусть I — центр её вписанной окружности. Прямая BI пересекается со стороной AC в точке D, а прямая через точку D, перпендикулярная стороне AC, пересекает прямую AI в точке E. Доказать, что зеркальное отражение точки I относительно прямой AC лежит на описанной окружности треугольника BDE.

Отборочный конкурс на ММО’17

20–21 апреля 2017 г. **Второй день**

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.
Пожалуйста, оформляйте решения разных заданий на отдельных листках!

4. На основание равнобедренного треугольника ABC проведена высота AD. На боковой стороне AB выбирается точка F так, что она не совпадает с точкой B, а прямая CF касается окружности, вписанной в треугольник ABD. К тому же оказывается, что треугольник BCF равнобедренный.

а) Доказать, что эти условия однозначно определяют, какой из углов равнобедренного треугольника BCF является углом при его вершине.

б) Доказать, что эти условия также однозначно определяют величину угла $\angle BAC$, то есть существует только одно значение α, которое может являться величиной угла $\angle BAC$ (точное значение α находить не обязательно).

5. Один руководитель команды на ММО выбирает целые положительные числа n и k, где $n > k$, и сообщает их заместителю руководителя и одному участнику. Затем руководитель тайно сообщает заместителю одно n-значное двоичное число (цепочку нулей и единиц), а заместитель записывает на бумаге все n-значные двоичные числа, которые отличаются от числа, задуманного руководителем, точно в k двоичных разрядах. (Например, если $n = 3$, $k = 1$ и руководитель тайно сообщил двоичное число 101, то на бумаге бы оказалось 001, 111 и 100.) Участнику можно посмотреть, что записал заместитель. Участник пробует угадать задуманное число. Каково наименьшее число попыток, при котором гарантировано, что участник по крайней мере один раз верно назовёт число? Ответ может содержать n и k.

6. Пусть $\mathbb{R}^+$ обозначает множество всех положительных действительных чисел. Найти все такие функции $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, что для всех положительных действительных чисел x и y выполняется равенство

$$xf(x^2)f(f(y)) + f(yf(x)) = f(xy)(f(f(x^2)) + f(f(y^2))).$$

Lahendused

1. *Vastus:* ei.

Oletame, et 5^x ja 5^y järjestkirjutamisel saadakse arv 5^z. See tähendab, et mingi positiivse täisarvu n korral $5^x \cdot 10^n + 5^y = 5^z$. See on samaväärne võrdusega

$$5^{x+n} \cdot 2^n = 5^y \cdot (5^{z-y} - 1).$$

Et $5^{z-y} - 1$ ei jagu 5-ga, siis $5^{z-y} - 1 \perp 5^{x+n}$, mistõttu $5^{z-y} - 1 \mid 2^n$. Samuti, et $2^n \perp 5^y$, siis $2^n \mid 5^{z-y} - 1$. Kokkuvõttes

$$2^n = 5^{z-y} - 1.$$

Juht $n = 1$ ei sobi. Juhul $n = 2$ saame $z - y = 1$. Et peab kehtima $5^y < 10^n$, saame $y = 2$, $z = 3$ ning $x = 0$, mis on vastuolus eeldusega, et 5 astmed on positiivsed.

Kui $n > 2$, siis $5^{z-y} \equiv 1 \pmod 8$. Vähim positiivne astendaja, mille korral 5 aste on kongruentne 1-ga mooduli 8 järgi, on 2, seega $z - y = 2k$ mingi positiivse täisarvu k puhul. Siis aga

$$2^n = 25^k - 1 = 24 \cdot (25^{k-1} + \ldots + 25 + 1).$$

See annab vastuolu, sest $3 \mid 24$, kuid $3 \nmid 2^n$. Seega kirjeldatud omadusega naturaalarvud puuduvad.

2. *Vastus:* $\frac{1}{2}$.

Lahendus 1. Näitame kõigepealt, et $C \leqslant \frac{1}{2}$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4 \leqslant a_5$. Vaatleme murde

$$\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_3}{a_4}, \frac{a_1}{a_5}, \frac{a_2}{a_3}, \frac{a_4}{a_5},$$

mille väärtused kuuluvad kõik poollõiku $(0, 1]$. Seega Dirichlet' printsiibi kohaselt jäävad vähemalt kolm nendest poollõiku $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ või poollõiku $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$. Järelikult ülaltoodud murdude jadas leidub kaks kõrvutiolevat murdu (lugedes siin ka viimase ja esimese murru kõrvutiolevaks), mis kuuluvad lõiku pikkusega $\frac{1}{2}$. Nendes kahes murrus on aga indeksid paarikaupa erinevad ning me võime võtta need indeksid arvudeks i, j, k, l, mis annabki $C \leqslant \frac{1}{2}$.

Nüüd näitame, et ükski väiksem väärtus ei sobi. Võtame arvudeks a_1, a_2, a_3, a_4 ja a_5 vastavalt arvud 1, 2, 2, 2 ja n, kus n on suur reaalarv. Nendest arvudest saab moodustada murrud

$$\frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{2},\ \frac{2}{1},\ \frac{n}{2},\ \frac{n}{1}.$$

Et indeksid i, j, k, l peavad olema erinevad, siis murde $\frac{1}{n}$ ja $\frac{2}{n}$ ei saa valida samaaegselt, mis annab, et avaldise $\left|\frac{a_i}{a_j} - \frac{a_k}{a_l}\right|$ vähim võimalik väärtus on $\frac{1}{2} - \frac{2}{n}$. Seega kui C oleks väiksem kui $\frac{1}{2}$, siis saaksime piisavalt suure n korral vastuolu. Järelikult $C = \frac{1}{2}$.

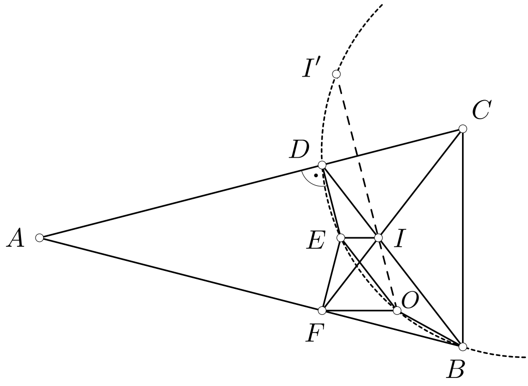
Lahendus 2. Näitamaks, et $C \leqslant \frac{1}{2}$ eeldame jälle üldisust kitsendamata, et $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4 \leqslant a_5$. Siis murdude

$$\frac{a_1}{a_2},\ \frac{a_1}{a_3},\ \frac{a_1}{a_4},\ \frac{a_1}{a_5},\ \frac{a_2}{a_3},\ \frac{a_2}{a_4},\ \frac{a_2}{a_5},\ \frac{a_3}{a_4},\ \frac{a_3}{a_5},\ \frac{a_4}{a_5}$$

väärtused kuuluvad kõik poollõiku $(0,1]$. Dirichlet' printsiibi kohaselt jäävad vähemalt viis neist poollõiku $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ või poollõiku $\left(\frac{1}{2},1\right]$. Seega piisab näidata, et kui valida ülaltoodud murdude seast mis tahes 5 murdu, siis leidub nende seas kaks murdu, milles kõik indeksid on erinevad. Olgu meil graaf tippudega 1, 2, 3, 4, 5, kus tippude i ja j vahel on serv parajasti, siis kui meie valitud viie murru seas leidub murd $\frac{a_i}{a_j}$. Selles graafis on 5 tippu ja 5 serva. Vaadeldes läbi kõik võimalikud servade paigutused, näeme kergesti, et alati leidub kaks serva, millel pole ühiseid otspunkte. Neile vastavate murdude põhjal saamegi, et $C \leqslant \frac{1}{2}$.

Veendumaks, et C ei saa olla väiksem kui $\frac{1}{2}$, võime toimida nagu lahenduses 1, aga võime arvudeks a_1, a_2, a_3, a_4 ja a_5 võtta ka 1, 1, 1, 2 ja n, kus n on suur reaalarv. Edasine arutelu on analoogiline lahendusega 1.

3. *Lahendus 1.* Olgu F sirgete CI ja AB lõikepunkt (joonis 1). On selge, et punktid F ja D on sirge AI suhtes sümmeetrilised. Olgu O kolmnurga BIF ümberringjoone keskpunkt ja olgu I' punkti I peegeldus sirge AC suhtes.



Joonis 1

Et $\angle BFO = 90^\circ - \angle FIB = \dfrac{1}{2}\angle BAC = \angle BAI$, siis $EI \parallel FO$. Peale selle, $\angle OIB = 90^\circ - \angle BFI = 90^\circ - \angle CDI = \angle I'ID$, millest saame, et O, I ja I' asuvad ühel sirgel.

Paneme tähele, et $ED \parallel OI$, sest mõlemad on risti sirgega AC. Siis $\angle FEI = \angle DEI = \angle OIE$. Koos seosega $EI \parallel FO$ annab see, et $EFOI$ on võrdhaarne trapets. Seega saame $\angle DIE = \angle FIE = \angle OEI$, mistõttu $OE \parallel ID$. Seega on $DEOI$ rööpkülik. Järelikult $|DI'| = |DI| = |EO|$, mis näitab, et $DEOI'$ on võrdhaarne trapets. Lisaks järeldub seostest $|ED| = |OI| = |OB|$ ja $OE \parallel BD$, et $EOBD$ on samuti võrdhaarne trapets. Täpsemini, nii $DEOI'$ kui ka $EOBD$ on kõõlnelinurgad. See tähendab, et B, D, E, I' asuvad samal ringjoonel.

Lahendus 2. Olgu I' punkti I peegeldus sirge AC suhtes ja olgu S sirgete $I'C$ ja AI lõikepunkt (joonis 2). Kasutame suunatud nurkasid. Olgu $\theta = \angle ACI = \angle ICB = \angle CBI$. Siis

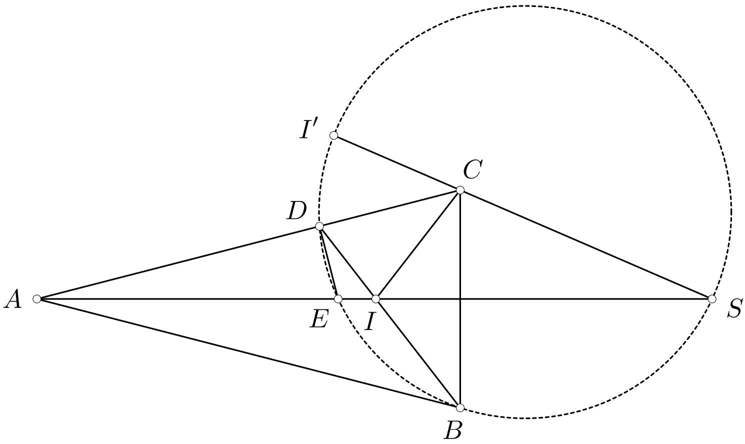
$$\angle I'SE = \angle I'CA + \angle CAI = \theta + \left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right) = 3\theta + \frac{\pi}{2}$$

ja

$$\angle I'DE = \angle I'DC + \frac{\pi}{2} = \angle CDI + \frac{\pi}{2} = \angle DCB + \angle CBD + \frac{\pi}{2} = 3\theta + \frac{\pi}{2}.$$

Järelikult asuvad punktid I', D, E, S samal ringjoonel.

Edasi leiame, et $\angle I'SB = 2\angle I'SE = 6\theta$ ja $\angle I'DB = 2\angle CDI = 6\theta$. Seega asuvad ka punktid I', D, B, S samal ringjoonel. Järelikult asuvad punktid I', D, E, B, S kõik samal ringjoonel. Siit järeldubki vajalik tulemus.



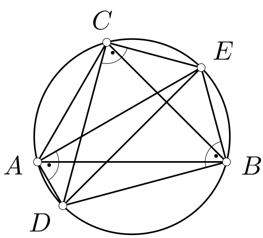
Joonis 2

Märkus. Lahenduses 2 konstrueeritud punkt S võib asuda punktiga A samal pool sirget BC. Kuna S asub mittekõdunud kolmnurga BDE ümberringjoonel, siis võime kaudselt järeldada, et S ei asu lõpmatuses. Nagu võime veenduda, on sirged $I'C$ ja AI paralleelsed parajasti siis, kui kolmnurk ABC on võrdkülgne.

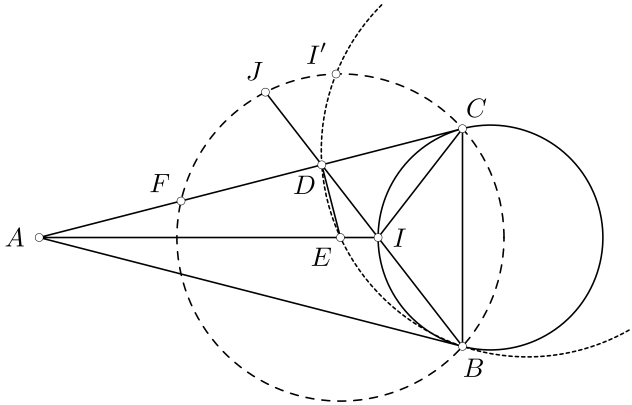
Lahendus 3. Kasutame järgmist lemmat.

Lemma. Kolmnurga ABC tipust A tõmmatud väline nurgapoolitaja lõikab kolmnurga ABC ümberringjoont punktis D, mis asub võrdsel kaugusel tippudest B ja C.

Tõepoolest, olgu E tipust A tõmmatud nurgapoolitaja teine lõikepunkt kolmnurga ABC ümberringjoonega (joonis 3). Et AE poolitab nurga CAB, on ringjoone kaared CE ja EB võrdsed. Kuna $\angle EAD = 90^\circ$, on ED diameeter, mistõttu on ka kaared CD ja BD võrdsed. Järelikult $|CD| = |BD|$. Lemma on tõestatud.



Joonis 3



Joonis 4

Olgu Γ ringjoon, mille keskpunkt on E ja mis läbib punkte B ja C (joonis 4). Et $ED \perp AC$, siis asub punktiga C punkti D suhtes sümmeetriline punkt F ringjoonel Γ. Et $\angle DCI = \angle ICB = \angle CBI$, siis on sirge DC kolmnurga IBC ümberringjoone puutuja. Olgu J punktiga I punkti D suhtes sümmeetriline punkt. Kasutades teoreemi lõikajast ja puutujast, saame

$$|DC| \cdot |DF| = |DC|^2 = |DI| \cdot |DB| = |DJ| \cdot |DB|.$$

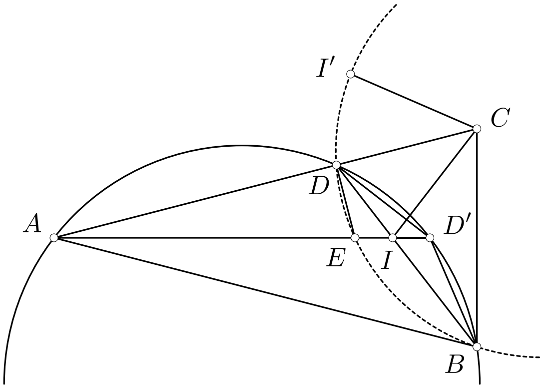
Järelikult asub punkt J samuti ringjoonel Γ. Olgu I' punkti I peegeldus sirge AC suhtes. Et IJ ja CF poolitavad teineteist, siis on $CJFI$ rööpkülik. Et $\angle FI'C = \angle CIF = \angle FJC$, siis asub I' ringjoonel Γ. Seega $|EI'| = |EB|$.

Paneme tähele, et AC on $\angle BDI'$ nurgapoolitaja. Et $DE \perp AC$, siis DE on $\angle BDI'$ väline nurgapoolitaja. Koos võrdusega $|EI'| = |EB|$ võime siit eelnimetatud lemma põhjal järeldada, et E asub kolmnurga BDI' ümberringjoonel, sest punkte E, mille puhul korraga $|EI'| = |EB|$ ja $ED \perp AC$, saab olla ainult üks.

Lahendus 4. Olgu I' punkti I peegeldus sirge AC suhtes ning olgu D' sirge AI ja kolmnurga ABD ümberringjoone teine lõikepunkt (joonis 5). Et sirge AD' poolitab nurga $\angle BAD$, on D' kaare BD keskpunkt ja $|DD'| = |BD'| = |CD'|$. On ilmne, et A, E, D' asuvad sirgel AI just selles järjekorras.

Nüüd saame $\angle ED'D = \angle AD'D = \angle ABD = \angle IBC = \angle ICB$. Edasi, et D' on kolmnurga BCD ümberringjoone keskpunkt, siis $\angle EDD' = 90^\circ - \angle D'DC = \angle CBD = \angle IBC$. Need kaks seost näitavad, et kolmnurgad $ED'D$ ja ICB on sarnased. Järelikult

$$\frac{|BC|}{|CI'|} = \frac{|BC|}{|CI|} = \frac{|DD'|}{|D'E|} = \frac{|BD'|}{|D'E|}.$$



Joonis 5

Lisaks

$$\angle BCI' = \angle BCA + \angle ACI' = \angle BCA + \angle ICA =$$
$$= \angle BCA + \angle DBC = \angle BDA = \angle BD'E.$$

Järelikult on kolmnurgad BCI' ja $BD'E$ sarnased. Seega on kolmnurgad BCD' ja $BI'E$ samuti sarnased. Et BCD' on võrdhaarne, siis $|BE| = |I'E|$. Et DE on $\angle BDI'$ välisnurga poolitaja ja $|EI'| = |EB|$, siis võime järeldada, et E asub kolmnurga BDI' ümberringjoonel.

Lahendus 5. Olgu A' ja B' vastavalt sirgete AI ja BI teised lõikepunktid kolmnurga ABC ümberringjoonega ning olgu E' punkti E peegeldus sirge AC suhtes (joonis 6). Et

$$\angle B'AE' = \angle B'AD - \angle E'AD = \frac{\angle ABC}{2} - \frac{\angle BAC}{2} = 90^\circ - \angle BAC - \frac{\angle ABC}{2}$$
$$= 90^\circ - \angle B'DA = \angle B'DE',$$

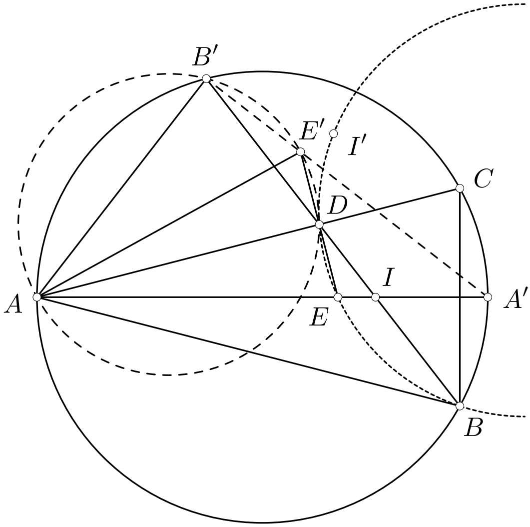
siis asuvad punktid B', A, D, E' samal ringjoonel. Seega

$$\angle DB'E' = \angle DAE' = \frac{\angle BAC}{2} = \angle BAA' = \angle DB'A'.$$

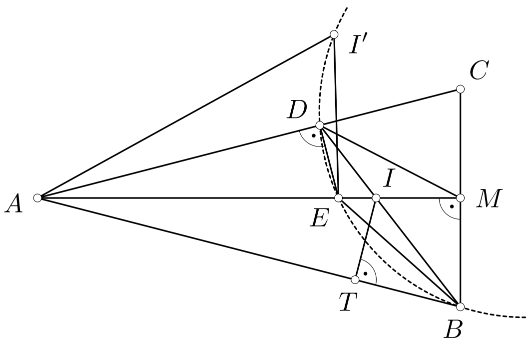
Seega asuvad B', E', A' ühel sirgel. On teada, et $A'B'$ on lõigu CI keskristsirge, seetõttu $|CE'| = |IE'|$. Olgu I' punkti I peegeldus sirge AC suhtes. Siis $|BE| = |CE| = |I'E|$. Et DE on $\angle BDI'$ välisnurga poolitaja ja $|EI'| = |EB|$, siis järeldame, et E asub kolmnurga BDI' ümberringjoonel.

Lahendus 6. Olgu I' punkti I peegeldus sirge AC suhtes (joonis 7). Tähistagu T ja M vastavalt punkti I projektsioone külgedele AB ja BC. Et BI on lõigu TM keskristsirge, siis

$$|DT| = |DM| \tag{1}$$



Joonis 6



Joonis 7

Et $\angle ADE = \angle ATI = 90^\circ$ ja $\angle DAE = \angle TAI$, siis kolmnurgad ADE ja ATI on sarnased. Sellest saame, et $\frac{|AD|}{|AE|} = \frac{|AT|}{|AI|} = \frac{|AT|}{|AI'|}$. Koos seosega $\angle DAT = 2\angle DAE = \angle EAI'$ annab see, et kolmnurgad DAT ja EAI' on sarnased. Sealhulgas

$$\frac{|DT|}{|EI'|} = \frac{|AT|}{|AI'|} = \frac{|AT|}{|AI|}. \tag{2}$$

On selge, et täisnurksed kolmnurgad AMB ja ATI on sarnased. Seega saame

$$\frac{|AM|}{|AB|} = \frac{|AT|}{|AI|}. \tag{3}$$

Kolmnurkade AMB, ATI ja ADE omavahelisest sarnasusest saame nüüd $\frac{|AM|}{|AB|} = \frac{|AD|}{|AE|}$, seega on kolmnurgad ADM ja AEB sarnased. Sellest järeldub, et

$$\frac{|DM|}{|EB|} = \frac{|AM|}{|AB|}. \tag{4}$$

Pannes kokku seosed (1), (2), (3) ja (4) saame $|EB| = |EI'|$. Et DE on $\angle BDI'$ välisnurga poolitaja, siis võime järeldada, et E asub kolmnurga BDI' ümberringjoonel.

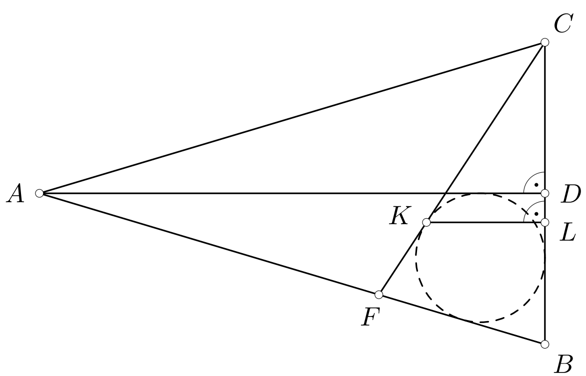
Lahendused

4. a) Vaatame juhte lähtuvalt sellest, milline on kolmnurga BCF tipunurk (joonis 8).

- Kui tipunurk oleks F juures, asuks F külje BC keskristsirgel ehk sirgel AD, mistõttu peaks olema $F = A$. See tähendaks, et sirge AC on kolnmnurga ABD siseringjoone puutuja. Kuid ka AB ja AD on sama ringjoone puutujad. Ühest punktist saab samale ringjoonele tõmmata ainult kaks puutujat. Vastuolu näitab, et see juht pole võimalik.
- Olgu tipunurk tipu B juures. Et CBF on samas võrdhaarse kolmnurga ABC alusnurk, siis $\angle CBF < 90^\circ$. Seega $\angle BCF > 45^\circ$. Olgu K sirge CF ja kolmnurga ABD siseringjoone puutepunkt ning L punkti K projektsioon sirgele BC. Konstruktsiooni põhjal ilmselt $|KL| < 2r$, kus r on kolmnurga ABD siseringjoone raadius. Teisalt saame seoste $\angle LCK = \angle BCF > 45^\circ$ tõttu $|KL| > |CL| > |CD| = |BD| > 2r$. Vastuolu näitab, et ka see juht pole võimalik.

Seega kui ülesande tingimused kehtivad, siis ainukese võimalusena saab kolmnurga BCF tipunurk asuda tipu C juures.

b) Olgu tipunurk tipu C juures. Fikseerime punkti D, seda punkti läbivad omavahel ristuvad sirged l_1 ja l_2 ning ringjoone c, mis puutub mõlemat sirget; olgu ringjoone raadius r. Valime sirgel l_1 punkti A nii, et $|DA| > 2r$



Joonis 8

ja sirge l_1 puutepunkt ringjoonega c asub lõigul DA. Punkt B on määratud sõltuvalt A asukohast kui punktist A ringjoonele c tõmmatud teise puutujasirge lõikepunkt sirgega l_2, punkt C on punktiga B sümmeetriline punkt sirge DA suhtes ning F on defineeritud nagu ülesande tekstis. Eemaldudes punktiga A punktist D, lähenevad punktid B ja C punktile D, mistõttu $\angle BAC$ väheneb, samas kui $\angle BCF$ suureneb. Seega ainult ühel juhul saavad need nurgad olla võrdsed.

Märkus. Täiendades lahenduse lõpuosa arutelu, saab näidata, et ülesandes kirjeldatud omadusega võrdhaarne kolmnurk tõepoolest leidub. Selleks piisab märgata, et $\angle BAC$ saab lõputult nullile läheneda, samas kui juhul $\angle BAC = 90^\circ$ kehtib $\angle BCF < \angle BCA = 45^\circ < \angle BAC$.

Arvutused näitavad, et tipunurk α, mille korral ülesande tingimused on täidetud, rahuldab võrrandit $\tan^3 \alpha - 8\tan^2 \alpha + 17\tan \alpha - 8 = 0$ ja tema ligikaudne väärtus on $\alpha \approx 33{,}3^\circ$.

Osa b) teine lahendus. Olgu O sirgete CF ja AD lõikepunkt. Ringjoon on siis nelinurga $OFBD$ siseringjoon. Järelikult $|OF| + |BD| = |FB| + |DO|$. Tähistades $\angle BAD = \alpha$ ja $|BD| = x$, saame siin esinevad lõigud avaldada α ja x kaudu:

- $|OF| = |CF| - |CO| = 2x - \dfrac{x}{\cos 2\alpha}$;
- $|BD| = x$;
- et kolmnurgad ABC ja CFB on sarnased, siis $\dfrac{|AB|}{|BC|} = \dfrac{|BC|}{|FB|}$, järelikult $|FB| = (2x)^2 : \dfrac{x}{\sin\alpha} = 4x\sin\alpha$;
- täisnurksest kolmnurgast CDO saame $|DO| = x\tan 2\alpha$.

Võrdus $|OF| + |BD| = |FB| + |DO|$ omandab kuju

$$2x - \frac{x}{\cos 2\alpha} + x = 4x\sin\alpha + x\tan 2\alpha$$

ehk

$$4\sin\alpha + \tan 2\alpha + \frac{1}{\cos 2\alpha} - 3 = 0.$$

Võrrandi vasakul poolel asuv funktsioon $f(\alpha)$ on kasvav lõigul $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, sest liidetavad on kasvavad, ning tal on katkevuspunkt kohal $\frac{\pi}{4}$. Võrrandil leidub lahend vahemikus $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$, sest $f(0) = -2$ ja $\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{4}^-} f(\alpha) = \infty$. Vahemikus $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ võrrandil lahendeid ei leidu, sest $\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{4}^+} = -\infty$ ja $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Seega leidub täpselt üks sobiv α väärtus, mis asub 0 ja $\frac{\pi}{4}$ vahel.

5. *Vastus.* Vähim pakkumiste arv on 2, kui $n = 2k$, ja 1, kui $n \neq 2k$.

Lahendus 1. Olgu X juhi valitud kahendarv ja olgu X' kahendarv pikkusega n, mille iga number on arvu X vastavast numbrist erinev. (Näiteks kui juhi arv on $X = 101$, siis $X' = 010$.) Paneme tähele, et asejuhi kirjutatud arvud on samad, mis saaksime siis, kui juhi arv oleks X' ja arvu k asemele võtaksime arvu $n - k$. Seetõttu võime üldisust kitsendamata eeldada, et $k \geqslant \frac{n}{2}$. Samuti näeme siit, et kui $k = \frac{n}{2}$, ei ole asejuhi kirjutatu põhjal võimalik eristada arve X ja X' ning võistleja peab tegema vähemalt kaks pakkumist.

Jääb näidata, et võistlejal on võimalik X sellise arvu pakkumistega ära arvata. Vaatleme suvalist kahendarvu Y, mis erineb arvust X mingi m numbri poolest, kus $0 < m < 2k$. Üldisust kitsendamata eeldame, et arvude X ja Y esimesed m numbrit on erinevad. Olgu Z kahendarv, mille saame arvust X selle esimest k numbrit muutes. Siis on Z üks neist arvudest, mille asejuht paberile kirjutab. Arv Z erineb arvust Y täpselt $|m - k|$ numbri poolest, kus $|m - k| < k$, sest $0 < m < 2k$. Siit järeldub, et Y ei ole otsitav arv.

Kuna eeldasime, et $k \geqslant \frac{n}{2}$, siis on kaks juhtu. Kui $n < 2k$, siis erineb iga võimalik arv $Y \neq X$ arvust X vähem kui $2k$ numbri poolest. Kui $n = 2k$, siis erinevad kõik võimalikud kahendsüsteemi arvud peale X ja X' arvust X vähem kui $2k$ numbri poolest. Seega piisab esimesel juhul ühest pakkumisest, teisel juhul aga kahest.

Lahendus 2. Esiteks eeldame, et $n \neq 2k$. Üldisust kitsendamata oletame, et juhi valitud arvu esimene number on 1. Siis on asejuhi kirjutatud $\binom{n}{k}$ arvu seas $\binom{n-1}{k}$ sellised, mis algavad numbriga 1, ja $\binom{n-1}{k-1}$ sellised, mis algavad numbriga 0. Et $n \neq 2k$, siis ka $k+(k-1) \neq n-1$ ja seega $\binom{n-1}{k} \neq \binom{n-1}{k-1}$. Seega saab võistleja loendada, mitu asejuhi kirjutatud arvu algavad numbriga 0 ja mitu numbriga 1 ning selle põhjal tuvastada juhi arvu esimese numbri. Sama võib teha kõigi teiste numbritega. Järelikult piisab juhul $n \neq 2k$ ühest pakkumisest.

Teiseks, kui $n = 2$ ja $k = 1$, siis on ilmne, et vastus on 2. Kõigi ülejäänud juhtude puhul, kus $n = 2k > 2$, kirjutaks asejuht paberile täpselt samad arvud nagu siis, kui juhi arv X oleks asendatud arvuga X', kus iga number on muudetud vastupidiseks (0 asemel 1 ja 1 asemel 0). See näitab, et võistlejal läheb tarvis vähemalt kaht pakkumist. Näitame, et kahe pakkumisega on võimalik arv X ka ära arvata.

Kui juhi arvu esimesed kaks numbrit on samad, siis esinevad asejuhi kirjutatud arvude hulgas numbritega 01 ja 10 algavad arvud kumbki $\binom{2k-2}{k-1}$ korda ning numbritega 00 ja 11 algavad arvud kumbki $\binom{2k-2}{k}$ korda. Kui juhi arvu esimesed numbrid on erinevad, siis on need väärtused vastupidised.

Et $\binom{2k-2}{k-1} \neq \binom{2k-2}{k}$, siis saab võistleja asejuhi arvude põhjal järeldada, kas juhi arvu esimesed kaks numbrit on samad või mitte. Sarnasel viisil saab ta teha järeldusi arvu teise ja kolmanda numbri, kolmanda ja neljanda numbri jne kohta ning taandada juhi valitud arvu kahele võimalusele. Seda oligi tarvis tõestada.

Lahendus 3. Samamoodi nagu lahenduses 2 saame, et juhul $n \neq 2k$ piisab ühest pakkumisest ja et juhul $n = 2k$ võis juht arvu X asemel valida ka arvu X', milles iga number on muudetud vastupidiseks.

Tõestame, et juhul $n = 2k$ piisab kahest pakkumisest. Üldisust kitsendamata eeldame, et X algab numbriga 1. Arvu X algusest numbri 1 kustutamisel saame mingi $2k-1$-kohalise arvu Y. Valime välja kõik juhi kirjutatud arvud, mis algavad numbriga 1, ning kustutame nende algusest numbri 1. Saame $2k-1$-kohalised arvud, mis erinevad arvust Y täpselt k kahendkoha poolest. Seejuures on nende hulgas olemas kõik $2k-1$-kohalised arvud, mis erinevad arvust Y täpselt k kahendkoha poolest. Et $2k-1 \neq 2k$, siis saame lahenduse esimese osa põhjal leida arvu Y. Järelikult saame leida ka arvud X ja X'.

6. *Vastus:* ainuke funktsioon on $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Lahendus 1. Valides ülesande võrrandis $x = y = 1$, saame $f(1)f(f(1)) + f(f(1)) = 2f(1)f(f(1))$, millest $f(1) = 1$. Vahetades ülesande võrrandis muutujad x ja y, jääb parem pool samaks, seega peab ka vasak pool samaks jääma. Järelikult

$$xf(x^2)f(f(y)) + f(yf(x)) = yf(y^2)f(f(x)) + f(xf(y)). \tag{5}$$

Valides siin $y = 1$, saame $xf(x^2) + f(f(x)) = f(f(x)) + f(x)$, millest

$$f(x^2) = \frac{f(x)}{x}. \tag{6}$$

Valides algses võrrandis $y = 1$ ja rakendades tegurile $xf(x^2)$ seost (6), saame $f(x) + f(f(x)) = f(x)(f(f(x^2)) + 1)$, millest

$$f(f(x^2)) = \frac{f(f(x))}{f(x)}. \tag{7}$$

Seega kehtib järgmine võrduste ahel:

$$f\left((f(x))^2\right) \overset{(6)}{=} \frac{f(f(x))}{f(x)} \overset{(7)}{=} f(f(x^2)) \overset{(6)}{=} f\left(\frac{f(x)}{x}\right). \tag{8}$$

Kui funktsioon f oleks injektiivne, siis sellest järelduks, et ainus võimalik lahend on $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Seega piisab näidata funktsiooni f injektiivsus.

Võrrandite (6) ja (7) abil võime algse võrrandi teisendada kujule

$$f(x)f(f(y)) + f(yf(x)) = f(xy)\left(\frac{f(f(x))}{f(x)} + \frac{f(f(y))}{f(y)}\right). \tag{9}$$

Võttes siin $x = y$ ja rakendades võrdust (6), saame $f(x)f(f(x))+f(xf(x)) = 2\frac{f(f(x))}{x}$, mis annab

$$f(xf(x)) = f(f(x))\left(\frac{2}{x} - f(x)\right). \tag{10}$$

Võrduse (6) abil võime võrduse (5) kirja panna kujul

$$f(x)f(f(y)) + f(yf(x)) = f(y)f(f(x)) + f(xf(y)).$$

Olgu x ja y sellised, et $f(x) = f(y) = c$. Eelnev võrrand teiseneb kujule

$$f(yf(y)) = f(xf(x)).$$

Kasutades seost (10), saame

$$f(c)\left(\frac{2}{x} - c\right) = f(c)\left(\frac{2}{y} - c\right).$$

Sellest järeldub, et $x = y$. Saime, et funktsioon f on injektiivne, mistõttu ainus võimalik lahend on $f(x) = \frac{1}{x}$.

Kontroll näitab, et see funktsioon tõesti rahuldab ülesande võrrandit: võrrandi vasak pool tuleb

$$x \cdot \frac{1}{x^2} \cdot y + \frac{x}{y} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$$

ning parem pool

$$\frac{1}{xy}(x^2 + y^2) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Pooled on võrdsed.

Lahendus 2. Valides algses võrrandis $x = y = 1$, saame $f(1)f(f(1)) + f(f(1)) = 2f(1)f(f(1))$; seega $f(1) = 1$. Valides algses võrrandis $x = 1$, saame $f(f(y)) + f(y) = f(y)(1 + f(f(y^2)))$, seega

$$f(f(y)) = f(y)f(f(y^2)). \tag{11}$$

Valides algses võrrandis $y = 1$, saame $xf(x^2)+f(f(x)) = f(x)(f(f(x^2))+1)$. Seose (11) põhjal

$$xf(x^2) = f(x). \tag{12}$$

Võtame algses võrrandis y asemele $\frac{1}{x}$. Saame

$$xf(x^2)f\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)+f\left(\frac{f(x)}{x}\right)=f(f(x^2))+f\left(f\left(\frac{1}{x^2}\right)\right). \tag{13}$$

Seos (12) näitab, et $f\left(\frac{f(x)}{x}\right)=f(f(x^2))$. Kasutades seost (11) koos asendusega $y=\frac{1}{x}$ ja seost (12), taandub (13) kujule

$$f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)=1. \tag{14}$$

Võtame algses võrrandis x asemele $\frac{1}{x}$ ja y asemele $\frac{1}{y}$ ning kasutame seost (14). Saame

$$\frac{1}{xf(x^2)f(f(y))}+\frac{1}{f(yf(x))}=\frac{1}{f(xy)}\left(\frac{1}{f(f(x^2))}+\frac{1}{f(f(y^2))}\right).$$

Viies murrud ühisele nimetajale, võime lugejaid lihtsustada esialgse võrrandi abil ning tulemuseks on

$$f(xy)^2f(f(x^2))f(f(y^2))=xf(x^2)f(f(y))f(yf(x)).$$

Kasutades seoseid (11) ja (12), taandub viimane võrdus kujule

$$f(xy)^2f(f(x))=f(x)^2f(y)f(yf(x)). \tag{15}$$

Asendades seoses (15) $y=f(x)$ ja kasutades seost (12), võttes seal x asemele $f(x)$, saame

$$f(xf(x))^2=f(x)f(f(x)). \tag{16}$$

Võttes seoses (15) $y=x$, tõstes mõlemad pooled ruutu ning rakendades seoseid (12) ja (16), leiame

$$f(f(x))=x^4f(x)^3. \tag{17}$$

Lõpuks kombineerides (11), (12) ja (17), saame

$$x^4f(x)^3\overset{(17)}{=}f(f(x))\overset{(11)}{=}f(x)f(f(x^2))\overset{(17)}{=}f(x)x^8f(x^2)^3\overset{(12)}{=}x^5f(x)^4.$$

Siit järeldub $f(x)=\frac{1}{x}$. Nagu lahenduses 1 kontrollime, et see funktsioon sobib lahendiks.

Hindamisskeemid

1. *(Aleksei Lissitsin)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Ülesanne taandatud võrrandile $2^x + 1 = 5^y$: 3 p
- Eelmises võrrandis läbi vaadatud kas paaritu või paarisarvulise y juht: 5 p
- Täislahendus: 7 p

Väiksemate vigade või puudulike selgituste eest võeti maha 1 või 2 punkti.

2. *(Heiki Niglas)* Lahenduse järgnevate osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestuse eest, et $C \geqslant \frac{1}{2}$: 3 p
- Tõestuse eest, et $C \leqslant \frac{1}{2}$: 4 p

Lihtsalt vastuse eest punkte ei antud. Samuti $C \leqslant 1$ näitamise eest punkte ei antud.

3. *(Oleg Košik)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Täislahendus, mis ei tööta täpselt sellisena juhul, kui tipunurk on suurem kui 60 kraadi: 6 p
- Ülesanne taandatud keerulisele ühe muutuja trigonomeetrilise võrduse tõestamisele (lahendus joonisespetsiifiline): 3 p
- Ülesanne taandatud teatud lõikude pikkuste seosele, mida võimalik mõistliku vaevaga tõestada: 2 p
- Ülesanne taandatud kolmnurkade EDI' ja BII' sarnasuse näitamisele: 1 p
- Sihitu proovimine (nt olemasoleva joonise põhjal nurkade arvutus): 0 p

Ainus lõpule viidud lahendus kasutas arvutuslikku lähenemist, taandades ülesande teatud keerulisele trigonomeetrilise seose tõestamisele.

Hindamisskeemid

4. *(Triinu Veerorg)* Lahenduse järgnevate osade eest antud punktid summeeriti.

- a)-osa: 3 p
  - Näidatud, et F ei sobi kolmnurga BCF tipuks: *1 p*
  - Näidatud, et B ei sobi kolmnurga BCF tipuks: *2 p*

  b)-osa: 4 p

5. *(Janno Veeorg)* Lahenduse järgnevate osade eest antud punktid summeeriti.

- Põhjendatud, et kui $n \neq 2k$, siis piisab ühest pakkumisest: 2 p
- Põhjendatud, et kui $n = 2k$, siis ühest pakkumisest ei piisa: 2 p
- Põhjendatud, et kui $n = 2k$, siis piisab kahest pakkumisest: 3 p

Puudulike põhjenduste korral võis skeemi iga rea eest saada osalisi punkte.

6. *(Sandra Schumann)* Lahenduse järgnevate osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et $f(x^2) = \dfrac{f(x)}{x}$: 1 p
- Näidatud, et $f(f(x^2)) = \dfrac{f(f(x))}{f(x)}$: 1 p
- Jõutud seoseni $f(f(x)^2) = f\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)$: 2 p
- Tõestatud f injektiivsus: 2 p
- Lahenduse lõpule viimine ja kontroll: 1 p

Lahenduse lõpule viimise osa eest kontrolli puudumisel punkte ei antud. Seos $f(1) = 1$ üksinda punkti ei andnud.