Täiendav valikvõistlus 2016

IMO'16 Eesti võistkonna valikvõistlus

21.–22. aprill 2016 **Teine voor. Esimene päev**

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.
Palun vormistage igale paberile ainult ühe ülesande lahendus!

1. Kolmnurga ABC külgedel AB, BC ja CA on võetud vastavalt punktid L, M ja N nii, et sirged CL, AM ja BN lõikuvad ühes punktis O kolmnurga sees ning nelinurkadel $ALON$, $BMOL$ ja $CNOM$ leiduvad siseringjooned. Tõesta, et

$$\frac{1}{|AL| \cdot |BM|} + \frac{1}{|BM| \cdot |CN|} + \frac{1}{|CN| \cdot |AL|} = \frac{1}{|AN| \cdot |BL|} + \frac{1}{|BL| \cdot |CM|} + \frac{1}{|CM| \cdot |AN|}.$$

2. Olgu x, y ja z sellised positiivsed reaalarvud, et $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Tõesta, et $xy + yz + zx \geqslant 3$.

3. Olgu n positiivne täisarv, mille puhul leidub arvust $\sqrt{n}$ väiksem positiivne täisarv, millega n ei jagu. Olgu $(a_1, \ldots, a_n)$ suvaline arvude $1, \ldots, n$ permutatsioon. Valime sellest permutatsioonist suurima pikkusega kasvava osajärjendi $a_{i_1} < \ldots < a_{i_k}$ ja suurima pikkusega kahaneva osajärjendi $a_{j_1} > \ldots > a_{j_l}$. Tõesta, et järjendite $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$ ja $(a_{j_1}, \ldots, a_{j_l})$ arvude seas leidub vähemalt üks arv, millega n ei jagu.

Märkus. Järjendi $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *osajärjendiks* nimetatakse suvalist järjendit kujul $(x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_m})$, kus $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_m \leqslant n$.

IMO'16 Eesti võistkonna valikvõistlus

21.–22. aprill 2016 **Teine voor. Teine päev**

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.
Palun vormistage igale paberile ainult ühe ülesande lahendus!

4. Olgu m fikseeritud täisarv, $m \geqslant 2$. Kooli iga õpilane harrastab ülimalt m hobi, iga m õpilase seas aga leidub kaks, kellel on sama hobi. Leia vähim õpilaste arv, mille puhul saab kindlalt väita, et leidub hobi, mida harrastab vähemalt 3 õpilast.

5. Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille korral arv $(n^2+11n-4)\cdot n!+33\cdot 13^n+4$ on mingi täisarvu ruut.

6. Ringjooned k_1 ja k_2 lõikuvad punktides M ja N. Sirge l lõikab ringjoont k_1 punktides A ja C ning ringjoont k_2 punktides B ja D, nii et punktid A, B, C, D asuvad sirgel l selles järjestuses. Olgu X selline punkt sirgel MN, et M asub X ja N vahel. Kiired AX ja BM lõikuvad punktis P, kiired DX ja CM aga punktis Q. Tõesta, et $PQ \parallel l$.

Lahendused

1. Et $ALON$ on puutujanelinurk, siis $|AL|+|ON| = |AN|+|OL|$. Analoogiliselt $|BM|+|OL| = |BL|+|OM|$ ja $|CN|+|OM| = |CM|+|ON|$. Liites need kolm võrdust, saame

$$|AL| + |BM| + |CN| = |AN| + |BL| + |CM|.$$

Et sirged CL, AM ja BN lõikuvad ühes punktis, siis Ceva teoreemi põhjal $|AL| \cdot |BM| \cdot |CN| = |AN| \cdot |BL| \cdot |CM|$. Jagades eelviimase võrduse pooled viimase võrduse pooltega, saamegi vajaliku võrduse.

2. *Lahendus 1.* Kasutades antud võrdust ning aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust, saame

$$xy + yz + zx = xyz\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{xyz\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2}{x+y+z} =$$
$$= \frac{xyz\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) + 2x + 2y + 2z}{x+y+z} =$$
$$= \frac{xyz\left(\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2x^2}\right)}{x+y+z} + 2 \geqslant$$
$$\geqslant \frac{xyz\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right)}{x+y+z} + 2 = 3.$$

Lahendus 2. Korrutades antud võrduse läbi suurusega xyz, saame

$$x^2yz + xy^2z + xyz^2 = yz + xz + xy. \tag{1}$$

Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelise võrratuse põhjal kehtib $x^2y^2 + y^2z^2 \geqslant 2\sqrt{x^2y^4z^2} = 2xy^2z$ ja analoogiliselt ka $y^2z^2 + z^2x^2 \geqslant 2yz^2x$ ja $z^2x^2 + x^2y^2 \geqslant 2zx^2y$. Liites need kolm võrratust ja kasutades võrdust (1), saame $2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \geqslant 2(x^2yz + xy^2z + xyz^2) = 2(xy + yz + zx)$ ehk

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geqslant xy + yz + zx. \tag{2}$$

Korrutades tõestatava võrratuse läbi suurusega $xy + yz + zx$, saame samaväärse võrratuse $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2(x^2yz+xy^2z+xyz^2) \geqslant 3(xy+yz+zx)$. Seoste (1) ja (2) põhjal see aga kehtib.

Lahendus 3. Tõestatav võrratus on samaväärne võrratusega

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)(xy+yz+zx) \geqslant 3(x+y+z).$$

Sulgude avamisel näeme, et see on omakorda samaväärne võrratusega

$$\frac{1}{x}\cdot yz+\frac{1}{y}\cdot zx+\frac{1}{z}\cdot xy \geqslant x+y+z$$

ehk võrratusega

$$\frac{1}{x}\cdot yz+\frac{1}{y}\cdot zx+\frac{1}{z}\cdot xy \geqslant \frac{1}{y}\cdot xy+\frac{1}{z}\cdot yz+\frac{1}{x}\cdot xz.$$

Viimane järeldub ümberpaigutusvõrratusest.

3. *Lahendus 1.* Tõestame kõigepealt, et $kl \geqslant n$. Iga $i = 1, \ldots, n$ puhul olgu $f(i)$ pikima kasvava ja a_i-ga lõppeva osajärjendi pikkus ning $g(i)$ pikima kahaneva ja a_i-ga lõppeva osajärjendi pikkus. Paarid $(f(i), g(i))$, $i = 1, \ldots, n$ on kõik erinevad, sest kui $i < j$, siis juhul $a_i < a_j$ on $f(i) < f(j)$ ning juhul $a_i > a_j$ on $g(i) < g(j)$. Neid paare on n tükki. Teiselt poolt, suurim $f(i)$ on k ning suurim $g(i)$ on l, seega on vaadeldavaid paare ülimalt kl. Järelikult $n \leqslant kl$.

Tõestatud väitest saame $k+l \geqslant 2\sqrt{kl} \geqslant 2\sqrt{n}$. Et arve, mis kuuluvad korraga kasvavasse ja kahanevasse osajärjendisse, saab olla ülimalt üks, siis esineb järjendites $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ ja $a_{j_1}, \ldots, a_{j_l}$ kokku vähemalt $2\sqrt{n} - 1$ erinevat arvu. Et vastavalt eeldusele on arvul n tegureid, mis ei ületa $\sqrt{n}$, ülimalt $\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1$ tükki, siis on arvul n ülimalt $2\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 2$ tegurit. Järelikult leidub järjendites $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ ja $a_{j_1}, \ldots, a_{j_l}$ vähemalt üks arv, millega n ei jagu.

Lahendus 2. Võrratuseni $kl \geqslant n$ saab jõuda ka järgnevalt. Tükeldame permutatsiooni $(a_1, \ldots, a_n)$ kahanevateks osajärjenditeks järgmise algoritmiga. Iga uue osajärjendi esimeseks elemendiks võtame esimese algses järjendis seni kasutamata elemendi, teiseks elemendiks esimese talle algses järjendis järgneva temast väiksema seni kasutamata elemendi jne, kuni selliseid elemente leidub. Olgu need osajärjendid moodustamise järjekorras $K_1, \ldots, K_x$.

Märkame, et iga $z = x, x-1, \ldots, 2$ korral leidub osajärjendi K_z iga elemendi a_j jaoks selline osajärjendi K_{z-1} element a_i, et $i < j$ ja $a_i < a_j$. Tõepoolest, oletame väitevastaselt, et see nii pole; siis osajärjendi K_{z-1} kõik elemendid a_i, kus $i < j$, on elemendist a_j suuremad. See aga tähendab, et a_j oleks pidanud valitama osajärjendisse K_{z-1}, mis on vastuolus eeldusega, et a_j on osajärjendi K_z element.

Järelikult saab osajärjendi K_x suvalisest elemendist b_x alustades defineerida elemendi b_{x-1} osajärjendist K_{x-1}, elemendi b_{x-2} osajärjendist K_{x-2} jne, kuni elemendi b_1 osajärjendist K_1, nii et $b_1 < \ldots < b_{x-1} < b_x$. See on algse permutatsiooni kasvav osajärjend pikkusega x. Kuna igaüks algse permutatsiooni n elemendist kuulub mõnesse osajärjenditest $K_1, \ldots, K_x$, siis leidub kahanev osajärjend, mille pikkus on vähemalt $\frac{n}{x}$. Nüüd $k \geqslant x$, $l \geqslant \frac{n}{x}$ annab $kl \geqslant x \cdot \frac{n}{x} = n$.

Lahendus 3. Permutatsiooni $(a_1, \ldots, a_n)$ kahanevateks osajärjenditeks tükeldamiseks nii, et leiduks kasvav osajärjend, mille iga element esindab erinevat tükki, saab kasutada ka järgmist algoritmi. Iga uue osajärjendi esimeseks elemendiks võtame seni kasutamata elementidest suurima, teiseks elemendiks talle algses järjendis järgnevatest seni kasutamata elementidest suurima jne, kuni selline valik on võimalik. Olgu need osajärjendid moodustamise järjekorras $L_1, \ldots, L_y$.

Iga $z = y, y-1, \ldots, 2$ jaoks leidub osajärjendi L_z iga elemendi a_i jaoks selline osajärjendi L_{z-1} element a_j, et $i < j$ ja $a_i < a_j$. Tõepoolest, oletame väitevastaselt, et see nii pole; siis osajärjendi L_{z-1} kõik elemendid a_j, kus $i < j$, on elemendist a_i väiksemad. See aga tähendab, et a_i oleks pidanud valitama osajärjendisse L_{z-1}, mis on vastuolus eeldusega, et a_i on osajärjendi L_z element.

Järelikult saab osajärjendi L_y suvalisest elemendist c_y alustades defineerida elemendi c_{y-1} osajärjendist L_{y-1}, elemendi c_{y-2} osajärjendist L_{y-2} jne, kuni elemendi c_1 osajärjendist L_1, nii et $c_y < c_{y-1} < \ldots < c_1$. Edasi jätkame nagu lahenduses 2.

Märkus 1. Abiväite $kl \geqslant n$ tõestamiseks võib kasutada ka Erdős-Szekeresi teoreemi: erinevate reaalarvude järjendis pikkusega $(k-1)(l-1)+1$ leidub kas kasvav osajärjend pikkusega k või kahanev osajärjend pikkusega l. Tõepoolest, oletame väitevastaselt, et $kl < n$ ehk $kl + 1 \leqslant n$; siis esimesest $kl + 1$ elemendist koosnevas alamjärjendis saab valida kas kasvava osajärjendi pikkusega $k + 1$ või kahaneva osajärjendi pikkusega $l + 1$. Et need on ühtlasi kogu permutatsiooni osajärjendid, saame vastuolu. Lahenduses 1 väitele $kl \geqslant n$ esitatud tõestus on tegelikult vikipeedias antud Erdős-Szekeresi teoreemi tõestuse mugandus antud olukorra tarbeks.

Märkus 2. Kasutades Tšebõševi teoreemi, mis väidab, et a ja $2a$ vahel leidub alati algarv, saab näidata, et iga naturaalarvu $n \geqslant 25$ jaoks leidub selline arvust $\sqrt{n}$ väiksem positiivne täisarv, millega n ei jagu. Seega kehtib ülesande väide kõigi naturaalarvude n puhul, välja arvatud mingi lõplik hulk. Läbivaatusega on lihtne näha, et ainsad arvud $n < 25$, mille puhul ülesande väide ei kehti, on 1, 2, 4, 6 ja 12.

Lahendused

4. *Vastus:* m^2.

Kui kooli õpilaste arv on m^2-1 ehk $(m-1)(m+1)$, siis jaotame õpilased $m-1$ rühma, igas $m+1$ liiget. Oletame, et igas rühmas on igal õpilasel iga teise õpilasega üks unikaalne ühine hobi ja rohkem hobisid keegi ei harrasta. Siis igal õpilasel on täpselt m erinevat hobi, samas kui igast m õpilasest vähemalt kaks kuuluvad ühte ja samasse rühma, mistõttu leidub neil ühine hobi. Seega ülesande tingimused on täidetud, kuid ühtki hobi ei harrasta üle 2 õpilase. Kui kooli õpilaste arv on väiksem, siis sobib sama konstruktsioon, millest on suvaliselt sobiv arv õpilasi välja jäetud.

Näitame, et kui koolis on vähemalt m^2 õpilast, siis peab leiduma hobi, mida harrastab vähemalt 3 õpilast. Oletame väitevastaselt, et iga hobi harrastab ülimalt 2 õpilast. Moodustame õpilaste rühma, millest ühelgi kahel pole ühist hobi, lisades algselt tühja rühma igal sammul ühe sellise õpilase, kellel pole ühist hobi ühegi seni sellesse rühma valitud õpilasega. Et igal õpilasel on ülimalt m hobi ja iga hobi saab tal ühine olla vaid ühe teise õpilasega, on pärast i sammu ülimalt $i(m+1)$ õpilast, keda järgmistel sammudel enam sellesse rühma lisada ei saa. Et $(m-1)(m+1)<m^2$, on pärast $m-1$ õpilase valikut veel võimalik vähemalt üks õpilane sellesse rühma lisada. Seega leidub rühm vähemalt m õpilasega, kellest ühelgi kahel pole ühist hobi. See on aga vastuolus ülesande tingimustega.

Märkus. Ülesannet saab üldistada, jättes ühe õpilase hobide arvu ülempiiriks m, aga nõudes kahe ühise hobiga õpilase olemasolu iga k õpilase seas. Sel juhul on vastus $(k-1)(m+1)+1$ ehk $km-m+k$. Tõestus on analoogne.

5. *Vastus:* $n=1$ ja $n=2$.

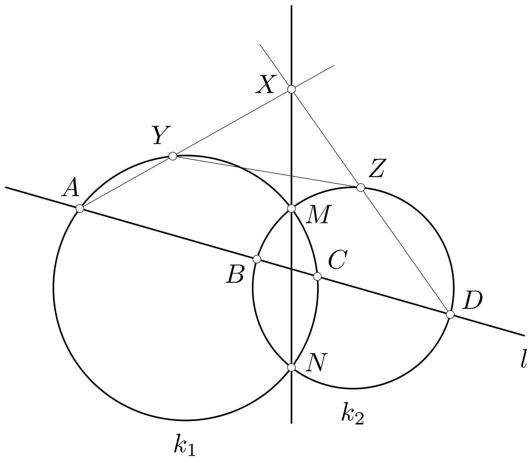
Tähistame $a_n=(n^2+11n-4)\cdot n!+33\cdot 13^n+4$. Kui $n \geqslant 4$, siis arv $n!$ jagub 8-ga, mistõttu

$$a_n \equiv 33\cdot 13^n+4 \equiv 5^n+4 \pmod 8.$$

Et $5^2 \equiv 1 \pmod 8$, siis $5^n \equiv 1 \pmod 8$ iga paaris n korral. Seega $a_n \equiv 5 \pmod 8$, kui $n \geqslant 4$ ja n on paaris. Kuid täisruudud annavad 8-ga jagades jäägi 0, 1 või 4.

Teisalt, kui $n \geqslant 7$, siis arv $n!$ jagub 7-ga, mistõttu

$$a_n \equiv 33\cdot 13^n+4 \equiv 5\cdot(-1)^n+4 \pmod 7.$$



Joonis 1

Seega paaritu $n \geqslant 7$ korral $a_n \equiv -5 + 4 = -1 \pmod 7$. Kuid täisruudud annavad 7-ga jagades jäägi 0, 1, 4 või 2.

Kokkuvõttes on sõelale jäänud veel kandidaadid $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ ja $n = 5$. Juhul $n = 5$ ei ole a_n täisruut, sest

$$a_5 \equiv 33 \cdot 13^5 + 4 \equiv 3^6 - 1 \equiv 3 \pmod 5,$$

kuid täisruudud annavad 5-ga jagades jäägi 0, 1 või 4. Samuti ei ole a_n täisruut juhul $n = 3$, sest

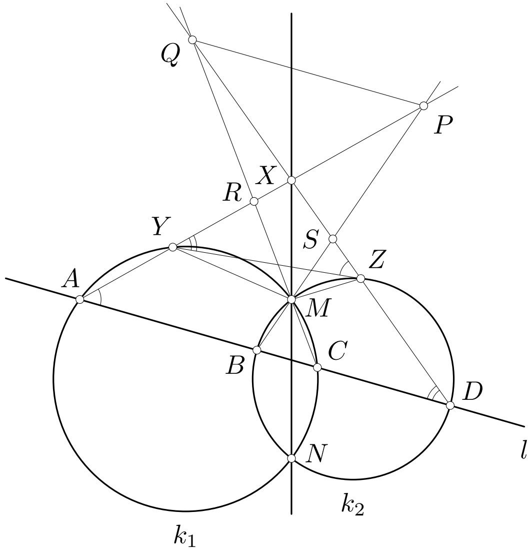
$$a_3 = (9 + 33 - 4) \cdot 6 + 33 \cdot 13^3 + 4 \equiv 3 + 3^4 - 1 \equiv 3 \pmod 5.$$

Lõpuks jääb kontrollida, et

$$a_1 = (1 + 11 - 4) \cdot 1 + 33 \cdot 13 + 4 = 441 = 21^2,$$
$$a_2 = (4 + 22 - 4) \cdot 2 + 33 \cdot 169 + 4 = 5625 = 75^2.$$

6. *Lahendus 1.* Olgu Y sirge AX teine lõikepunkt ringjoonega k_1 ning Z sirge DX teine lõikepunkt ringjoonega k_2 (joonis 1). Et X asub ringjoonte k_1 ja k_2 radikaalteljel, siis $|XY| \cdot |XA| = |XZ| \cdot |XD|$, millest tulenevalt asuvad punktid A, Y, Z ja D ühel ringjoonel. Seega $\angle XZY = \angle XAD$ ja $\angle XYZ = \angle XDA$.

Olgu R sirgete CM ja AX lõikepunkt ning S sirgete BM ja DX lõikepunkt. Punktid R ja X asuvad punktidest A ja Y samal pool, nagu ka punktid S ja X asuvad punktidest D ja Z samal pool, ning R ja Q asuvad punktidest



Joonis 2

C ja M samal pool, nagu ka S ja P asuvad punktidest B ja M samal pool (joonis 2). Et A, Y, M ja C asuvad ühel ringjoonel k_1, siis

$$\angle QMY = \angle RMY = \angle RAC = \angle XAD = \angle XZY = \angle QZY.$$

Kuna Q ja Y asuvad ühel pool sirget MN, aga Z teisel pool, siis paiknevad M ja Z samal pool sirget QY, mistõttu võrdusest $\angle QMY = \angle QZY$ järeldub Q, Y, M ja Z paiknemine ühel ringjoonel. Samuti saame

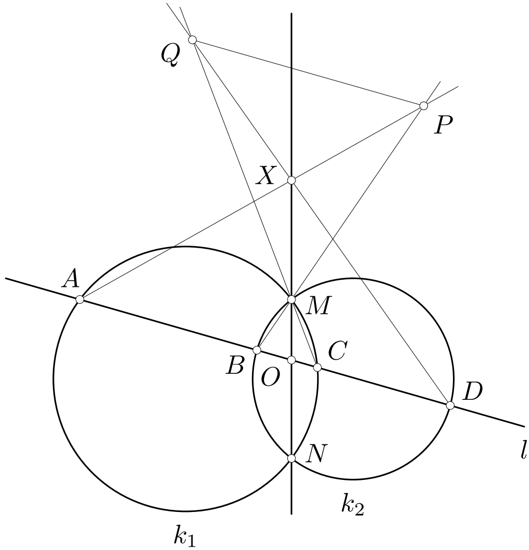
$$\angle PMZ = \angle SMZ = \angle SDB = \angle XDA = \angle XYZ = \angle PYZ,$$

millest analoogselt järeldub ka P, Z, M ja Y paiknemine ühel ringjoonel. Kokkuvõttes peavad punktid P, Q, Y ja Z asuma ühel ringjoonel just selles järjestuses (Q ja Y paiknevad sirgest MN ühel, P ja Z teisel pool). Järelikult

$$\angle QPA = \angle QPY = \angle QZY = \angle XZY = \angle XAD = \angle PAD,$$

kust nähtubki $PQ \parallel l$ (sest Q ja D on erineval pool sirget AP).

Lahendus 2. Olgu O sirgete AD ja MN lõikepunkt (joonis 3). Võtame kasutusele koordinaatteljestiku, mille keskpunkt on O, x-telg jookseb piki sirget AD ja y-telg piki sirget MN. Siis punktide A, B, C, D, M ja X koordinaadid on $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(c, 0)$, $(d, 0)$, $(0, u)$ ja $(0, v)$ mingite reaalarvude a, b, c, d, u, v jaoks. Et O asub ringjoonte k_1 ja k_2 radikaalteljel, siis $ac = bd = p$, kus p on punkti O potents ringjoonte k_1 ja k_2 suhtes.



Joonis 3

Sirge AX võrrand selles koordinaadistikus on $\frac{x}{a} + \frac{y}{v} = 1$, sirge BM võrrand aga $\frac{x}{b} + \frac{y}{u} = 1$. Nende sirgete lõikepunkti P y-koordinaat rahuldab seega tingimust $a\left(1 - \frac{y_P}{v}\right) = b\left(1 - \frac{y_P}{u}\right)$, kust $y_P = \frac{(b-a)uv}{bv-au}$. Analoogselt annavad sirgete DX ja CM võrrandid $\frac{x}{d} + \frac{y}{v} = 1$ ja $\frac{x}{c} + \frac{y}{u} = 1$ punkti Q y-koordinaadiks $y_Q = \frac{(c-d)uv}{cv-du}$. Asendades siia $c = \frac{p}{a}$ ja $d = \frac{p}{b}$, saame

$$y_Q = \frac{\left(\frac{p}{a} - \frac{p}{b}\right)uv}{\frac{p}{a}v - \frac{p}{b}u} = \frac{\frac{b-a}{ab}uv}{\frac{bv-au}{ab}} = \frac{(b-a)uv}{bv-au}.$$

Et $y_P = y_Q$, on sirge PQ paralleelne x-teljega ehk sirgega l.

Märkus. Lahenduses 2 ei tarvitse koordinaatteljed olla risti, samuti ei pea erinevate telgede suunalised ühikud olema võrdse pikkusega.

IMO'16 Eesti võistkonna valikvõistlus

21.–22. aprill 2016 **Teine voor. Esimene päev**

Hindamisskeemid

1. *(Juhan Aru)* Tüüpilistel juhtudel anti punkte järgmiselt.

- Ceva teoreemi rakendamine: 1–2 p
- Muud kasulikud tähelepanekud: 1–2 p
- Täislahendus: 6–7 p

2. *(Heiki Niglas)* Tüüpilistel juhtudel anti punkte järgmiselt.

- Täislahendus: 7 p
- Kasutu proovimine: 0 p

Osalisi punkte proovimiste eest ei antud, kui ei olnud näha, et sellest oleks otseselt kasu ülesande lahendamise seisukohalt. Üks tüüpvigu oli järeldada võrratustest kujul $A+B \geqslant C$ ja $B \geqslant D$ võrratus $A+D \geqslant C$. Näiteks järeldati võrratustest $x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx \geqslant 9$ ja $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+zx$ võrratus $3(xy+yz+zx) \geqslant 9$. Selline järeldamine pole korrektne, sest nõuab tehniliselt võttes samapidiste võrratuste lahutamist. Samuti ei antud punkte erijuhu $xyz \geqslant 1$ vaatamise eest, sest sellisel juhul järeldub soovitud võrratus triviaalselt aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest. Samuti ei antud punkte erijuhu $x = 1$ vaatmise eest.

3. *(Härmel Nestra)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud võrratus $kl \geqslant n$: 4 p
- Võrratusest $kl \geqslant n$ järeldatud ülesande väide: 3 p

  Sealhulgas:
  - Näidatud, et $k+l \geqslant 2\sqrt{n}$: *1 p*
  - Põhjendatud, et arvul n saab ülesande tingimuste kohaselt olla kuni $2\sqrt{n}-2$ (täisosaga või ilma) tegurit: *1 p*
  - Märgitud, et kasvav ja kahanev osajada saavad omada ülimalt üht ühist elementi: *1 p*

Kummalisel kombel esines üsna mitu tööd, kus väideti, justkui arvul n saaks olla ülimalt $\sqrt{n}$ tegurit.

Hindamisskeemid

4. *(Urve Kangro)*

Tüüpilistel juhtudel anti punkte järgmiselt.

- Täislahendus: 7 p
- Mõned potentsiaalselt kasulikud tähelepanekud: 1 p

Selles ülesandes sisuliselt poolikuid lahendusi ei olnud, kellel õige idee oli, need ka ülesande lõpuni lahendasid. Mitmetes töödes arvutati, kui mitmes m õpilasega grupis üks õpilaste paar esineb, ning selle kaudu hinnati, kui palju ühise hobiga paare ülesande tingimuste täitmiseks vaja läheb, teiselt poolt aga, kui palju selliseid paare üldse olla saab, kui iga hobi harrastab mitte rohkem kui m õpilast. Siit on võimalik saada ülalt hinnang minimaalsele vajalikule õpilaste arvule, kuid see on kaugelt liiga jäme. Esines ka ülesandest valesti arusaamist.

5. *(Joonas Kalda)* Lahenduse alljärgnevate osade eest antud punktid liideti.

- Näidatud, et $n = 1$ annab täisruudu: 1 p
- Näidatud, et $n = 2$ annab täisruudu: 1 p
- Näidatud, et $n = 3$ ja $n = 5$ ei anna täisruutu: 1 p
- Tõestatud, et $n \geqslant 7$ puhul paarituarvulisi lahendeid pole: 2 p
- Tõestatud, et $n \geqslant 4$ puhul paarisarvulisi lahendeid pole: 2 p

6. *(Oleg Košik)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et punktid A, Y, Z, D asuvad ühel ringjoonel (või kolmnurkade AXD ja YXZ sarnasus): 2 p

  Sealhulgas:
  - Näidatud, et $|XY| \cdot |XA| = |XZ| \cdot |XD|$: *1 p*
- Näidatud, et Q, Y, M, Z asuvad ühel ringjoonel: 2 p
- Järeldatud, et P, Q, Y, Z asuvad ühel ringjoonel: 1 p
- Järeldatud PQ ja l paralleelsus: 2 p