Valikvõistlus 2016

IMO'16 Eesti võistkonna valikvõistlus

14.–15. aprill 2016 **Esimene päev**

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.
Palun vormistage igale paberile ainult ühe ülesande lahendust!

1. Laual on k kuhja, igaühes erinev positiivne arv kive. Jüri ja Mari teevad kordamööda käike, alustab Jüri. Igal käigul tuleb valida üks kuhi ja võtta sealt üks või enam kivi omale, lisaks võib soovi korral sama kuhja ülejäänud kive oma äranägemise järgi teistesse kuhjadesse ümber paigutada (varem mängu käigus tühjaks saanud kuhjadesse aga kive panna ei tohi). Võidab see, kes eemaldab laualt viimase kivi. Milliste positiivsete täisarvude k korral saab Jüri mängu võita kivide suvalise tingimustele vastava algse jaotuse ja Mari suvalise vastumängu korral?

2. Olgu p algarv. Leia kõik täisarvude (mitte tingimata positiivsete) kolmikud (a, b, c), mille puhul

$$a^b b^c c^a = p.$$

3. Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis iga $x, y \in \mathbb{R}$ puhul rahuldavad võrdust

$$f(2^x + 2y) = 2^y f(f(x)) f(y).$$

IMO'16 Eesti võistkonna valikvõistlus

14.–15. aprill 2016 **Teine päev**

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.
Palun vormistage igale paberile ainult ühe ülesande lahendust!

4. Tõesta, et iga positiivse täisarvu $n \geqslant 3$ korral kehtib võrratus

$$2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n-1]{n} > n.$$

5. Olgu O teravnurkse kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt. Olgu c_1 ja c_2 kolmnurkade ABO ja ACO ümberringjooned. Olgu P ja Q sellised punktid vastavalt ringjoontel c_1 ja c_2, et OP on ringjoone c_1 diameeter ja OQ on ringjoone c_2 diameeter. Ringjoonele c_1 punktis P tõmmatud puutuja ja ringjoonele c_2 punktis Q tõmmatud puutuja lõikuvad punktis T. Olgu sirge AC ja ringjoone c_1 teine lõikepunkt D. Tõesta, et punktid D, O ja T on ühel sirgel.

6. Ringjoonel on märgitud n punkti ($n \geqslant 1$), mis jaotavad ringjoone n võrdseks kaareks. Iga positiivse täisarvu x korral tähistagu $P_n(x)$ võimaluste arvu värvida kõik need punktid, kasutades selleks värve etteantud x erineva värvi hulgast, nii et alati, kui pööratakse värvimist ümber ringjoone keskpunkti mingi nurga $i \cdot \dfrac{360^\circ}{n}$ võrra, kus i on n-st väiksem positiivne täisarv, saame algsest erineva värvimise (st vähemalt üks punkt saab värvitud algsest erineva värviga). Tõesta, et funktsioon $P_n(x)$ avaldub polünoomina muutujast x.

Märkus. Polünoomiks muutujast x nimetatakse funktsiooni kujul

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

kus m on mingi naturaalarv ning $a_m, a_{m-1}, \ldots, a_1, a_0$ on suvalised kordajad, $a_m \neq 0$.

Отборочный конкурс на ММО'16

14–15 апреля 2016 г. **Первый день**

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.
Пожалуйста, оформляйте на каждом листе не более одного задания!

1. На столе k куч, в каждой разное положительное число камней. Юра и Маша ходят по очереди, начинает Юра. При каждом ходе нужно выбрать одну кучу и взять из неё один или больше камней себе, кроме этого можно при желании остальные камни данной кучи (все или часть из них) перераспределить между остальными кучами согласно своему усмотрению (в кучи, которые ранее в ходе игры стали пустыми, камни класть больше нельзя). Выигрывает тот, который уберёт со стола последний камень. При каких значениях положительного целого числа k сможет Юра победить при любом начальном распеределнии камней между кучами и любой стратегии Маши?

2. Пусть p – простое число. Найти все тройки (a, b, c) целых чисел (не обязательно положительных), при которых

$$a^b b^c c^a = p.$$

3. Найти все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которые при любых $x, y \in \mathbb{R}$ удовлетворяют равенству

$$f(2^x + 2y) = 2^y f(f(x)) f(y).$$

Отборочный конкурс на ММО'16

14–15 апреля 2016 г. **Второй день**

Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.
Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.
Пожалуйста, оформляйте на каждом листе не более одного задания!

4. Доказать, что при любом положительном целом числе $n \geqslant 3$ выполняется неравенство

$$2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n-1]{n} > n.$$

5. Пусть O – центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Пусть c_1 и c_2 – описанные окружности треугольников ABO и ACO. Пусть P и Q – такие точки соответственно на окружностях c_1 и c_2, что OP – диаметр окружности c_1, а OQ – диаметр окружности c_2. Касательная к окружности c_1 в точке P и касательная к окружности c_2 в точке Q пересекаются в точке T. Пусть D – вторая точка пересечения прямой AC и окружности c_1. Доказать, что точки D, O и T лежат на одной прямой.

6. На окружности отмечены n точек ($n \geqslant 1$), которые делят окружность на n равных дуг. Для каждого положительного целого числа x обозначим за $P_n(x)$ число возможностей так раскрасить все эти точки, имея в наличии краски x разных цветов, что всегда, когда раскраску поворачивают вокруг центра окружности на некоторый угол $i \cdot \dfrac{360^\circ}{n}$, где i – некоторое положительное целое число, меньшее n, то получают раскраку, отличную от изначальной (т.е. по крайней мере одна точка раскрашена в другой цвет по сравнению с изначальной). Доказать, что функция $P_n(x)$ выражается многочленом от переменной x.

Примечание. Многочленом от переменной x называют функцию в виде

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где m – некоторое натуральное число, а $a_m, a_{m-1}, \ldots, a_1, a_0$ – произвольные множители, $a_m \neq 0$.

Lahendused

1. *Vastus:* iga k korral.

Lahendus 1. Nimetame *tasakaaluseisuks* seisu, kus saab mittetühjad kuhjad jagada paaridesse nii, et iga paari mõlemas kuhjas on võrdselt kive. Näitame, et tasakaaluseisus saab võita teisena käiv mängija. Valigu käigul olev mängija mingi kuhja K, eemaldagu sealt n kivi ja tõstku veel a_1 kivi esimesse kuhja, a_2 kivi teise kuhja jne. Kui kuhja K jääb veel kive, siis vastane võib eemaldada kuhja K paarilisest samuti n kivi ja tõsta a_1 kivi esimese kuhja paarilisse, a_2 kivi teise kuhja paarilisse jne. Kuna alustaja ei eemalda vaadeldaval käigul kuhja K paarilisest ühtki kivi, on pärast tema käiku seal vastase käiguks piisavalt kive. Kui esimene mängija teeb oma käigul kuhja K tühjaks, siis vastane sooritab eelkirjeldatud käigu järgmiste erinevustega:

- jätab ümber paigutamata kivid, mis peaksid minema kuhja K (kui alustaja tõstis kive kuhja K paarilisse);
- võtab kuhja K paarilisest niipalju kive endale, et käigu tulemusel jääb kuhja K paariline samuti tühjaks.

Nii on pärast teise mängija käiku laual jälle tasakaaluseis (teisel juhul on laual kaks mittetühja kuhja vähem kui enne) ning teine mängija saab ka järgnevatel käikudel samamoodi vastata. Kuna tasakaaluseisus on kive vähemalt kahes kuhjas, ei saa alustaja kunagi võita. Et kivide arv järjest väheneb, eemaldab viimase kivi teine mängija.

Näitame nüüd, et Jüri saab esimesel käigul tekitada tasakaaluseisu. Olgu üldisust kitsendamata kuhjad nummerdatud kivide arvu kasvamise järjestuses; tähistame kuhjades olevate kivide arvud $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$. Kui k on paaritu arv, tõstku Jüri suurimast kuhjast $a_2 - a_1$ kivi esimesse kuhja, $a_4 - a_3$ kivi kolmandasse kuhja jne, kuni $a_{k-1} - a_{k-2}$ kivi kuhja numbriga $k-2$, suurima kuhja teised kivid võtku Jüri endale. Selline käik on võimalik, sest

$$\begin{aligned}(a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \ldots + (a_{k-1} - a_{k-2}) \leqslant \\ \leqslant (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \ldots + (a_{k-1} - a_{k-2}) + (a_k - a_{k-1}) = \\ = a_k - a_1 < a_k.\end{aligned}$$

Kui k on paarisarv, tõstku Jüri $a_3 - a_2$ kivi teise kuhja, $a_5 - a_4$ kivi neljandasse kuhja jne, kuni $a_{k-1} - a_{k-2}$ kivi kuhja numbriga $k - 2$, suurima kuhja ülejäänud kividest $a_k - a_1$ tükki võtku Jüri endale. Selline käik on võimalik, sest

$$\begin{aligned}&(a_3 - a_2) + (a_5 - a_4) + \ldots + (a_{k-1} - a_{k-2}) < \\ &\quad < (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \ldots + (a_{k-1} - a_{k-2}) + (a_k - a_{k-1}) = \\ &\quad = a_k - a_1.\end{aligned}$$

Eelneva põhjal nähtub, et Jüril leidub võitev strateegia.

Lahendus 2. Defineerime *tasakaaluseisu* nagu lahenduses 1.

Esiteks näitame, et suvalisest seisust, mis pole tasakaaluseis, saab ühe käiguga tekitada tasakaaluseisu. Jätame kõik võrdse kivide arvuga kuhjade paarid arvestusest välja. Sarnaselt lahendusele 1 saab näidata, et järelejäänud kuhjadest suurima kivid saab käigureeglitele vastavalt jaotada nii, et tekib tasakaaluseis.

Teiseks näitame, et tasakaaluseisust ei saa ühe käiguga tekitada tasakaaluseisu. Oletame väitevastaselt, et see on võimalik. Suvalise positiivse täisarvu x korral tähistagu u_x ja v_x vähemalt x kiviga kuhjade arvu vastavalt tasakaaluseisus enne vaadeldavat käiku ning tasakaaluseisus pärast seda käiku. Ilmselt on kõik arvud u_x ja v_x paaris. Ühel käigul saab kivide arv väheneda ainult ühes kuhjas; seega kui kivide eemaldamisel vähemalt x kiviga kuhjade arv väheneb, peab paarsuse taastamiseks mingi väiksema kuhja kivide arv tõusma vähemalt x-ni. Seega iga x korral $u_x \leqslant v_x$.

Nummerdame igas enne käiku laual olevas kuhjas kivid täisarvudega alates 1-st. Ilmselt on kive numbriga 1 täpselt u_1 tükki, kive numbriga 2 täpselt u_2 jne. Seega kivide koguarv laual enne vaadeldavat käiku avaldub summana $u_1 + u_2 + \ldots$, kus summeerimine toimub üle kõigi positiivsete täisarvude. Analoogselt avaldub kivide koguarv pärast vaadeldavat käiku summana $v_1 + v_2 + \ldots$. Et eelneva põhjal $u_x \leqslant v_x$, peaks kivide arv laual pärast käiku olema vähemalt niisama suur kui enne käiku, mis on aga vastuolus käigureeglitega. Vastuolu näitab, et tasakaaluseisust viivad kõik käigud seisudesse, mis pole tasakaaluseisud.

Kuna algseis pole tasakaaluseis ja kaotusseis (kus igas kuhjas on 0 kivi) on tasakaaluseis, siis Jüri saab kaotust vältida. Et kivide arv laual iga käiguga väheneb, peab varem või hiljem kaotusseisu jääma Mari.

2. *Vastus:* kui $p = 2$, siis $(2, 1, 1)$, $(2, 1, -1)$, $(2, 2, -1)$ ja $(-2, 2, -1)$ ning nende tsüklilised permutatsioonid; kui $p > 2$, siis $(p, 1, 1)$ ja $(-p, 1, -1)$ ning nende tsüklilised permutatsioonid.

Eeldame, et a, b, c rahuldavad võrrandit. Et $p > 0$, siis $|a|^b |b|^c |c|^a = p$. Ükski arvudest a, b, c ei ole null, sest muidu oleks vasaku poole väärtus 0 või 1.

Tõestame, et SÜT$(a,b,c) = 1$. Olgu d arvude a, b ja c ühine tegur. Siis jagub algarvu p astendaja iga arvu $|a|^b$, $|b|^c$, $|c|^a$ kanoonilises esituses arvuga d. Järelikult jagub p astendaja ka korrutise $|a|^b|b|^c|c|^a$ kanoonilises esituses arvuga d. Et see korrutis on p, siis $|d| = 1$.

Tõestame, et $|a|$, $|b|$, $|c|$ on kõik arvu p astmed. Olgu q algarv, mis erineb algarvust p, ning α, β, γ vastavalt algteguri q astendajad positiivsete arvude $|a|$, $|b|$, $|c|$ kanoonilistes esitustes. Siis $\alpha b + \beta c + \gamma a = 0$. Kui oletada, et mõni arvudest α, β, γ on positiivne, siis peab positiivseid arve olema vähemalt kaks. Et aga SÜT$(a,b,c) = 1$, on vähemalt üks vaadeldavatest arvudest null; üldisust kitsendamata olgu $\gamma = 0$. Siis $\alpha b + \beta c = 0$. Siit $\alpha|b| = \beta|c|$. Järelikult arv $\beta|c|$ jagub arvuga $|b|$, mistõttu $\beta|c|$ jagub arvuga q^β. Kuna q^β ja $|c|$ on ühistegurita, siis β jagub arvuga q^β. See tähendab, et $q^\beta \leqslant \beta$, mis on võimatu. Järelikult $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Niisiis $|a| = p^\kappa$, $|b| = p^\lambda$, $|c| = p^\mu$. Võrdus $|a|^b|b|^c|c|^a = p$ omandab kuju $\kappa b + \lambda c + \mu a = 1$. Et SÜT$(a,b,c) = 1$, siis on vähemalt üks arvudest κ, λ, μ null. Samas ei saa nad olla kõik nullid. Seega on kaks võimalust.

- Täpselt üks arvudest κ, λ, μ on nullist suurem. Olgu üldisust kitsendamata $\kappa > 0$, $\lambda = \mu = 0$. Eelsaadud võrdus taandub võrduseks $\kappa b = 1$. Siit $\kappa = 1$ ja $b = 1$. Järelikult $|a| = p$. Kui $a = p$, siis ülesande võrdus annab $p^1 1^c c^p = p$ ehk $c^p = 1$. Juhul $p = 2$ saame siit $c = \pm 1$, millele vastavad kolmikud $(2,1,1)$ ja $(2,1,-1)$. Juhul $p > 2$ saame $c = 1$, millele vastab kolmik $(p,1,1)$. Kui aga $a = -p$, siis ülesande võrdus annab $(-p)^1 1^c c^p = p$ ehk $c^p = -1$. Juhul $p = 2$ tekib vastuolu, juhul $p > 2$ aga saame $c = -1$, millele vastab kolmik $(-p,1,-1)$. Kõik saadud kolmikud rahuldavad antud võrrandit.
- Täpselt kaks arvudest κ, λ, μ on nullist suuremad. Olgu üldisust kitsendamata $\kappa > 0$, $\lambda > 0$, $\mu = 0$. Siis $\kappa b + \lambda c = 1$. Et $\mu = 0$, siis $|c| = 1$ ehk $c = 1$ või $c = -1$. Kui $c = 1$, siis $\kappa b = 1 - \lambda$. Siit ainukese võimalusena $b = -p^\lambda$. Kuid nüüd $p^\lambda \leqslant \kappa p^\lambda = -\kappa b = \lambda - 1 < \lambda$, mis on võimatu. Kui aga $c = -1$, siis $\kappa b = 1 + \lambda$, millest $b = p^\lambda$. Juhul $p = 2$ saame võrrandi $\kappa p^\lambda = 1 + \lambda$ ainukeseks lahendiks $\kappa = \lambda = 1$. Siit $|a| = 2$, mis annab kolmikud $(2,2,-1)$ ja $(-2,2,-1)$. Mõlemad rahuldavad antud võrrandit. Juhul $p > 2$ saame analoogiliselt eelnevaga vastuolu.

3. *Vastus:* $f(x) = 0$ ja $f(x) = 2^x$.

Võttes ülesande võrrandis $y = -2^{x-1}$, saame

$$f(0) = \frac{1}{2^{2^{x-1}}} f(f(x)) f(-2^{x-1}).$$

Kui vähemalt ühe x puhul $f(-2^x) = 0$, siis $f(0) = 0$. Sel juhul võttes ülesande võrduses $x = 0$ ja y, saame $f(1 + 2y) = 0$ ehk $f \equiv 0$.

Eeldame nüüd, et iga x puhul $f(-2^x) \neq 0$. Võttes ülesande võrrandis $y = -2^x$, tekib võrdus

$$f(-2^x) = \frac{1}{2^{2^x}} f(f(x)) f(-2^x).$$

Et iga x puhul $f(-2^x) \neq 0$, siis iga x puhul $f(f(x)) = 2^{2^x}$. Asendades selle ülesande võrrandisse ja võttes $y = 0$, saame, et iga x puhul $f(2^x) = 2^{2^x} f(0)$, millest järeldub, et iga positiivse x puhul

$$f(x) = 2^x f(0).$$

Asendades $f(f(x)) = 2^{2^x}$ aga esimese lõigu võrdusesse, saame

$$f(-2^{x-1}) = \frac{2^{2^{x-1}}}{2^{2^x}} \cdot f(0) = 2^{-2^{x-1}} f(0),$$

millest järeldub, et $f(x) = 2^x f(0)$ kehtib ka iga negatiivse x puhul.

Kui $f(0) = 0$, siis iga x puhul $f(x) = 0$, mis oleks vastuolus meie eeldusega. Järelikult $f(0)$ on kas positiivne või negatiivne. Seega võime võrduses $f(f(x)) = 2^{2^x}$ võtta $x = 0$ ja rakendada võrdust $f(x) = 2^x f(0)$:

$$2 = 2^{2^0} = f(f(0)) = 2^{f(0)} \cdot f(0).$$

Nii $f(0) < 1$ kui ka $f(0) > 1$ viib vastuolule, järelikult $f(0) = 1$. Seega ainuke nullist erinev lahend on $f(x) = 2^x$.

Kontroll näitab, et leitud kaks lahendit rahuldavad antud võrrandit.

Lahendused

4. *Lahendus 1.* Iga täisarvu k, $1 < k \leqslant n$, jaoks saame

$$k-1 = \frac{(k-1)^2}{k-1} = \frac{k(k-2)+1}{k-1} \geqslant \sqrt[k-1]{k^{k-2}} = \sqrt[k-1]{\frac{k^{k-1}}{k}} = \frac{k}{\sqrt[k-1]{k}},$$

kus hindamisel on kasutatud aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust arvude $k, \ldots, k$ ja 1 jaoks (arvu k on $k-2$ korda). Sellest tulenevalt $\sqrt[k-1]{k} \geqslant \dfrac{k}{k-1}$ iga $k = 2, 3, \ldots, n$ korral, kusjuures võrdus kehtib ainult juhul $k = 2$. Järelikult

$$2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n-1]{n} > \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n-1} = n.$$

Lahendus 2. Newtoni binoomvalemiga saame

$$\left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1} = \left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^{k-1} = \frac{\binom{k-1}{0}}{(k-1)^0} + \frac{\binom{k-1}{1}}{(k-1)^1} + \ldots + \frac{\binom{k-1}{k-1}}{(k-1)^{k-1}},$$

kus lahtikirjutuses on täpselt k liiget. Ilmselt $\dfrac{\binom{k-1}{0}}{(k-1)^0} = 1$ ja $\dfrac{\binom{k-1}{1}}{(k-1)^1} = 1$ ning $1 < i \leqslant k-1$ korral

$$\begin{aligned} \frac{\binom{k-1}{i}}{(k-1)^i} &= \frac{(k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot (k-i)}{i! \cdot (k-1)^i} \\ &< \frac{(k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot (k-i)}{(k-1)^i} < 1. \end{aligned}$$

Seega $\left(\dfrac{k}{k-1}\right)^{k-1} \leqslant \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{k \text{ liiget}} = k$, kust saame $\sqrt[k-1]{k} \geqslant \dfrac{k}{k-1}$, kusjuures $k \geqslant 3$ korral kehtib range võrratus. Edasi jätkame nagu lahenduses 1.

Lahendus 3. Võrratust $\sqrt[k-1]{k} \geqslant \dfrac{k}{k-1}$ saab tõestada ka järgmiselt. On teada, et jada üldliikmega $\left(1 + \dfrac{1}{m}\right)^m$ on kasvav ja tõkestatud arvuga e. Seega $\left(\dfrac{k}{k-1}\right)^{k-1} = \left(1 + \dfrac{1}{k-1}\right)^{k-1} < \mathrm{e} < k$, kui $k \geqslant 3$. Juhul $k = 2$ saame

$\left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1} = \left(\frac{2}{1}\right)^{1} = 2 = k$. Seega võrratus $\left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1} \leqslant k$ ja ühtlasi võrratus $\sqrt[k-1]{k} \geqslant \frac{k}{k-1}$ kehtib iga täisarvu $k > 1$ korral.

Lahendus 4. Näitame, et $\sqrt[k-1]{k} > \sqrt[k]{k+1}$, kui $k \geqslant 2$. Võrratus on samaväärne võrratusega $\frac{1}{k-1} \ln k > \frac{1}{k} \ln(k+1)$. Uurime funktsiooni $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$. Kuna

$$f'(x) = \frac{1 - \frac{1}{x} - \ln x}{(x-1)^2}$$

ning ilmselt $1 - \frac{1}{x} - \ln x < 0$, kui $x \geqslant \mathrm{e}$, siis võrratus on tõestatud, kui $k \geqslant 3$. Juht $k = 2$ on ilmne.

Järelikult $\sqrt[k-1]{k} > \sqrt[n-1]{n}$, kui $k = 2, 3, \ldots, n-1$, ning

$$2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n-1]{n} > \left(\sqrt[n-1]{n}\right)^{n-1} = n.$$

Lahendus 5. Näitame, et $k^k > (k+1)^{k-1}$, kui $k \geqslant 2$. Juht $k = 2$ on ilmne. Eeldame nüüd, et mingi k korral $k^k > (k+1)^{k-1}$, ja tõestame võrratuse $(k+1)^{k+1} > (k+2)^k$. Selleks märkame, et

$$\begin{aligned}
(k+1)^{k+1} \cdot (k+1)^{k-1} &= (k+1)^{2k} \\
&= \left(k^2 + 2k + 1\right)^k \\
&> \left(k^2 + 2k\right)^k \\
&= (k(k+2))^k \\
&= k^k \cdot (k+2)^k,
\end{aligned}$$

mistõttu $\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} > \frac{(k+2)^k}{(k+1)^{k-1}}$. Selle võrratuse ja induktsiooni eelduse põhjal saame nüüd

$$(k+1)^{k+1} = \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} \cdot k^k > \frac{(k+2)^k}{(k+1)^{k-1}} \cdot (k+1)^{k-1} = (k+2)^k.$$

Tõestatud võrratus $k^k > (k+1)^{k-1}$ on ilmselt samaväärne võrratusega $\sqrt[k-1]{k} > \sqrt[k]{k+1}$. Edasi jätkame nagu lahenduses 4.

Lahendus 6. Võrratust $\sqrt[k-1]{k} > \sqrt[k]{k+1}$ saab tõestada ka järgnevalt. See võrratus on ilmselt samaväärne võrratusega $k^k > (k+1)^{k-1}$, mis on omakorda samaväärne võrratusega $k \cdot \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k-1} > 1$ ehk

$$k \cdot \underbrace{\frac{k}{k+1} \cdot \ldots \cdot \frac{k}{k+1}}_{k-1 \text{ tegurit}} > 1.$$

Märkame, et

$$x - x \cdot \frac{k}{k+1} = x \cdot \left(1 - \frac{k}{k+1}\right) = x \cdot \frac{1}{k+1} < 1,$$

kui $x < k + 1$. Seega korrutamine iga teguriga $\dfrac{k}{k+1}$ vähendab jooksvat korrutist vähem kui 1 võrra, kokkuvõttes väheneb jooksev korrutis vähem kui $k-1$ võrra. Seega $k \cdot \left(\dfrac{k}{k+1}\right)^{k-1} > k - (k-1) = 1$, mott.

Lahendus 7. Märkame, et

$$\ln(k+1) - \ln k = \int_k^{k+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x < \frac{1}{k}.$$

Seega $k \ln(k+1) - k \ln k < 1$ ehk $k \ln k - (k-1)\ln(k+1) > \ln(k+1) - 1$. Kui $k \geqslant 2$, siis $\ln(k+1) - 1 > 0$, mistõttu $k \ln k > (k-1)\ln(k+1)$, kust saame $k^k > (k+1)^{k-1}$ ehk $\sqrt[k-1]{k} > \sqrt[k]{k+1}$. Edasi jätkame nagu lahenduses 4.

Lahendus 8. Kasutades geomeetrilise ja harmoonilise keskmise vahelist võrratust arvude $1, \ldots, 1, k$ jaoks (arvu 1 on $k-2$ korda), saame

$$\sqrt[k-1]{k} \geqslant \frac{k-1}{k-2+\frac{1}{k}} = \frac{(k-1)k}{(k-2)k+1} = \frac{(k-1)k}{(k-1)^2} = \frac{k}{k-1},$$

kusjuures võrdus kehtib juhul $k = 2$. Jätkame nagu lahenduses 1.

5. Et OP on ringjoone c_1 diameeter, siis $\angle OAP = 90^\circ$. Analoogselt saame $\angle OAQ = 90^\circ$. Järelikult on punktid P, A ja Q ühel sirgel.

Kuna OP on ringjoone c_1 diameeter ja PT sama ringjoone puutuja, siis $\angle OPT = 90^\circ$. Analoogselt saame $\angle OQT = 90^\circ$. Seega $OPTQ$ on kõõlnelinurk.

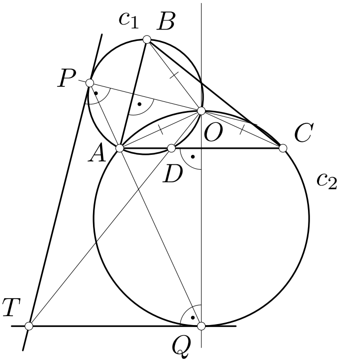
Et O on kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt, siis $|OA| = |OB|$, mistõttu on ringjoone c_1 diameeter OP risti kõõluga AB. Niisiis on sirged PT ja AB paralleelsed, kuna mõlemad on risti sirgega OP. Nüüd saame

$$\angle TOQ = \angle TPQ = \angle TPA = \angle BAP = \angle BOP = 90^\circ - \angle ABO.$$

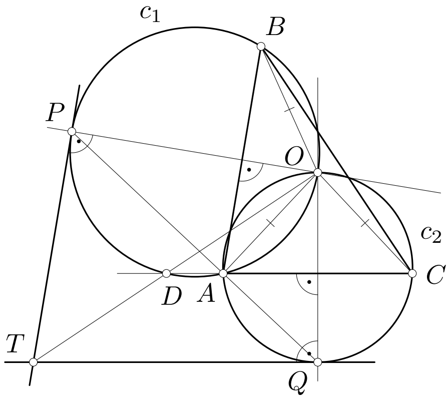
Teisalt, ringjoone c_1 kaarele AO toetuvate piirdenurkade võrdsuse tõttu $\angle CDO = \angle ABO$ (joonised 1 ja 2 esitavad kaks võimalikku pilti). Seega

$$\angle DOQ = 90^\circ - \angle CDO = 90^\circ - \angle ABO.$$

Kokkuvõttes $\angle TOQ = \angle DOQ$, mistõttu D, O ja T asuvad ühel sirgel.



Joonis 1



Joonis 2

6. *Lahendus 1.* Loendame märgitud punktide kõik värvimised x värviga kahel viisil. Ühest küljest on neid värvimisi x^n, sest iga märgitud punkt on teistest sõltumatult värvitav x värviga ja märgitud punkte on n.

Teisest küljest, iga värvimise puhul võib kõnelda tema *perioodist* – vähimast positiivsest arvust d, mitme punktivahe jagu värvimist póörates tekib sama värvimine (ülesande püstituses käsitletakse värvimisi perioodiga n). Olgu k vähim perioodide arv, mille jagu pööramine teeb vähemalt ühe täisringi; perioodi d korral siis $kd = n+r$, kus $0 \leqslant r < d$. Et r punktivahe jagu pööramine annab samuti algse värvimise, siis $r = 0$, muidu oleks r väiksem periood kui d. Kokkuvõttes $kd = n$. Seega periood d peab olema arvu n tegur.

Loendame kõik värvimised perioodide kaupa. Kõik värvimised perioodiga d on määratud esimese d punkti värvimisega, kusjuures esimese d punkti värvid isekeskis perioodiliselt ei kordu. Siit saame perioodiga d värvimiste arvuks $P_d(x)$. Seega on kõiki värvimisi kokku $P_{d_1}(x) + P_{d_2}(x) + \ldots + P_{d_s}(x)$, kus $d_1, d_2, \ldots, d_s$ on arvu n kõik positiivsed tegurid (k.a n). Vastavalt lahenduse algul tehtud tähelepanekule võrdub see summa arvuga x^n.

Tõestame nüüd induktsiooniga n järgi, et $P_n(x)$ avaldub polünoomina muutujast x. Selleks eeldame, et $P_k(x)$ on polünoom kõigi n-st väiksemate naturaalarvude k korral. Siis muuhulgas on $P_d(x)$ polünoom arvu n kõigi positiivsete tegurite d korral, kus $d < n$. Eelnevast nähtub nüüd, et $P_n(x)$ esitub üksliikme x^n ja mingi hulga polünoomide summa vahena. Järelikult $P_n(x)$ on polünoom.

Lahendus 2. Ütleme, et n punkti kaks värvimist on ekvivalentsed, kui esimese värvimise värvid saab seada üksühesesse vastavusse teise värvimise värvidega nii, et see vastavus muudab esimese värvimise teiseks. Ekvivalentsi täpsuseni erinevaid n punkti värvimisi on lõplik arv, sest ülimalt n

värviga kõikvõimalikel viisidel värvides saavad ekvivalentsi täpsuseni kõik värvimised esindatud. Samuti on selge, et kui värvimine vastab ülesande tingimusele (pööramisel täispöörde murdarvkordse võrra annab erineva värvimise), siis vastab ka iga temaga ekvivalentne värvimine ülesande tingimustele.

Vaatleme värvimist, mis kasutab täpselt v erinevat värvi. Sellega ekvivalentseid värvimisi, mis kasutavad värve etteantud x värvi hulgast, on täpselt $x(x-1)\ldots(x-v+1)$. See kehtib ka $x < v$ korral, siis on korrutis null. Suurus $P_n(x)$ on võrdne selliste korrutiste summaga üle kõigi ülesande tingimustele vastavate värvimiste ekvivalentsiklasside. Seega $P_n(x)$ on polünoom.

Märkus. Kasutades arvuteoorias tuntud Möbiuse inversioonivalemit, võib leida polünoomile $P_n(x)$ (kus $n > 0$) ka üldvalemi

$$P_n(x) = \sum_{d:d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) x^d,$$

kus μ on *Möbiuse funktsioon*, st

$$\mu(m) = \begin{cases} 0, & \text{kui } m \text{ jagub mõne algarvu ruuduga,} \\ (-1)^{\nu(m)}, & \text{kui } m \text{ ei jagu ühegi algarvu ruuduga,} \end{cases}$$

kus omakorda $\nu(m)$ tähistab arvu m erinevate algtegurite arvu.

Näiteks $P_{15}(x) = x^{15} - x^5 - x^3 + x$ ja $P_{16}(x) = x^{16} - x^8$.

Kuna kõik värvimised perioodiga d jagunevad täpselt d liikmega gruppidesse (ühe grupi moodustavad need värvimised, mis on ühest pööramise teel saadavad), siis nende koguarv jagub d-ga. Muuhulgas nende värvimiste arv, millest on juttu ülesande püstituses, jagub n-ga. Et iga algarvu n korral $P_n(x) = x^n - x$, saame siit erijuhuna kätte Fermat' väikse teoreemi. Teisi sõnu, Fermat' väike teoreem üldistub algarvuliselt moodulilt suvalise positiivse täisarvu jaoks väitena, et arv märkuse alguses toodud kujul jagub n-ga suvalise positiivse täisarvu n ja täisarvu x korral.

Hindamisskeemid

1. *(Urve Kangro)*

Žürii lahenduse 1 allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et Jüri saab algseisust tekitada tasakaaluseisu: 2 p

  Sealhulgas:
  - Algoritmi kirjeldus: *1 p*
  - Näidatud, et ühes kuhjas on selleks piisav arv kive: *1 p*
- Näidatud, et kui enne vastase käiku oli tasakaaluseis, siis saab alati ka pärast vastase käiku tasakaaluseisu tekitada: 5 p

Kui siin Jüri strateegia oli sama, mis žürii lahenduses, siis tuli ka näidata, mida teha, kui Mari oma kuhja tühjaks teeb ning osa kive selle kuhja paarilisse tõstab. Selle juhu vaatlemata jätmisel kaotati 1 punkt. Alternatiivina võis Jüri strateegia olla selline, et kui Mari võttis kuhjast K n kivi ning lisas kuhja K paarilisse a kivi, siis Jüri eemaldas kuhjast K $n + 2a$ kivi ning tõstis ülejäänud kivid ainult ülejäänud paarides Mariga sümmeetriliselt.

Žürii lahendusele 2 vastavate lahenduste allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et suvalisest seisust, mis pole tasakaaluseis, saab tekitada tasakaaluseisu: 3 p
- Näidatud, et tasakaaluseisust ei saa tekitada tasakaaluseisu: 4 p

Kui midagi muud punktiväärilist ei olnud, siis juhtude $k = 1, 2, 3$ vaatlemise eest sai 1 punkti.

2. *(Erik Paemurru)*

Tüüpiliste mõttekäikude eest anti punkte järgnevalt.

- Leitud $\alpha b + \beta c + \gamma a = 1$ või mõni sellega analoogne võrrand, kus α, β ja γ on algarvu p astendajad vastavalt arvude a, b ja c kanoonilises esituses: 1 p
- Lahendatud juht $a = 1$: 1 p
- Osaliselt lahendatud juht $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$: 1 p
- Täielikult õige vastus: 1 p
- Lahendatud juht $p \mid a$, $p \nmid b$, $p \nmid c$: 2 p
- Väikeste puudustega täislahendus: 6 p

3. *(Heiki Niglas)*

Tüüpiliste mõttekäikude eest anti punkte järgnevalt.

- Õige vastus: 1 p
- Idee kasutada muutujate x ja y väärtusi, mille korral $y = -2^x$ või $y = -2^{x-1}$: 1–2 p
- Näidatud, et kui $f(y) = 0$, siis iga $x > 2y$ korral $f(x) = 0$: 1 p
- Täislahendus: 7 p

Üldiselt ei lahendatud seda ülesannet eriti hästi, kuigi mõned täislahendused leidusid. Lihtsalt väikeste x ja y väärtuste proovimise eest punkte ei antud, kui sellega kaugemale ei jõutud. Samuti ei saanud punkte, kui eeldati, et funktsioon on kindlat tüüpi, nt polünoom või astmefunktsioon. Üks põhilisi tüüpvigasid oli see, et kui saadi, et $f(f(x)) = 2^{2^x}$ või $f(-2^x) = 0$, siis eeldati, et üks neist kehtib iga x korral, kuigi mõne x korral võib kehtida esimene ja mõne teise x korral teine võrdus.

Hindamisskeemid

4. *(Härmel Nestra)*
Tüüpiliste mõttekäikude eest anti punkte järgnevalt.

- Ainult erijuhud lõpuni vaadeldud, ei mingit progressi üldjuhul: 0 p
- Taandatud väide kas võrratusele $\sqrt[k-1]{k} > \dfrac{k}{k-1}$ või võrratusele $\sqrt[k-1]{k} > \sqrt[k]{k+1}$ või mõnele ilmselgelt samaväärsele võrratusele: 2 p
- Lisaks eelmisele reale rakendatud Newtoni binoomvalemit, aga edasi pole mindud või on selgitused liiga ähmased: 3 p
- Täislahendus lüngaga põhjendustes: 6 p
- Täislahendus: 7 p

5. *(Oleg Košik)* Allpool märgitud tähelepanekute eest antavad punktid summeeriti.

- $OPTQ$ on kõõlnelinurk: 1 p
- Punktid P, A, Q asuvad ühel sirgel: 1 p
- AC ja TQ on paralleelsed: 1 p

Täiendavaid punkte võis saada nurkade rehkenduste eest, millel on õige lahenduse jaoks oluline kasu.

Mitme lahendaja raskused algasid korraliku joonise puudumisest. Seda laadi ülesannet on raske ära teha ilma sirkli ja joonlaua abil tehtud hea jooniseta.

6. *(Ago-Erik Riet)*
Lahenduse alljärgnevate osade eest antud punktid liideti.

- Tõestatud, et ringjoonel värvid paiknevad tsükliliselt ja et iga värvimise korral on tsükli (vähim) pikkus arvu n jagaja: 3 p

  Sealhulgas:
  - Vajalikud tähelepanekuid tsükli kohta osaliselt tehtud: *1–2 p*
- Saadud aru, et polünoomi saab moodustada rekursiivselt x astmete liitmise ja lahutamise teel, näiteks kasutades, et selliseid värvimisi, kus tsükli pikkus (mitte tingimata vähim) on i, kus $i \mid n$, on x^i: 4 p

Kui oli ainult mõni näide või rekursioon madala sügavuseni, siis sai skeemi teise rea eest kuni 2 punkti. Kui ei olnud kirjas, et kõigi värvimiste arv on x^n või et vähima tsükli pikkusega i korral on värvimiste arv x^i, siis lahutati 1 punkt.