Täiendav valikvõistlus 2017

Ülesanded 2
Teine voor. Esimene päev . . . 2
Teine voor. Teine päev 3

Ülesanded vene keeles 4
Второй тур. Первый день . . . 4
Второй тур. Второй день . . . 5

Lahendused 6
Teine voor. Esimene päev . . . 6
Teine voor. Teine päev 10

Hindamisskeemid 16
Teine voor. Esimene päev . . . 16
Teine voor. Teine päev 17

Võistluskomplekti koostamisse panustasid:

Oleg Košik
Aleksei Lissitsin
Härmel Nestra
Heiki Niglas
Reimo Palm
Sandra Schumann
Janno Veeorg

IMO'17 Eesti võistkonna valikvõistlus

18.–19. mai 2017 **Teine voor. Esimene päev**

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.
Palun vormista erinevate ülesannete lahendused eraldi lehtedele!

1. Olgu n positiivne täisarv. Mitu võimalust on kirjutada $n \times n$ tabeli igasse lahtrisse üks arvudest 0, 1, 2, 3, 4, 5 nii, et

a) iga rea arvude summa jaguks 2-ga ja iga veeru arvude summa jaguks 3-ga;

b) iga rea arvude summa jaguks 2-ga, iga veeru arvude summa jaguks 3-ga ning kummagi diagonaali arvude summa jaguks 6-ga?

2. Olgu a, b, c positiivsed reaalarvud, mille puhul $\min\{ab, bc, ca\} \geqslant 1$. Tõesta, et

$$\sqrt[3]{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} \leqslant \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 + 1.$$

3. Olgu $B = (-1, 0)$ ja $C = (1, 0)$ fikseeritud punktid koordinaattasandil. Ütleme, et tasandi punktide hulk S on *kena*, kui

1) leidub selline punkt $T \in S$, et iga punkti $Q \in S$ jaoks kuulub lõik TQ täielikult hulka S ja

2) iga kolmnurga $P_1P_2P_3$ puhul leidub selline üheselt määratud punkt $A \in S$, et kolmnurk ABC on sarnane kolmnurgaga $P_{\sigma(1)}P_{\sigma(2)}P_{\sigma(3)}$, kus σ on mingi indeksite 1, 2, 3 permutatsioon.

Tõesta, et hulgal $\{(x, y) : x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$ leiduvad sellised kaks erinevat kena alamhulka S ja S', et kui $A \in S$ ja $A' \in S'$ on kolmnurgale $P_1P_2P_3$ vastavad tingimuses 2) nimetatud üheselt määratud punktid, siis korrutise $|BA| \cdot |BA'|$ väärtus ei sõltu kolmnurga $P_1P_2P_3$ valikust.

IMO'17 Eesti võistkonna valikvõistlus

18.–19. mai 2017 **Teine voor. Teine päev**

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.
Palun vormista erinevate ülesannete lahendused eraldi lehtedele!

4. Olgu ABC selline kolmnurk, et $|AB| = \frac{|AC|}{2} + |BC|$. Väljapoole kolmnurka joonestatakse kaks poolringjoont diameetritega AB ja BC. Tipust A nende poolringjoonte ühisele puutujale tõmmatud ristlõigu aluspunkt on X. Leia $\angle CAX$.

5. Iga positiivse täisarvu k puhul märgime tähisega $S(k)$ arvu k kümnendesituse numbrite summat. Leia kõik sellised täisarvuliste kordajatega polünoomid $P(x)$, et iga positiivse täisarvu $n \geqslant 2016$ korral on täisarv $P(n)$ positiivne ja kehtib võrdus $S(P(n)) = P(S(n))$.

6. Olgu n naturaalarv, $n \geqslant 3$. Milline on suurim arv diagonaale, mida saab märkida korrapärases n-nurgas nii, et iga kaks märgitud diagonaali, mis lõikuvad n-nurga sisepiirkonnas, lõikuvad seal täisnurga all?

Отборочный конкурс на ММО'17

18–19 мая 2017 г. **Второй тур. Первый день**

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.
Пожалуйста, оформляйте решения разных заданий на отдельных листках!

1. Пусть n — положительное целое число. Сколько существует возможностей записать в каждую клетку таблицы $n \times n$ одно из чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5 так, что

a) сумма чисел каждой строки делится на 2, а сумма чисел каждого столбца делится на 3;

b) сумма чисел каждой строки делится на 2, сумма чисел каждого столбца делится на 3, а сумма чисел каждой из двух диагоналей делится на 6?

2. Пусть a, b, c — положительные действительные числа, для которых $\min\{ab, bc, ca\} \geqslant 1$. Доказать, что

$$\sqrt[3]{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} \leqslant \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 + 1.$$

3. Пусть $B = (-1, 0)$ и $C = (1, 0)$ — фиксированные точки на координатной плоскости. Назовём множество S точек координатной плоскости *красивым*, если

1) найдётся такая точка $T \in S$, что для любой точки $Q \in S$ отрезок TQ полностью принадлежит множеству S, а также

2) для каждого треугольника $P_1P_2P_3$ найдётся такая однозначно определённая точка $A \in S$, что треугольник ABC подобен треугольнику $P_{\sigma(1)}P_{\sigma(2)}P_{\sigma(3)}$, где σ — некоторая перестановка индексов 1, 2, 3.

Доказать, что во множестве $\{(x, y)\colon x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$ найдутся два таких различных красивых подмножества S и S', что если точки $A \in S$ и $A' \in S'$ являются однозначно определёнными точками для треугольника $P_1P_2P_3$ согласно условию 2), то значение произведения $|BA| \cdot |BA'|$ не зависит от выбора треугольника $P_1P_2P_3$.

Отборочный конкурс на ММО'17

18–19 мая 2017 г. **Второй тур. Второй день**

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.
Пожалуйста, оформляйте решения разных заданий на отдельных листках!

4. Треугольник ABC такой, что $|AB| = \frac{|AC|}{2} + |BC|$. Снаружи треугольника проводятся две полуокружности с диаметрами AB и BC. Пусть X — основание перпендикуляра, опущенного из вершины A на общую касательную этих полуокружностей. Найти $\angle CAX$.

5. Для каждого целого положительного числа k обозначим через $S(k)$ сумму цифр десятичного представления числа k. Найти все такие многочлены с целыми коэффициентами $P(x)$, что при каждом целом положительном $n \geqslant 2016$ целое число $P(n)$ положительно и выполняется равенство $S(P(n)) = P(S(n))$.

6. Дано натуральное число n, $n \geqslant 3$. Каково наибольшее количество диагоналей, которые можно отметить в правильном n-угольнике так, что любые две отмеченные диагонали, пересекающиеся во внутренней области этого n-угольника, пересекаются под прямым углом?

Lahendused

1. *Vastus:* a) 6^{n^2-n}; b) 1, kui $n=1$; 6, kui $n=2$; 6^{n^2-n-2}, kui $n \geqslant 3$.

a) Kirjutame ülemisest vasakust nurgast algava $(n-1)\times(n-1)$ ruudustiku lahtritesse suvalised arvud. Seda saab teha $6^{(n-1)^2}$ viisil. Jääb täita viimane veerg ja viimane rida. Et iga rea summa peab jaguma 2-ga, siis on viimase veeru esimesest $n-1$ lahtrist igaühe täitmiseks 3 võimalust ning kokku saab neid lahtreid täita 3^{n-1} viisil. Et iga veeru summa peab jaguma 3-ga, siis on viimase rea esimesest $n-1$ lahtrist igaühe täitmiseks 2 võimalust, kokku 2^{n-1}. Alumise parema nurga lahtri väärtus on nüüd üheselt määratud tingimusega, et viimase rea summa jagub 2-ga ja viimase veeru summa jagub 3-ga. Tabelit saab täita seega $6^{(n-1)^2}\cdot 3^{n-1}\cdot 2^{n-1}=6^{n^2-n}$ viisil.

b) Kui $n=1$, siis saab tabelit täita ainult ühel viisil, ainsasse ruutu tuleb kirjutada 0. Kui $n=2$, siis asugu ülemises vasakus nurgas arv a. Alumises paremas nurgas on siis arv $(6-a) \bmod 6$. Kirjutame ülemisse paremasse nurka arvu x, mille puhul $x\equiv -a \pmod 2$, $x \equiv a \pmod 3$, ja alumisse vasakusse nurka arvu y, mille puhul $y \equiv a \pmod 2$ ja $y\equiv -a \pmod 3$. Hiina jäägiteoreemi põhjal on arvud x ja y üheselt määratud. Seega sel juhul on tabeli täitmiseks 6 võimalust.

Olgu $n\geqslant 3$. Täidame ülemisest vasakust nurgast algava $(n-1)\times(n-1)$ ruudustiku suvaliselt. Alumisse paremasse nurka kirjutame ainsa arvu, mis on üheselt määratud tingimusega, et selle diagonaali arvude summa jagub 6-ga. Olgu ülemises vasakus nurgas arv a, ülemise rea ülejäänud olemasolevate arvude summa b, vasakpoolseima veeru ülejäänud olemasolevate arvude summa c ning alumisest vasakust nurgast algava diagonaali olemasolevate arvude summa d. Kirjutame ülemisse paremasse nurka arvu x, mis rahuldab tingimusi $x\equiv -a-b \pmod 2$ ja $x\equiv a+c-d \pmod 3$, ning alumisse vasakusse nurka arvu y, mis rahuldab tingimusi $y\equiv a+b-d \pmod 2$ ja $y\equiv -a-c \pmod 3$. Hiina jäägiteoreemi põhjal saab x ja y nii valida täpselt ühel viisil. Siis ülemise rea arvude summa jagub 2-ga, vasakpoolseima veeru arvude summa jagub 3-ga ning alumisest vasakust nurgast algava diagonaali arvude summa jagub nii 2-ga kui ka 3-ga, st 6-ga. Edasi, $n-3$ tühja lahtrit parempoolseimas veerus saab täita 3^{n-3} viisil ja $n-3$ tühja lahtrit alumises reas 2^{n-3} viisil. Järelejäänud kaks lahtrit on üheselt määratud tingimusega, et rea summa jagub 2-ga ja veeru summa 3-ga. Seega on tabeli täitmiseks võimalusi $6^{(n-1)^2}\cdot 3^{n-3}\cdot 2^{n-3}=6^{n^2-n-2}$.

2. *Lahendus 1.* Näitame kõigepealt, et kui x ja y on positiivsed täisarvud, mille puhul $xy \geqslant 1$, siis kehtib võrratus

$$(x^2+1)(y^2+1) \leqslant \left(\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+1\right)^2. \tag{1}$$

Tõepoolest, et $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - 1 \geqslant xy - 1 \geqslant 0$, siis

$$\begin{aligned}(x^2+1)(y^2+1) = (xy-1)^2 + (x+y)^2 \leqslant \\ \leqslant \left(\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-1\right)^2 + (x+y)^2 = \left(\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+1\right)^2.\end{aligned}$$

Tõestatav võrratus on sümmeetriline arvude a, b, c suhtes. Seetõttu võime üldisust kitsendamata eeldada, et $a \geqslant b \geqslant c$. Järelikult $a \geqslant 1$. Olgu $d = \frac{a+b+c}{3}$. Siis

$$ad = \frac{a(a+b+c)}{3} \geqslant \frac{1+1+1}{3} = 1.$$

Rakendades võrratust (1) paaridele (a, d) ja (b, c), saame

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1) \leqslant \left(\left(\frac{a+d}{2}\right)^2+1\right)^2 \left(\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+1\right)^2. \tag{2}$$

Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelise võrratuse põhjal

$$\frac{a+d}{2} \cdot \frac{b+c}{2} \geqslant \sqrt{ad} \cdot \sqrt{bc} \geqslant 1,$$

järelikult võime võrratuse (2) paremale poolele uuesti rakendada võrratust (1). Saame

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1) \leqslant \left(\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2+1\right)^4 = (d^2+1)^4.$$

Siit $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \leqslant (d^2+1)^3$, millest kuupjuurt võttes jõuamegi soovitud võrratuseni.

Lahendus 2. Defineerime funktsiooni $f(x) = \ln(1+x^2)$. Siis omandab tõestatav võrratus kuju

$$\frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3} \leqslant f\left(\frac{a+b+c}{3}\right).$$

Lahenduse 1 võrratus (1) omandab kuju

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} \leqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right), \tag{3}$$

kus x, $y > 0$ ja $xy \geqslant 1$, selle võrratuse saab tõestada nagu lahenduses 1. Üldisust kitsendamata olgu $a \geqslant b \geqslant c$. Siis võrratuse (3) põhjal

$$\frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3} \leqslant \frac{f(a)+2f\left(\frac{b+c}{2}\right)}{3}.$$

Paneme tähele, et $a \geqslant 1$ ja $\dfrac{b+c}{2} \geqslant \sqrt{bc} \geqslant 1$. Et $f''(x) = 2(1-x^2)/(1+x^2)^2$, siis on f poollõigul $[1,\infty)$ nõgus. Seega Jenseni võrratuse põhjal

$$\frac{f(a)+2f\left(\frac{b+c}{2}\right)}{3} \leqslant f\left(\frac{a+2\cdot\frac{b+c}{2}}{3}\right) = f\left(\frac{a+b+c}{3}\right),$$

mis annabki soovitud võrratuse.

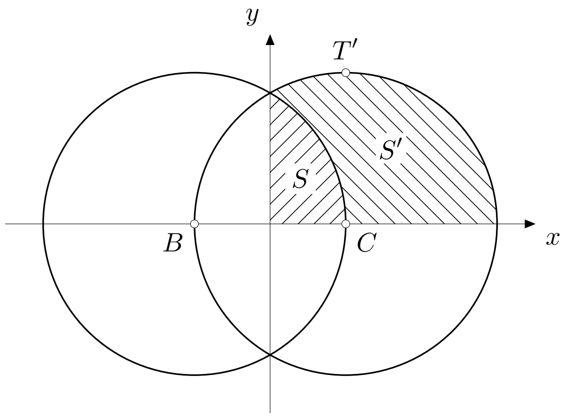
3. Defineerime

$$S = \{(x,y)\colon (x+1)^2 + y^2 \leqslant 4,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$$

(joonis 1). Et hulk S on ringi ja esimese veerandi ühisosa, siis on ta tõkestatud ja kumer. Järelikult sobib tingimuses 1) nimetatud punktiks T iga punkt. Edasi, suvalise punkti $A \in S$ puhul kehtib $|CB| \geqslant |BA| \geqslant |AC|$. Kui kolmnurk $P_1P_2P_3$, kus $|P_1P_2| \geqslant |P_2P_3| \geqslant |P_3P_1|$, teisendada sarnaseks kolmnurgaks nii, et punktid P_1 ja P_2 lähevad vastavalt punktideks C ja B, siis satub punkt P_3 hulka S, kusjuures ta on seal üheselt määratud. Järelikult on täidetud ka tingimus 2).

Defineerime

$$S' = \{(x,y)\colon (x+1)^2 + y^2 \geqslant 4,\ (x-1)^2 + y^2 \leqslant 4,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}.$$



Joonis 1

See hulk on samuti tõkestatud. Tingimuses 1) nimetatud punktiks sobib näiteks punkt $T' = (1, 2)$. Suvalise punkti $A' \in S'$ puhul kehtib $|A'B| \geqslant \geqslant |BC| \geqslant |CA'|$. Kui kolmnurk $P_1P_2P_3$, kus $|P_1P_2| \geqslant |P_2P_3| \geqslant |P_3P_1|$, teisendada sarnaseks kolmnurgaks nii, et punktid P_2 ja P_3 lähevad vastavalt punktideks B ja C, siis satub punkt P_1 hulka S', kusjuures ta on seal üheselt määratud. Järelikult on täidetud ka tingimus 2).

Näitame, et korrutise $|BA| \cdot |BA'|$ väärtus on konstantne. Olgu meil kolmnurk $P_1P_2P_3$, kus $|P_1P_2| \geqslant |P_2P_3| \geqslant |P_3P_1|$. Punktide A ja A' valiku ning sarnasuse põhjal saame

$$|BA| = |BC| \cdot \frac{|P_2P_3|}{|P_1P_2|} \qquad \text{ja} \qquad |BA'| = |BC| \cdot \frac{|P_1P_2|}{|P_2P_3|}.$$

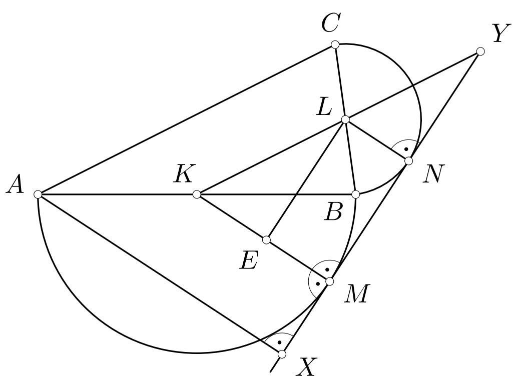
Seega $|BA| \cdot |BA'| = |BC|^2 = 4$ ehk vaadeldav korrutis ei sõltu kolmnurga $P_1P_2P_3$ valikust.

Lahendused

4. *Vastus:* $60°$.

Lahendus 1. Olgu K ja L vastavalt külgede AB ja BC keskpunktid ning M ja N vastavalt punktidest K ja L poolringjoonte ühisele puutujale tõmmatud ristlõikude aluspunktid (joonis 2). Siis $\angle CAX = \angle LKM$. Et KM ja LN on poolringjoonte raadiused, siis $|KM| = \frac{|AB|}{2}$ ja $|LN| = \frac{|BC|}{2}$. Olgu Y sirge KL lõikepunkt poolringjoonte ühise puutujaga. Et kolmnurgad KYM ja LYN on sarnased, siis $\frac{|KY|}{|LY|} = \frac{|KM|}{|LN|}$. Siit $\frac{|KL|+|LY|}{|LY|} = \frac{|AB|}{|BC|}$, kust $|LY| = \frac{|KL|\cdot|BC|}{|AB|-|BC|} = \frac{|AC|}{2} \cdot \frac{|BC|}{\frac{|AC|}{2}} = |BC|$. Seega $\sin\angle NYL = \frac{|LN|}{|LY|} = \frac{\frac{|BC|}{2}}{|BC|} = \frac{1}{2}$ ehk $\angle NYL = 30°$. Järelikult $\angle CAX = \angle LKM = 90° - \angle NYL = 60°$.

Lahendus 2. Nagu ennegi saame $\angle CAX = \angle LKM$ ning $|KM| = \frac{|AB|}{2}$ ja $|LN| = \frac{|BC|}{2}$. Olgu E punktist L sirgele KM tõmmatud ristlõigu aluspunkt. Et $ELNM$ on ristkülik, siis $|EM| = |LN|$. Seega $|EK| = |KM| - |LN| = \frac{|AB|}{2} - \frac{|BC|}{2} = \frac{|AC|}{4}$. Lõik KL on kesklõik, seega $|KL| = \frac{|AC|}{2}$. Järelikult $\cos\angle EKL = \frac{|EK|}{|KL|} = \frac{\frac{|AC|}{4}}{\frac{|AC|}{2}} = \frac{1}{2}$. Seega $\angle CAX = \angle EKL = 60°$.



Joonis 2

5. *Vastus:* $P(x) = c$, kus $1 \leqslant c \leqslant 9$ on täisarv, ja $P(x) = x$.

Lahendus 1. Vaatleme kolme juhtu vastavalt polünoomi P astmele.

1) Eeldame, et $P(x)$ on konstantne polünoom. Olgu $P(x) = c$, kus c on täisarvuline konstant. Siis omandab ülesande võrdus kuju $S(c) = c$. See kehtib parajasti siis, kui $1 \leqslant c \leqslant 9$.

2) Eeldame, et $P(x)$ on lineaarpolünoom. Paneme tähele, et ükskõik milliste positiivsete täisarvude m ja n puhul

$$S(m+n) \leqslant S(m) + S(n), \tag{4}$$

kusjuures võrdus kehtib parajasti siis, kui liitmisel $m+n$ ei teki ülekannet. Olgu $P(x) = ax + b$, kus $a \neq 0$ ja b on täisarvud. Et $P(n)$ on suure n puhul positiivne, siis $a \geqslant 1$. Ülesande võrdus annab siis: iga $n \geqslant 2016$ puhul $S(an+b) = aS(n) + b$. Valides vastavalt $n = 2025$ ja $n = 2020$, saame

$$S(2025a+b) - S(2020a+b) = (aS(2025)+b) - (aS(2020)+b) = 5a.$$

Teiselt poolt, võrdusest (4) järeldub

$$S(2025a+b) = S(2020a+b+5a) \leqslant S(2020a+b) + S(5a).$$

Seega $5a \leqslant S(5a)$. Tingimuse $a \geqslant 1$ tõttu kehtib see ainult siis, kui $a = 1$, misjuhul ülesande võrdus taandub kujule $S(n+b) = S(n) + b$ iga $n \geqslant 2016$ puhul. Siis saame

$$S(n+1+b) - S(n+b) = (S(n+1)+b) - (S(n)+b) = S(n+1) - S(n). \tag{5}$$

Kui $b > 0$, siis valime n nii, et mingi piisavalt suure k puhul $n+1+b = 10^k$. Arv $n+b$ koosneb ainult üheksatest, seega võrduse (5) vasak pool on $1-9k$. Et n on arvust $10^k - 1$ väiksem positiivne arv, siis $S(n) < 9k$. Seega on võrduse (5) parem pool vähemalt $1-(9k-1) = 2-9k$, vastuolu.

Juhtu $b < 0$ käsitleme samamoodi, võttes $n+1$ võrdseks arvu 10 suure astmega. Seega jõuame tulemusele, et $P(x) = x$. Ülesande võrdus on sel juhul triviaalselt täidetud.

3) Eeldame, et polünoomi $P(x)$ aste on vähemalt 2. Olgu polünoomi $P(x)$ pealiige $a_d n^d$, kus $a_d \neq 0$. On ilmne, et $a_d > 0$. Võttes ülesande võrduses $n = 10^k - 1$, saame $S(P(n)) = P(9k)$. Avaldise $P(n)$ väärtus kasvab asümptootiliselt sama kiiresti kui n^d, seetõttu kasvab $S(P(n))$ asümptootiliselt ülimalt niisama kiiresti kui k mingi konstantne kordne. Teiselt poolt kasvab $P(9k)$ asümtpootiliselt sama kiiresti kui k^d. Seetõttu pole viimase võrduse pooled võrdsed, kui k on piisavalt suur, sest $d \geqslant 2$.

Lahendus 2. Olgu $P(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \ldots + a_0$. Ilmselt $a_d > 0$. Leidub selline täisarv $m \geqslant 1$, et iga $0 \leqslant i \leqslant d$ puhul $9^i|a_i| < 10^m$. Valime ülesande võrduses $n = 9 \cdot 10^k$, kus k on piisavalt suur täisarv. Kui leidub selline indeks $0 \leqslant i \leqslant d-1$, et $a_i < 0$, siis on $P(n)$ kõik numbrid, mis asuvad kümnendkohtadel 10^{ik+m} kuni $10^{(i+1)k-1}$, võrdsed 9-ga. Seetõttu $S(P(n)) \geqslant 9(k-m)$. Teiselt poolt on $P(S(n)) = P(9)$ fikseeritud konstant, mistõttu ülesande võrdus ei saa kehtida suure k puhul. Kokkuvõttes saame, et iga $0 \leqslant i \leqslant d-1$ puhul $a_i \geqslant 0$.

Seega on $P(n)$ täisarv, mis koosneb mittenegatiivsetest täisarvudest $a_d \cdot 9^d$, $a_{d-1} \cdot 9^{d-1}, \ldots, a_0$, mille vahel on nullid. Seepärast

$$S(P(n)) = S(a_d \cdot 9^d) + S(a_{d-1} \cdot 9^{d-1}) + \ldots + S(a_0).$$

Koos ülesande võrdusega annab see

$$S(a_d \cdot 9^d) + S(a_{d-1} \cdot 9^{d-1}) + \ldots + S(a_0) = P(9) = a_d \cdot 9^d + a_{d-1} \cdot 9^{d-1} + \ldots + a_0.$$

Et iga positiivse täisarvu m puhul $S(m) \leqslant m$, kusjuures võrdus kehtib ainult juhul $1 \leqslant m \leqslant 9$, siis peab iga $a_i \cdot 9^i$ olema 1 ja 9 vahel asuv positiivne täisarv. See tähendab, et juhul $i \geqslant 2$ peab olema $a_i = 0$. Järelikult $d \leqslant 1$. Samuti $a_1 \leqslant 1$ ja $a_0 \leqslant 9$. Kui $a_1 = 1$ ja $1 \leqslant a_0 \leqslant 9$, siis võtame ülesande võrduses $n = 10^k + (10 - a_0)$, kus k on piisavalt suur. Sellega saame vastuolu, sest

$$S(P(n)) = S(10^k + 10) = 2 \neq 11 = P(11 - a_0) = P(S(n)).$$

Nullpolünoom samuti ei sobi, sest $P(n)$ on suure n puhul positiivne. Järelejäänud kandidaadid on $P(x) = x$ ja $P(x) = a_0$, kus $1 \leqslant a_0 \leqslant 9$. Need rahuldavad ülesande võrdust ja on seetõttu ainsad lahendid.

6. *Vastus:* $n-2$, kui n on paaris; $n-3$, kui n on paaritu.

Lahendus 1. Näitame, et nõutud viisil märgitud diagonaalide arv ei saa olla suurem kui $n-2$. Vaatleme n-nurgas märgitud diagonaalide hulka, kus kõik lõikumised n-nurga sees on täisnurga all; olgu d märgitud diagonaalide arv. Kui ükski kaks märgitud diagonaali n-nurga sees ei lõiku, siis $d \leqslant n-3$ ja väide kehtib. Seetõttu eeldame, et mingid kaks märgitud diagonaali lõikuvad. Vaatame kahte lõikuvat märgitud diagonaali koos kõigi nendega paralleelsete märgitud diagonaalidega, mis lõikuvad n-nurga sees mõne teise märgitud diagonaaliga. Tähistame vaadeldavat diagonaalide komplekti tähega K. Olgu k sinna kuuluvate diagonaalide arv ja l nende paarikaupa erinevate otspunktide arv (siis $l \leqslant 2k$).

Vaatleme pikimat diagonaali ühes kahest sihist, milles komplekti K diagonaalid asetsevad. Selle diagonaali kumbki otstipp ei lange kokku ühegi teise komplekti K diagonaali otstipuga, sest kui komplektis K selline diagonaal leiduks, peaks ta ristuma mõne veelgi pikema diagonaaliga. Sama arutelu kehtib ka ristuva sihi diagonaalide kohta. Eemaldades kummagi sihi pikima diagonaali, jääb järele $k-2$ diagonaali $l-4$ otspunktiga. Iga järelejäänud diagonaali otspunkt kuulub ülimalt kahele järelejäänud diagonaalile, igal diagonaalil on aga täpselt kaks otspunkti. Seega $2(k-2) \leqslant 2(l-4)$, kust $k \leqslant l-2$.

Vaatleme hulknurga järjestikuste tippude hulki, mis jäävad kahe järjestikuse sellise tipu vahele, mis on otspunktiks mõnele komplekti K diagonaalile (need otspunktid kaasa arvatud). Olgu need hulgad $S_1, \ldots, S_l$ tippude arvudega vastavalt $s_1, \ldots, s_l$. Kõik märgitud diagonaalid, mis ei kuulu komplekti K, ühendavad mingi hulga S_i tippe omavahel, sest minemaks hulga S_i tipust mõne teise hulga S_j tippu, peab diagonaal lõikuma S_i emmastkummast äärmisest tipust lähtuva komplekti K diagonaaliga või (nende paralleelsuse korral) nendega ristuva diagonaaliga. Iga hulga S_i tippude vahel on maksimaalselt s_i-2 märgitud diagonaali, sest vaadeldes S_i tippudest moodustuvat hulknurka, on tema mittelõikuvaid diagonaale s_i-3, millele võib lisanduda hulga S_i äärmiste tippude vaheline diagonaal, mis on hulknurgale S_i küljeks. Ka siis, kui hulgas S_i on 2 tippu, saab nende vahel olla 0 ehk s_i-2 märgitud diagonaali.

Kokkuvõttes saame

$$\begin{aligned} d &\leqslant (s_1-2)+\ldots+(s_l-2)+k=(s_1+\ldots+s_l)-2l+k= \\ &=(n+l)-2l+k=n-l+k\leqslant n-l+(l-2)=n-2. \end{aligned}$$

Paaritu n puhul ei lõiku ükski kaks diagonaali täisnurga all, sest diagonaalide ristumisel saame võrrandi $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=90^\circ$, kus α ja β on erinevate diagonaalide otspunktidega määratud kaartele toetuvate kesknurkade suurused. Et aga $\alpha = x\cdot\frac{360^\circ}{n}$ ja $\beta = y\cdot\frac{360^\circ}{n}$ mingite täisarvude x ja y jaoks, siis tuleneb sellest $n=2(x+y)$. Seega paaritu n korral on võimalik märkida ainult $n-3$ hulknurga sees mittelõikuvat diagonaali.

Jääb näidata, et paaris n korral on märgitud diagonaalide maksimaalarv $n-2$. Märgime n-nurga kõik mingist ühest tipust v väljuvad $n-3$ diagonaali. Olgu keskmise diagonaali teine otspunkt v'; märgime ka v' naabertippe ühendava diagonaali. Viimane diagonaal lõikub ainult v ja v' vahelise diagonaaliga ja see lõikumine toimub täisnurga all.

Lahendus 2. Paaritu n korral saab märkida kõik $n-3$ ühest tipust väljuvat diagonaali, Tõestame, et rohkem diagonaale nõutud viisil märkida ei saa. Selleks piisab näidata, et ükski kaks suvaliselt tõmmatud diagonaali ei saa ristuda. Kuna n on paaritu, jääb suvalisest diagonaalist ühele poole paaris-ja teisele poole paaritu arv hulknurga tippe. Külg, mis ühendab kaht keskmist tippu poolel, kus on neid paarisarv, on valitud diagonaaliga paralleelne. Seega peaks kahe ristuva diagonaali korral leiduma ka kaks ristiasetsevat külge. See on aga võimalik vaid juhul, kui $n \equiv 0 \pmod 4$, vastuolu.

Kui $n \equiv 2 \pmod 4$, siis saab tsükliliselt märkida $\frac{n}{2}$ diagonaali, mille otspunktide vahele jääb täpselt üks hulknurga tipp. Edasi märgime kõik diagonaalidest tekkinud $\frac{n}{2}$-nurga ühest tipust väljuvad $\frac{n}{2} - 3$ diagonaali, mis juba märgitud diagonaalidega ei lõiku. Lõpuks märgime samast tipust vastastippu mineva diagonaali, mis ristub vastastipu naabertippe ühendava märgitud diagonaaliga. Kokku märgitakse nii $n - 2$ diagonaali. Kui $n \equiv 0 \pmod 4$, siis märgime algul jällegi tsükliliselt $\frac{n}{2}$ diagonaali, mille otspunktide vahele jääb täpselt üks hulknurga tipp, ja märgime diagonaalidest tekkinud $\frac{n}{2}$-nurgas $\frac{n}{2} - 2$ diagonaali juba vaadeldud algoritmi järgi.

Tõestame, et rohkem diagonaale nõutud viisil märkida ei saa. Selleks näitame algul, et kõik märgitud diagonaalid, mis mõne teise märgitud diagonaaliga lõikuvad, asetsevad kahes ristuvas sihis. Tõepoolest, fikseerides ühe lõikuvate märgitud diagonaalide paari, on kahe erineva diagonaali otspunktide vahel vähem kui pool hulknurga tippudest. Lisades teise paari ristuvaid diagonaale, kehtib sama ka sellele. See tähendab, et teine paar ei mahu ära ühessegi esimese diagonaalide paari poolt jäetud „aknasse“. Seega vähemalt üks diagonaal esimesest ja üks diagonaal teisest paarist lõikuvad, mis tähendab, et nad kõik peavad asetsema kahes ristuvas sihis.

Olgu d märgitud diagonaalide arv ja k märgitud diagonaalide vaheliste lõikepunktide arv. Vaatleme algse hulknurga tükke, milleks märgitud diagonaalid ta jaotavad; kõik need tükid on hulknurgad, mille tipud asetsevad algse hulknurga tippudes või märgitud diagonaalide lõikepunktides. Kõigi tükkide sisenurkade suuruste summa on ilmselt $(n - 2) \cdot 180^\circ + k \cdot 360^\circ$. Tükkide kui hulknurkade tippude arvude summa on aga $n + 2d + 4k$, sest algsel hulknurgal on n tippu, iga diagonaal lisab 2 oma otspunkti ja iga lõikepunkt 4. Kui w tähistab tükkide arvu, siis $(n - 2) \cdot 180^\circ + k \cdot 360^\circ = (n + 2d + 4k - 2w) \cdot 180^\circ$, kust $n - 2 + 2k = n + 2d + 4k - 2w$ ehk $w = d + k + 1$.

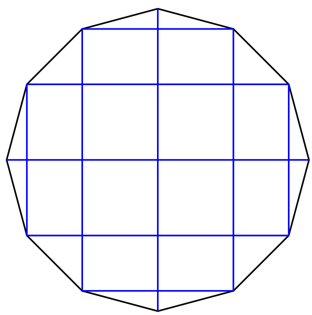
Olgu w' vähemalt 4 tipuga tükkide arv. Kõik tükid, millel on vähemalt kaks täisnurka, on vähemalt 4 tipuga, seega iga diagonaali iga kahe naaberlõikepunkti vaheline lõik on ühe sellise tüki küljeks. Olgu märgitud horisontaalseid diagonaale a ja vertikaalseid b, kusjuures üldisust kitsendamata $a \leqslant b$. Siis tükke, mille kaks täisnurka on järjestikused lõikepunktid mõnel märgitud horisontaalsel diagonaalil ja mis ise jäävad sellest diagonaalist kõrgemale, on $k - a$. Tükke, mille kaks täisnurka on järjestikused lõikepunktid horisontaalsel diagonaalil ja mis jäävad sellest diagonaalist madalamale ning millest otse all pole ühtki märgitud horisontaalset diagonaali, on $b-1$. Seega $w' \geqslant k-a+b-1 \geqslant k-1$.

Seega

$$n+2d+4k \geqslant 4w'+3(w-w') = 3w+w' \geqslant$$
$$\geqslant 3w+k-1 = 3(d+k+1)+k-1 = 3d+4k+2,$$

kust $d \leqslant n-2$.

Märkus. Juhul $n \equiv 0 \pmod 4$ saab töötava konstruktsiooni ka järgmiselt. Nummerdame tipud järjest arvudega $0, 1, \ldots, n-1$. Märgime diagonaalid, mis ühendavad tippu i tipuga $\frac{n}{2}-i$ iga $i = -\frac{n}{4}+1, \ldots, \frac{n}{4}-1$ korral (neid on $\frac{n}{2}-1$) ja kõik nendega ristuvad diagonaalid (neid on samuti $\frac{n}{2}-1$). Kokku märgime nii $n-2$ diagonaali, mis kõik asetsevad kahes ristuvas sihis (joonis 3 kujutab olukorda juhul $n=12$).



Joonis 3

Hindamisskeemid

1. *(Oleg Košik)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.
   - Osa a): 3 p
   - Osa b) juht $n = 2$: 1 p
   - Osa b) juht $n \geqslant 3$: 3 p

2. *(Heiki Niglas)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.
   - Täislahendus: 7 p
   - Kasutu proovimine: 0 p

   Kasulike tähelepanekute eest võib saada ka osalisi punkte, kui lahendust on võimalik täislahenduseks jätkata. Osalejad võivad kaasa mõelda, kas nende lahenduses leiab midagi kasulikku.

3. *(Sandra Schumann)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.
   - Õigesti defineeritud hulgad S ja S' ja näidatud, et leiduvad punktid T ja T': 2 p
   - Näidatud, et kolmnurgad on nendes hulkades üheselt määratud: 2 p
   - Leitud, missugused kolmnurkade küljed vastavad üksteisele: 2 p
   - Kolmnurkade sarnasuse põhjal näidatud, et $|BA| \cdot |BA'| = 4$: 1 p

Hindamisskeemid

4. *(Janno Veeorg)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Vastus ilma põhjenduseta: 0 p
- Mõni tõestusele mitte lähemale viiv tähelepanek: 0 p
- Jõutud järeldusele, et punktist L sirgele KM tõmmatud ristlõigu aluspunkti kaugus punktist K on $\frac{|AC|}{4}$: 3 p
- Täislahendus: 7 p

5. *(Urve Kangro)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et $P(x)$ kordajad peavad olema mittenegatiivsed: 2 p
- Põhjendatud, et $P(x)$ on ülimalt 1. astme polünoom: 2 p
- Näidatud, et $a_1 = 1$: 1 p
- Näidatud, et kui $a_1 = 1$, siis $a_0 = 0$: 1 p
- Näidatud, et kui $a_1 = 0$, siis $0 \leqslant a_0 \leqslant 9$: 1 p

Kui midagi muud punktiväärilist ei olnud, siis ainult täieliku õige vastuse eest sai 1 punkti. Lisapunkti võis saada ka mõne kasuliku tähelepaneku eest, nagu näiteks $a_i \leqslant 9$, või tõestuse eest, et $S(a+b) \leqslant S(a) + S(b)$, kui $a, b > 0$.

Peaaegu kõigis töödes oli vaikimisi tehtud eeldus, et $a_i \geqslant 0$ iga i korral.

6. *(Härmel Nestra)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antavad punktid summeeriti.

- Antud täielik õige vastus koos sobivate näidetega: 1 p
- Põhjendatud, et paaritu n korral rohkem diagonaale märkida ei saa: 1 p
- Tõestatud, et paaris n korral rohkem diagonaale märkida ei saa: 5 p

  Sealhulgas
  - Tõestatud, et kaks paari lõikuvaid diagonaale peavad ka omavahel lõikuma: *1 p*

Mõned õpilased olid arvanud tipud sisepiirkonda kuuluvaks. Kujundi raja (hulknurga puhul tipud, küljed) ei kuulu tema sisepiirkonda.

Kõige enam probleeme valmistas oodatult tõestamine, et paaris n korral ei saa üle $n-2$ diagonaali märkida. Enamus seda tõsiselt ei proovinudki.