# Valikvõistlus 2015

# IMO'15 Eesti võistkonna valikvõistlus

16.–17. aprill 2015 **Esimene päev**

*Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.*
*Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.*
*Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.*
*Taskuarvutit kasutada ei lubata.*

**1.** Olgu $n$ naturaalarv, $n \geqslant 5$, ning $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sellised reaalarvud, et kõikvõimalikud kahekaupa summad $a_i + a_j$, kus $1 \leqslant i < j \leqslant n$, on mingi aritmeetilise jada $\frac{n(n-1)}{2}$ järjestikust liiget mingis järjestuses võetuna. Tõesta, et $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

**2.** Ruudukujuline pitsa küljepikkusega 30 cm lõigatakse tükkideks (mitte tingimata ristkülikukujulisteks) ruudu külgedega paralleelsete lõigetega, mille kogupikkus on 240 cm. Tõesta, et leidub tükk, mille pindala on vähemalt 36 cm$^2$.

**3.** Olgu $q$ fikseeritud positiivne ratsionaalarv. Nimetame arvu $x$ *karismaatiliseks*, kui leiduvad positiivne täisarv $n$ ja täisarvud $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nii, et

$$x = (q+1)^{\alpha_1} \cdot (q+2)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot (q+n)^{\alpha_n}.$$

a) Tõesta, et $q$ saab valida nii, et iga positiivne ratsionaalarv osutuks karismaatiliseks.

b) Kas iga $q$ korral võib kindlalt väita, et iga karismaatilise arvu $x$ korral on ka arv $x+1$ karismaatiline?

# IMO'15 Eesti võistkonna valikvõistlus

16.–17. aprill 2015 **Teine päev**

*Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.*
*Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.*
*Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.*
*Taskuarvutit kasutada ei lubata.*

**4.** Teravnurkse kolmnurga $ABC$ kõrgused $AD$ ja $BE$ lõikuvad punktis $H$. Olgu $P$ punktist $C$ ringjoonele keskpunktiga $H$ ja raadiusega $HE$ tõmmatud teise puutuja puutepunkt ja $Q$ punktist $C$ ringjoonele keskpunktiga $B$ ja raadiusega $BE$ tõmmatud teise puutuja puutepunkt. Tõesta, et punktid $D$, $P$ ja $Q$ asuvad ühel sirgel.

**5.** Leia kõik funktsioonid $f$, mis on määratud kõigi reaalarvude hulgal ja omandavad reaalarvulisi väärtusi ning rahuldavad kõigi reaalarvude $x$ ja $y$ korral võrdust

$$f\big(f(x)+f(y)\big)=f(x^2)+2x^2f(y)+\big(f(y)\big)^2.$$

**6.** Ruudustikus, mille iga ruut on värvitud mustaks või valgeks, nimetame rida $X$ ridade $Y$ ja $Z$ *seguks*, kui rea $X$ iga ruut on ühte värvi kas rea $Y$ või rea $Z$ ruuduga samas veerus.

Olgu $m \geqslant 3$ naturaalarv. Mingis $m$ veeruga ruudustikus on ruudud värvitud mustaks ja valgeks nii, et kehtivad järgmised tingimused.

(1) Mistahes kolmest reast üks on ülejäänud kahe segu.

(2) Iga kahe rea jaoks leidub veerg, milles nende kahe rea ruudud on eri värvi.

(3) Iga kahe rea jaoks leidub veerg, milles nende kahe rea ruudud on sama värvi.

(4) Ruudustikku pole võimalik lisada uut rida mustade ja valgete ruutudega selliselt, et säiliks nii tingimus (1) kui ka tingimus (2).

Leia kõik võimalused, milline saab olla selle ruudustiku ridade arv.

## Lahendused

**1.** Olgu kahekaupa summade aritmeetilise jada vahe $d$. Näitame, et ülesande tingimustel $d = 0$ — sellest järeldub ka nõutud väide $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, sest näiteks $a_1 + a_3 = a_2 + a_3$, kust $a_1 = a_2$, ning iga $i = 2, 3, \ldots, n-1$ korral $a_1 + a_i = a_1 + a_{i+1}$, kust $a_i = a_{i+1}$.

Üldisust kitsendamata $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ ja $d \geqslant 0$. Vähim kahekaupa summa on ilmselt $a_1 + a_2$. Suuruselt järgmine on $a_1 + a_3$, sest iga $i > 3$ korral $a_1 + a_i \geqslant a_1 + a_3$ ja iga $i > 1$ ja $j > i$ korral $a_i + a_j \geqslant a_1 + a_3$. Seega $(a_1 + a_3) - (a_1 + a_2) = d$, millest $a_3 - a_2 = d$. Analoogiliselt on suurimad kahekaupa summad $a_n + a_{n-1}$ ja $a_n + a_{n-2}$, kust ka $a_{n-1} - a_{n-2} = d$.

Kui $n \geqslant 6$, siis $2, 3, n-2, n-1$ on paarikaupa erinevad indeksid, mistõttu $a_2 + a_{n-1}$ ja $a_3 + a_{n-2}$ on vaadeldava aritmeetilise jada liikmed erinevatelt kohtadelt. Ent $a_3 + a_{n-2} = (a_2 + d) + (a_{n-1} - d) = a_2 + a_{n-1}$, mis tähendab, et aritmeetiline jada on konstantne ehk $d = 0$.

Kui $n = 5$, siis eespool näidatu põhjal $a_3 = a_2 + d$ ja $a_4 = a_3 + d$. Oletame, et $d > 0$. Et $(a_1 + a_3) - (a_1 + a_2) = (a_1 + a_4) - (a_1 + a_3) = d$, on $a_1 + a_2$, $a_1 + a_3$ ja $a_1 + a_4$ kõigi kahekaupa summade seas kolm vähimat. Analoogselt on $a_2 + a_5$, $a_3 + a_5$ ja $a_4 + a_5$ kolm suurimat. Märkame, et ka summad $a_2 + a_3$, $a_2 + a_4$ ja $a_3 + a_4$ on suuruselt kolm järjestikust, sest $a_2 + a_4 = a_3 + a_3$. Seega on summade suurusjärjestuseks vaid kaks võimalust:

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < a_1 + a_4 < \\ < \quad & a_1 + a_5 < \\ < \quad & a_2 + a_3 < a_2 + a_4 < a_3 + a_4 < \\ < \quad & a_2 + a_5 < a_3 + a_5 < a_4 + a_5; \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < a_1 + a_4 < \\ < \quad & a_2 + a_3 < a_2 + a_4 < a_3 + a_4 < \\ < \quad & a_1 + a_5 < \\ < \quad & a_2 + a_5 < a_3 + a_5 < a_4 + a_5. \end{aligned} \tag{2}$$

Juhul (1) järeldub nelja vähima summa kujudest, et $a_5 - a_4 = d$, mis aga annab $a_2 + a_5 = a_3 + a_4$, vastuolu. Juhul (2) järeldub nelja suurima summa kujudest analoogselt $a_2 - a_1 = d$, kust $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$ ja jällegi vastuolu. Seega $d = 0$, mida oligi tarvis näidata.

**2.** *Lahendus 1.* Olgu $n$ tükkide arv. Olgu $p_1, \ldots, p_n$ tükkide ümbermõõdud ning $S_1, \ldots, S_n$ vastavate tükkide pindalad. Olgu pindalalt suurima tüki number $m$, st iga $i = 1, \ldots, n$ korral $S_i \leqslant S_m$. Ülesande lahendamiseks piisab näidata, et $S_m \geqslant 36\ \text{cm}^2$.

Et iga lõige tekitab oma pikkuse ulatuses tükkide servi lõikest kahele poole ning tükkide servadeks lähevad ka pitsa välisservad, siis

$$p_1 + \ldots + p_n = 2 \cdot 240\ \text{cm} + 4 \cdot 30\ \text{cm} = 600\ \text{cm}.$$

Iga $i = 1, \ldots, n$ korral olgu $a_i$ ja $b_i$ vähima võimaliku $i$-ndat tükki mahutava ja pitsa servadega paralleelsete külgedega ristküliku küljepikkused. Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelise võrratuse kaudu hinnates saame

$$\sqrt{S_i} \leqslant \sqrt{a_i b_i} \leqslant \frac{a_i + b_i}{2} \leqslant \frac{p_i}{4}.$$

Seega

$$\begin{aligned}
900\ \text{cm}^2 &= S_1 + \ldots + S_n = \\
&= \sqrt{S_1}\sqrt{S_1} + \ldots + \sqrt{S_n}\sqrt{S_n} \leqslant \\
&\leqslant \sqrt{S_m}\sqrt{S_1} + \ldots + \sqrt{S_m}\sqrt{S_n} = \\
&= \sqrt{S_m} \cdot \left(\sqrt{S_1} + \ldots + \sqrt{S_n}\right) \leqslant \\
&\leqslant \sqrt{S_m} \cdot \left(\frac{p_1}{4} + \ldots + \frac{p_n}{4}\right) = \\
&= \sqrt{S_m} \cdot 150\ \text{cm}.
\end{aligned}$$

Järelikult $\sqrt{S_m} \geqslant 6\ \text{cm}$ ehk $S_m \geqslant 36\ \text{cm}^2$, mida oligi vaja tõestada.

*Lahendus 2.* Samamoodi nagu eelmises lahenduses tähistame tükkide ümbermõõdud ja pindalad vastavalt $p_1, \ldots, p_n$ ja $S_1, \ldots, S_n$ ning tõestame võrduse $p_1 + \ldots + p_n = 600\ \text{cm}$. Ülesande tingimuste põhjal on tükkide kogupindala $900\ \text{cm}^2$.

Olgu $\frac{S_m}{p_m}$ suhetest $\frac{S_1}{p_1}, \ldots, \frac{S_n}{p_n}$ maksimaalne. Siis iga $i = 1, \ldots, n$ korral $\frac{S_m}{p_m} \cdot p_i \geqslant S_i$; liites kõik need võrratused üle $i = 1, \ldots, n$, saame $\frac{S_m}{p_m} \cdot (p_1 + \ldots + p_n) \geqslant S_1 + \ldots + S_n$, kust

$$\frac{S_m}{p_m} \geqslant \frac{S_1 + \ldots + S_n}{p_1 + \ldots + p_n} = \frac{3}{2}\ \text{cm}.$$

Teisalt võib näidata, et sama ümbermõõduga tükk on suurima pindalaga siis, kui tegu on ruuduga. Kui tükk pole ristkülikukujuline, siis ristkülik, mis nii horisontaal- kui ka vertikaalmõõtmes on täpselt sama ulatusega kui vaadeldav tükk, on ilmselt sama või väiksema ümbermõõduga, kuid suurema pindalaga; ümbermõõdu vähenemisel võib sarnasusteisendusega suurendada ristkülikut nii, et pindala suureneb veelgi. Seega võib hindamisel eeldada, et tegu on ristkülikuga. Kui ristküliku mõõtmed on $a$ ja $b$, siis sama ümbermõõduga ruudu küljepikkus on $\frac{a+b}{2}$. Kuid aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelise võrratuse põhjal $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, kust $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geqslant ab$ ehk selle ruudu pindala on vähemalt niisama suur kui ristküliku pindala.

Ruudul ümbermõõduga $p_i$ on küljepikkus $\frac{p_i}{4}$. Seega $\frac{S_i}{p_i} \leqslant \frac{\left(\frac{p_i}{4}\right)^2}{p_i} = \frac{p_i}{16}$, kust $S_i \leqslant \frac{p_i^2}{16}$ ehk $p_i \geqslant 4\sqrt{S_i}$. Kui nüüd oletada väitevastaselt, et kõigi tükkide pindala on väiksem kui 36 cm$^2$, siis saame

$$\frac{3}{2}\text{ cm} \leqslant \frac{S_m}{p_m} \leqslant \frac{S_m}{4\sqrt{S_m}} = \frac{\sqrt{S_m}}{4} < \frac{6\text{ cm}}{4} = \frac{3}{2}\text{ cm},$$

vastuolu.

*Märkus.* Murdu $\frac{a_1 + \ldots + a_n}{b_1 + \ldots + b_n}$ nimetatakse murdude $\frac{a_1}{b_1}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$ *mediandiks*. Medianti iseloomustab nn *mediandivõrratus*, mille järgi paikneb positiivsete nimetajatega murdude mediant arvteljel alati suurima ja vähima murru vahel. Lahendus 2 kasutab mediandivõrratust murdude $\frac{S_1}{p_1}, \ldots, \frac{S_n}{p_n}$ korral suurima murru suhtes (ja ka tõestab selle võrratuse). Teine võimalus mediandivõrratuse kehtivuses veendumiseks on märgata, et murdude $\frac{a_1}{b_1}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$ mediant avaldub nendesamade murdude kaalutud keskmise kujul, kus kaaludeks on arvud $\frac{b_1}{b_1 + \ldots + b_n}, \ldots, \frac{b_n}{b_1 + \ldots + b_n}$.

Medianti ei saa pidada tehteks arvulistel suurustel, vaid nende murrulistel esitustel, sest komplektis mõne murru taandamisel või lugeja ja nimetaja korrutamisel sama arvuga mediandi väärtus üldjuhul muutub. Näiteks murdude $\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{3}$ mediant on $\frac{2}{5}$, kuid sama väärtusega murdude $\frac{3}{6}$ ja $\frac{2}{6}$ mediant on $\frac{5}{12}$. Arvuteoorias kohtame medianti ka arvulise tehte kujul, kus definitsioonis eeldatakse, et murrud, millest mediant leitakse, on täisarvuliste lugejate ja nimetajatega ning taandumatud.

*Lahendus 3.* Samamoodi nagu esimeses lahenduses tähistame tükkide ümbermõõdud ja pindalad vastavalt $p_1, \ldots, p_n$ ja $S_1, \ldots, S_n$ ning tõestame võrduse $p_1 + \ldots + p_n = 600$ cm. Oletame väitevastaselt, et kõigi tükkide pindala on väiksem kui 36 $\text{cm}^2$. Siis $n > 25$, sest vastasel korral oleks kogupindala väiksem kui $25 \cdot 36$ $\text{cm}^2$ ehk 900 $\text{cm}^2$, mis on vastuolus ülesande tingimusega. Teisendame tükkide kogumit järgmiste etappide kaupa; veendume, et tükkide ümbermõõtude summa seejuures ei suurene.

- *Kõik tükid, mis pole ristkülikukujulised, asendame sama pindalaga ristkülikuga.* Selleks asendame tüki kõigepealt ristkülikuga, mille ulatus horisontaal- ja vertikaalmõõtmes on sama nagu algsel tükil, ja siis vähendame saadud ristkülikut sarnasusteisendusega algse pindalani. Kummalgi sammul ümbermõõt ei suurene.
- *Kõik ristkülikud, mis pole ruudud, asendame sama pindalaga ruutudega.* Olgu tüki pindala $S$ ning küljepikkused $x$ ja $\frac{S}{x}$. Siis ümbermõõt on $p(x) = 2 \cdot \left(x + \frac{S}{x}\right)$. Tuletis $p'(x) = 2 \cdot \left(1 - \frac{S}{x^2}\right)$ võrdub nulliga juhul $S = x^2$. Et sama pindalaga järjest kitseneva ristküliku ümbermõõt on kuitahes suur, saab leitud ekstreemum olla ainult miinimum, st sama pindalaga ristkülikutest on ruudul vähim ümbermõõt.
- *Kuni leidub veel ruute, mille pindala on väiksem kui* 36 *cm*$^2$*, valime kaks sellist ruutu ja suurendame suurema pindala väiksema arvelt (võrdsete pindalade korral ükskõik kumma pindala teise arvelt) niipalju kui võimalik, et samas ühegi tüki pindala ei läheks suuremaks kui* 36 *cm*$^2$ *(kui üks tükk jääb pindalaga* 0 *cm*$^2$*, siis kaotame selle tüki).* Olgu muudetavate ruutude pindalade summa $2S$ ja väiksema ruudu pindala $x$; siis nende ruutude ümbermõõtude summa on $q(x) = 4\sqrt{x} + 4\sqrt{2S - x}$. Tuletis $q'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{2S - x}}$ võrdub nulliga juhul $x = S$ ning on piirkonnas $0 < x < S$ positiivne. Seega on ümbermõõtude summa seda väiksem, mida väiksem on väiksem ruut.

Et protsessi käigus ei ületa ühegi tüki pindala 36 $\text{cm}^2$ ja tükkide kogupindala on 900 $\text{cm}^2$, lõpeb see protsess olukorras, kus on täpselt 25 ruudukujulist tükki, igaüks pindalaga 36 $\text{cm}^2$. Nende ruutude ümbermõõtude summa on $25 \cdot 4 \cdot 6$ cm ehk 600 cm. Et protsessi käigus see summa vähenes, pidi algne summa olema suurem, mis on vastuolus võrdusega $p_1 + \ldots + p_n = 600$ cm.

**3.** *Vastus:* b) ei.

a) Võtame $q = 1$ ning olgu $x$ suvaline positiivne ratsionaalarv. Olgu $n = p - 1$, kus $p$ on suurim algarv, millega murru $x$ lugeja või nimetaja jagub. Siis kõik need algarvud, mis esinevad arvu $x$ esituses algarvude astmete korrutisena nullist erineva astmega, saab esitada kujul $1 + i$, kus $1 \leqslant i \leqslant n$. Et saada karismaatilisuse tingimuses nõutud korrutist, varustame sellised algarvud samade astendajaga, mis neil on arvu $x$ esituses algarvude astmete korrutisena, kordarvude astendajate kohale võtame nullid.

b) Võtame $q = \dfrac{1}{3}$ ning $x = 1$. Kuna $1 = (q+1)^0$, siis valitud $x$ on karismaatiline. Oletame, et $x+1$ ehk 2 on samuti karismaatiline. Siis leidub positiivne täisarv $n$ ja täisarvud $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, mille korral

$$\left(\frac{1}{3}+1\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{1}{3}+2\right)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{3}+n\right)^{\alpha_n} = 2$$

ehk

$$\left(\frac{3\cdot 1+1}{3}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{3\cdot 2+1}{3}\right)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{3\cdot n+1}{3}\right)^{\alpha_n} = 2.$$

See on samaväärne tingimusega

$$(3\cdot 1+1)^{\alpha_1} \cdot (3\cdot 2+1)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot (3\cdot n+1)^{\alpha_n} = 2\cdot 3^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}.$$

Ilmselt $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0$, sest vasaku poole astmete alused ei jagu 3-ga ja seega nende astmete korrutises algarv 3 ei esine. Seega

$$(3\cdot 1+1)^{\alpha_1} \cdot (3\cdot 2+1)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot (3\cdot n+1)^{\alpha_n} = 2.$$

Olgu $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}$ kõik positiivsed astendajad ning $\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_l}$ kõik negatiivsed astendajad. Saadud tingimus on samaväärne võrdusega

$$\frac{(3i_1+1)^{\alpha_{i_1}} \cdot \ldots \cdot (3i_k+1)^{\alpha_{i_k}}}{(3j_1+1)^{|\alpha_{j_1}|} \cdot \ldots \cdot (3j_l+1)^{|\alpha_{j_l}|}} = 2$$

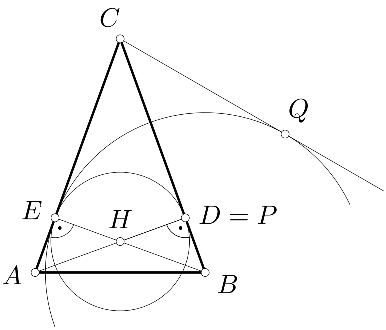
ehk võrdusega

$$(3i_1+1)^{\alpha_{i_1}} \cdot \ldots \cdot (3i_k+1)^{\alpha_{i_k}} = 2\cdot (3j_1+1)^{|\alpha_{j_1}|} \cdot \ldots \cdot (3j_l+1)^{|\alpha_{j_l}|}.$$

Selle võrduse vasak pool annab 3-ga jagades jäägi 1, parem pool aga jäägi 2. Saime vastuolu, seega 2 ehk $x+1$ ei ole karismaatiline ning kontrollitud väide ei kehti.

# Lahendused

**4.** *Lahendus 1.* Juhul $|AC| = |BC|$ on $P = D$ ja ülesande väide triviaalne (joonis 1). Järgnevas eeldame, et $|AC| \neq |BC|$.




Joonis 1

Konstruktsiooni põhjal on punktid $E$ ja $Q$ teineteise peegeldused sirgest $CB$. Kuna $D$ asub sirgel $CB$, siis järeldub sellest võrdus

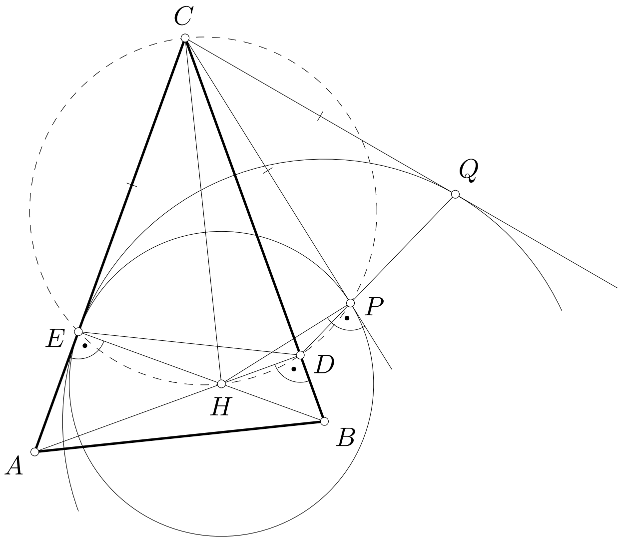
$$\angle CDQ = \angle CDE. \tag{3}$$

Teisalt on ülesande tingimuste kohaselt $\angle CDH = \angle CEH = \angle CPH = 90^\circ$, mistõttu punktid $C$, $H$, $D$, $E$ ja $P$ asuvad ühel ringjoonel diameetriga $CH$. Et puutujalõikude omaduse põhjal $|CP| = |CE|$, on $CP$ ja $CE$ ühtlasi võrdsed kõõlud ringjoonele diameetriga $CH$. Kui $|AC| > |BC|$ (joonis 2), siis punkt $D$ jääb mõlemast kõõlust ringi keskpunkti poole, mistõttu

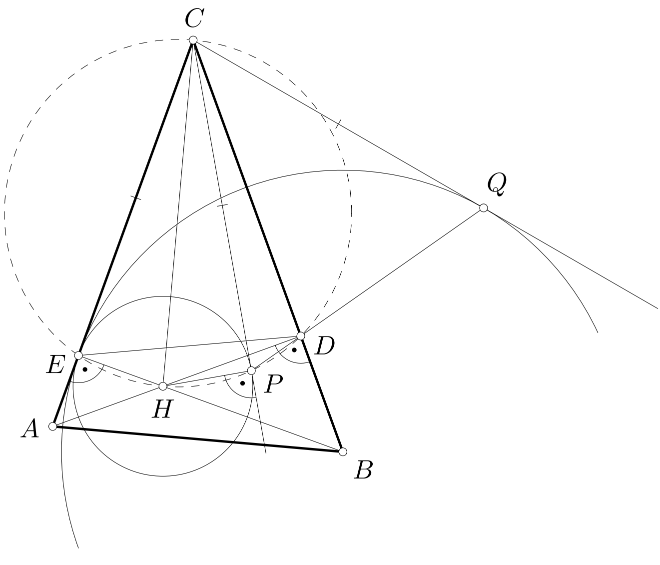
$$\angle CDE = \angle CDP.$$

Koos võrdusega (3) see annabki, et punktid $D$, $P$ ja $Q$ on ühel sirgel. Kui $|AC| < |BC|$ (joonis 3), siis punkt $D$ paikneb kõõlu $CE$ suhtes endiselt keskpunktiga samal pool, kuid kõõlu $CP$ suhtes keskpunktist erineval pool, mistõttu

$$\angle CDE = 180^\circ - \angle CDP.$$




Joonis 2




Joonis 3

Koos võrdusega (3) see annab jällegi, et punktid $D$, $P$ ja $Q$ on ühel sirgel.

*Lahendus 2.* Eeldame, et $|AC| \neq |BC|$. Konstruktsiooni põhjal on punktid $P$ ja $E$ teineteise peegeldused sirgest $CH$ ning $Q$ ja $E$ teineteise peegeldused sirgest $CB$. Seega $|CP| = |CE| = |CQ|$ ning $\angle ECH = \angle PCH$ ja $\angle ECB = \angle QCB$. Kasutades kolmnurga $PCQ$ võrdhaarsust ning seost $\angle PCQ = \angle ECQ - \angle ECP$, saame

$$\begin{aligned}
\angle CPQ &= 90^\circ - \frac{\angle PCQ}{2} = \\
&= 90^\circ - \left(\frac{\angle ECQ}{2} - \frac{\angle ECP}{2}\right) = \\
&= 90^\circ - (\angle ECD - \angle ECH) = \\
&= 90^\circ - \angle HCD.
\end{aligned}$$

Kuna $\angle HDC = \angle HPC = 90^\circ$, on punktid $C$, $H$, $D$, $P$ ühel ringjoonel diameetriga $CH$. Kui nüüd $|AC| > |BC|$, siis piirdenurkadest saame $\angle HPD = \angle HCD$ ning

$$\angle HPD + \angle HPC + \angle CPQ = \angle HCD + 90^\circ + (90^\circ - \angle HCD) = 180^\circ.$$

Sellest tulenevalt on punktid $D$, $P$ ja $Q$ ühel sirgel. Kui $|AC| < |BC|$, saame $\angle HPD = 180^\circ - \angle HCD$ ning

$$\angle CPD = \angle HPD - \angle HPC = (180^\circ - \angle HCD) - 90^\circ = \angle CPQ.$$

Siit tulenevalt on jällegi $D$, $P$ ja $Q$ ühel sirgel.

**5.** *Vastus:* $f(x) = 0$ ja $f(x) = x^2$.

Vahetades algses võrduses muutujad $x$ ja $y$, saame

$$f\left(f(y) + f(x)\right) = f(y^2) + 2y^2 f(x) + \left(f(x)\right)^2. \tag{4}$$

Kuna $f(x)+f(y) = f(y)+f(x)$, on võrduse (4) vasak pool võrdne originaalvõrduse vasaku poolega. Seega on võrdsed ka paremad pooled ehk

$$f(x^2) + 2x^2 f(y) + \left(f(y)\right)^2 = f(y^2) + 2y^2 f(x) + \left(f(x)\right)^2. \tag{5}$$

Võttes võrduses (5) $y = 0$ ja tähistades $f(0) = a$, saame

$$f(x^2) + 2x^2 a + a^2 = a + \left(f(x)\right)^2. \tag{6}$$

Võttes aga võrduses (5) $y = 1$ ja tähistades $f(1) = b$, saame

$$f(x^2) + 2x^2 b + b^2 = b + 2f(x) + \left(f(x)\right)^2. \tag{7}$$

Võrduse (6) lahutamine võrdusest (7) annab nüüd

$$2(b-a)x^2 + b^2 - a^2 = b - a + 2f(x). \tag{8}$$

Võttes võrduses (8) $x = 0$, saame $b^2 - a^2 = b + a$. Et $b^2 - a^2 = (b + a)(b - a)$, on kaks võimalust: kas $b + a = 0$ või $b - a = 1$.

Kui $b + a = 0$, siis algsesse võrdusse $x = 0$ ja $y = 1$ asendamine annab $f(0) = f(a + b) = a + b^2$, millest järeldub $b^2 = 0$ ehk $b = 0$ ja ka $a = 0$. Võrdusest (8) saame nüüd iga reaalarvu $x$ korral $f(x) = 0$.

Kui $b - a = 1$ ehk $b = a + 1$, siis võrdus (8) annab iga reaalarvu $x$ jaoks $2f(x) = 2x^2 + (b + a - 1) = 2x^2 + 2a$ ehk $f(x) = x^2 + a$, kust juhul $x = 2a$ saame $f(2a) = 4a^2 + a$. Võttes aga algses võrduses $x = y = 0$, saame $f(2a) = a + a^2$. Seega $a^2 = 4a^2$, kust $a = 0$. Järelikult iga reaalarvu $x$ korral $f(x) = x^2$.

Kontroll näitab, et funktsioonid $f(x) = 0$ ja $f(x) = x^2$ rahuldavad algset võrrandit.

**6.** *Vastus:* 4.

Näitame, et 4 reaga nõutud omadustega ruudustik on võimalik. Värvime esimesed kaks ruutu kõikvõimalikel viisidel (valge-valge, valge-must, must-valge ja must-must) ja kõik ülejäänud ruudud värvime valgeks. Konstruktsiooni põhjal kehtib tingimus (2) ning tingimus (3) kehtib seetõttu, et $m > 2$ ja vähemalt viimane ruut on kõigis ridades valge. Tingimus (1) kehtib, sest valitava kolme rea seas on kindlasti kaks, mille ruudud kummaski esimesest kahest veerust on vastasvärvi, mistõttu on kolmas valitud rida kindlasti nende segu. Tingimuse (4) kontollimiseks lisame tabelisse suvaliselt uue rea $U$. Kui rea $U$ tagumised $m - 2$ ruutu on valged, siis on rikutud tingimus (2). Kui rea $U$ tagumisest $m - 2$ ruudust on mõni must, siis ei saa $U$ olla algsest 4 reast ühegi kahe segu. Oletades tingimuse (1) kehtivust, peaks igas rida $U$ sisaldavas reakolmikus mingi rida olema segu reast $U$ ja kolmandast reast. Pannes rea $U$ kokku kahe sellise reaga, mille ruudud kummaski esimesest kahest veerust on vastasvärvi, näeme, et reas $U$ peavad kaks esimest ruutu olema värvitud ühtemoodi sellega neist kahest reast, mis on teiste segu. Siit tuleb vastuolu, sest algses tabelis on niisugusi reapaare kaks.

Näitame järgnevas, et ülesande tingimusi rahuldava ruudustiku ridade arv ei saa olla midagi muud kui 4. Olgu $A$ ja $B$ sellised read, mis erinevad teineteisest kõige rohkem, ja olgu $k$ ruutude arv, mille poolest $A$ ja $B$ erinevad; tingimuse (3) põhjal $k < m$. Ilmselt jäävad suvalise veeru kõigi ruutude värvide ümbervahetamisel tingimused (1)–(4) kehtima. Seetõttu võib üldisust kitsendamata eeldada, et rea $A$ kõik ruudud on valged ja reas $B$ on täpselt $k$ ruutu mustad. Samuti jäävad tingimused (1)–(4) kehtima veergude vahetamisel, mistõttu võib eeldada, et reas $B$ on esimesed $k$ ruutu mustad ja ülejäänud $m - k$ ruutu valged.

Olgu $X$ suvaline rida, mille tagumisest $m-k$ ruudust mõni on must. Kui rea $X$ esimesed $k$ ruutu on mustad, siis erinevad read $A$ ja $X$ teineteisest rohkem kui $k$ ruudu poolest, kui aga rea $X$ esimesed $k$ ruutu on valged, siis erinevad read $B$ ja $X$ teineteisest rohkem kui $k$ ruudu poolest — mõlemad olukorrad on vastuolus $A$ ja $B$ valikuga. Kui aga rea $X$ esimese $k$ ruudu seas on nii valgeid kui ka musti, siis ei ole ridadest $A$, $B$ ja $X$ ükski ülejäänud kahe segu, mis on vastuolus tingimusega (1). Et kõigil juhtudel saime vastuolu, siis viimased $m-k$ veergu peavad koosnema ainult valgetest ruutudest.

Iga rea $X$ korral tähistagu $\mathrm{MV}\,X$ kõigi nende veergude hulka, mille ruut reas $X$ on must. Oletame, et iga kahe rea $X$ ja $Y$ korral kas $\mathrm{MV}\,X \subseteq \mathrm{MV}\,Y$ või $\mathrm{MV}\,Y \subseteq \mathrm{MV}\,X$. Lisame ruudustikule rea $T$, mille kõik $m$ ruutu on mustad. Kuna sellist rida enne tabelis polnud, on jätkuvalt täidetud tingimus (2). Võttes suvalised algselt eksisteerinud read $X$ ja $Y$ ja eeldades üldisust kitsendamata, et $\mathrm{MV}\,X \subseteq \mathrm{MV}\,Y$, on rida $Y$ ridade $X$ ja $T$ segu. Seega reaga $T$ täiendatud tabel rahuldab ka tingimust (1). See aga on vastuolus tingimusega (4). Seega leiduvad read $X$ ja $Y$, mille puhul $\mathrm{MV}\,X \not\subseteq \mathrm{MV}\,Y$ ja $\mathrm{MV}\,Y \not\subseteq \mathrm{MV}\,X$.

Olgu $X$ ja $Y$ suvalised niisugused read. See tähendab, et mingis veerus on rea $X$ ruut must ja rea $Y$ ruut valge ning mingis teises veerus on rea $Y$ ruut must ja rea $X$ ruut valge. Sellest tulenevalt ei ole rida $X$ ei ridade $A$ ja $Y$ segu ega ridade $Y$ ja $B$ segu ning samuti pole rida $Y$ ei ridade $A$ ja $X$ ega ridade $X$ ja $B$ segu. Tingimuse (1) tõttu peavad siis nii $A$ kui ka $B$ olema $X$ ja $Y$ segud. See aga tähendab, et igas veerus esimese $k$ seast on ridade $X$ ja $Y$ ruutudest üks must ja üks valge.

Oletame, et peale ridade $A$, $B$, $X$ ja $Y$ leidub tabelis veel mõni rida $Z$; tingimuse (2) põhjal on ta neist neljast erinevalt värvitud. Seega peab kehtima $\mathrm{MV}\,Z \subseteq \mathrm{MV}\,X$ või $\mathrm{MV}\,X \subseteq \mathrm{MV}\,Z$, sest vastasel korral oleks $Z$ eelmise lõigu põhjal reaga $Y$ ühtemoodi värvitud. Sarnasel põhjusel peab kehtima ka $\mathrm{MV}\,Z \subseteq \mathrm{MV}\,Y$ või $\mathrm{MV}\,Y \subseteq \mathrm{MV}\,Z$. Kui $\mathrm{MV}\,Z \subseteq \mathrm{MV}\,X$ ja $\mathrm{MV}\,Y \subseteq \mathrm{MV}\,Z$, siis $\mathrm{MV}\,Y \subseteq \mathrm{MV}\,X$, mis pole võimalik. Samamoodi viib vastuolule kombinatsioon $\mathrm{MV}\,Z \subseteq \mathrm{MV}\,Y$ ja $\mathrm{MV}\,X \subseteq \mathrm{MV}\,Z$. Seega $\mathrm{MV}\,Z \subseteq \mathrm{MV}\,X$ ja $\mathrm{MV}\,Z \subseteq \mathrm{MV}\,Y$ või $\mathrm{MV}\,X \subseteq \mathrm{MV}\,Z$ ja $\mathrm{MV}\,Y \subseteq \mathrm{MV}\,Z$; esimesel juhul on $Z$ värvitud samamoodi kui $A$ ja teisel juhul samamoodi kui $B$. Seega rida $Z$ ei leidu ja tabeli ridade arv on 4.

## Hindamisskeemid

1. *(Aleksei Lissitsin)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

   - Tõestatud juhul $n = 5$: 4 p

     *Sealhulgas:*

     - Märgatud, et meil on kolm järjestikuste liikmete kolmikut: *2 p*
     - Läbi vaadatud liikme $a_1 + a_5$ üks võimalik paiknemine: *1 p*
     - Läbi vaadatud teine variant: *1 p*

   - Tõestatud juhul $n > 5$: 3 p

     *Sealhulgas:*

     - Märgatud, et vahed $a_{i+1} - a_i$ ja $a_{j+1} - a_j$ peavad olema paarikaupa erinevad (isegi kui puudub vajalik eeldus, et $i \neq j$ ja $i \neq j \pm 1$), või tõestatud võrdus $a_3 + a_{n-2} = a_{n-1} + a_2$: *2 p*

   Seda ülesannet on võimalik teha erinevalt žürii lahendusest ka nii-öelda täieliku läbivaatusega, kus juhud $n = 5$ ja $n > 5$ tehakse peaaegu korraga. Nagu tavaliselt juhtub läbivaatusega, puuduliku läbivaatuse korral antakse ka vähe punkte.

2. *(Urve Kangro)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

   Skeem lahendusele pindalade ruutjuurte summa hindamise kaudu (žürii lahendus 1):

   - Näidatud, et tükkide ümbermõõtude summa on 600 cm: 1 p
   - Näidatud, et $\sqrt{S_i} \leqslant \dfrac{p_i}{4}$: 2 p
   - Lahendus lõpule viidud: 4 p

   Skeem lahendusele maksimaalse pindala ja ümbermõõdu suhte kaudu (žürii lahendus 2):

   - Näidatud, et $\dfrac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = \dfrac{3}{2}$ cm: 1 p
   - Järeldatud, et siis leidub $m$ nii, et $\dfrac{S_m}{p_m} \geqslant \dfrac{3}{2}$ cm: 2 p
   - Näidatud, et siis $S_m \geqslant 36\ \mathrm{cm}^2$: 4 p

   Skeem lahendusele tükkide asendamise kaudu (žürii lahendus 3):

- Näidatud, et tükkide ümbermõõtude summa on 600 cm: 1 p
- Näidatud, et kõik mittekumerad tükid saab asendada ristkülikutega nii, et pindala jääb samaks ning ümbermõõt väheneb: 1 p
- Näidatud, et kõik ristkülikud saab asendada ruutudega nii, et pindala jääb samaks ning ümbermõõt väheneb: 1 p
- Näidatud, et kui leidub ruute, mille pindala on väiksem kui $36\ \mathrm{cm}^2$, siis saame suuremat suurendada ning väiksemat vähendada nii, et pindala jääb samaks ning ümbermõõtude summa väheneb: 2 p
- Lahendus lõpule viidud: 2 p

Paljudes töödes püüti kuidagi pitsa jagamist „efektiivsemaks“ muuta, asendades kõveraid jooni sirgetega, pöörates mittekumeraid sisenurki teistpidi jms. Kui seda tehti nii, et kogu aeg säiliks tingimustele vastav pitsa tükeldus, siis on praktiliselt võimatu garanteerida, et kõik võimalikud juhud on läbi vaadatud, samuti oli ignoreeritud võimalust, et võib-olla ei saa asendust teha, kuna vastavas piirkonnas on juba mõni teine lõige ees. Sellise lahenduse eest üldjuhul punkte ei saanud (kui just polnud tehtud ka mõni skeemile vastav samm).

Paljudes töödes sisaldus väiteid, et ruudul on suurem pindala ja ümbermõõdu suhe kui ristkülikul. Kui me seejuures midagi (näiteks pindala või ümbermõõtu vms.) ei fikseeri, siis on selline väide mõttetu, kuna see suhe võib olla mistahes positiivne arv nii ruutude kui ka ristkülikute korral. Osades töödes oli tehtud skeemile 3 vastavaid samme ümbermõõtu samaks jättes ja pindala suurendades. Olgugi et need on tegelikult ekvivalentsed (me võime alati lõpuks teha sarnasusteisenduse, nii et ikkagi pindalad jäävad samaks), praegu lahenduse seisukohast jääb siin üks samm puudu, sest kui me tõestame, et nende suurendatud pindalade hulgas leidub üks, mis on vähemalt $36\ \mathrm{cm}^2$, siis sellest ei järeldu veel, et ka esialgsete tükkide pindalade hulgas selline leidus. Seetõttu läks sellisel juhul 1 punkt maha. Mitmetes tükkide teisendusi kasutavates töödes oli lõpuks jõutud järeldusele, et tükid peaksid olema ruudud, ning siis tehtud põhjendamatu eeldus, et need tükid peavad olema ühesuurused. Need tööd said skeemi 3 järgi maksimaalselt 3 punkti.

**3.** *(Reimo Palm)*

- a)-osa: 2 p

  *Sealhulgas tüüpiliste lahenduste eest:*
  - Näidatud, et leidub $q$, mis sobib iga $x$ jaoks: *2 p*
  - Näidatud, et iga $x$ jaoks leidub sobiv $q$: *0 p*
- b)-osa: 5 p

  *Sealhulgas tüüpiliste lahenduste eest:*
  - Õige lahendus: *5 p*

- Lahendus, mis on õige ainult eeldusel, et astendajad on positiivsed: *1 p*
- Vale lahendus: *0 p*

# IMO'15 Eesti võistkonna valikvõistlus

16.–17. aprill 2015 **Teine päev**

## Hindamisskeemid

**4.** *(Oleg Košik)*

Tüüpiliste lahenduste eest võis saada punkte järgmiselt.

- Ainult märgitud, et $|CE| = |CP|$ ja $|CE| = |CQ|$: 0 p
- Ilmutatult öeldud või lahenduses kasutaud, et kolmnurk $PCQ$ on võrdhaarne: 1 p
- Märgitud, et punktid $C$, $H$, $D$, $P$ asuvad ühel ringjoonel: 1 p
- Märgitud, et punktid $C$, $H$, $D$, $E$, $P$ asuvad ühel ringjoonel: 2 p
- Muidu õige lahendus, kuid väljapakutud kujul töötab ainult eeldusel $|AC| < |BC|$ või $|AC| > |BC|$: 6 p

Skeemi teise ja kolmanda rea punkte sai omavahel liita, teise ja neljanda rea punkte mitte. Kui lisaks skeemi teisel-neljandal real olevale olid tehtud märkimisväärselt kasulikud nurkade arvutused, oli võimalik teenida rohkem punkte.

Antud ülesanne osutus lahendajaile eeldatust kahjuks märksa keerulisemaks. Üheks põhjuseks võis olla see, et tänu joonise petlikkusele kasutasid mõned õpilased lahenduse mingil sammul otsesel või varjatud kujul asjaolu, nagu teatud punktid paikneksid ühel sirgel, kuigi seda eeldada ei tohi.

Mitmele õpilastele oli ilmselt võõras kõõlnelinurkade kasutamine lahenduses abivahendina, kuigi samale lõigule toetuvad täisnurgad on kõõlnelinurga lihtsaim ja levinuim tunnus.

Võib arvata, et mõne lahendaja puhul oli probleemiks ka see, et ei tunta häid meetodeid tõestamaks, et kolm punkti asuvad ühel sirgel. Vaatame, millised on võimalused lahenduse joonise 2 puhul. Näitamaks, et $D$, $P$, $Q$ asuvad ühel sirgel olid näiteks järgmised võimalused:

- $\angle CDP = \angle CDQ$;
- $\angle DPC + \angle CPQ = 180^\circ$;
- $\angle DPE + \angle EPQ = 180^\circ$.

Kasutades teatud kõõlnelinurki ja vajadusel ka võrdhaarseid kolmnurki sai iga loetletud võimaluse puhul mitte väga suure vaevaga jõuda sihile.

Üks võistleja pakkus huvitava võimalusena näitamaks, et kolm punkti asuvad ühel sirgel, sellise kolmnurga konstrueerimist, mille jaoks defineeriksid need kolm punkti Simsoni sirge. See lahendus ei olnud küll viidud lõpule, kuid seda ideed on tõesti võimalik rakendada, kuigi võrreldes mõne teise meetodiga pole see tehniliselt just kõige lihtsam ja lühem.

5. *(Erik Paemurru)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid liideti.

- Märgatud sümmeetriat $x$ ja $y$ vahetamise suhtes: 1 p
- Valitud $y = 0$, saades võrrandi (6) žürii lahenduses: 1 p
- Valitud $y = 1$, saades võrrandi (7) žürii lahenduses: 1 p
- Lahutatud viimased kaks, saades võrrandi (8) žürii lahenduses: 1 p
- Pandud tähele, et nüüd on funktsioon kujul $f(x) = cx^2 + d$: 1 p
- Näidatud, et kas $f(1) = f(0) + 1$ või $f$ on nullfunktsioon: 1 p
- Näidatud, et kas $f(x) = x^2$ või $f$ on nullfunktsioon: 1 p

Mitmed õpilased eeldasid kohe alguses, et funktsioon $f$ on mingil teataval kujul, näiteks $f(x) = x^n$ või et $f$ on polünoom. Selline eeldus on täiesti vale ja sellise lahenduse eest punkte ei saa.

Kuna see on väga oluline punkt, kordan üle: funktsionaalvõrrandit lahendades ei tohi eeldada funktsioonile mingit kuju! Otsitakse üldiseid funktsioone. Funktsioon on vastavus reaalarvude vahel, kus igale reaalarvule vastab täpselt üks reaalarv. Näiteks võib igale arvule lõigul $[0, 1]$ seada vastavusse arvu 3, kõikide muude arvude $x$ korral aga arvu $x^2$. Kas igale reaalarvule on seatud täpselt üks reaalarv vastavusse? Jah, seega see on funktsioon. Analoogselt võib konstrueerida igasuguseid veidraid funktsioone. Kui eeldada mingit ilusat kuju, näiteks, et $f$ on polünoom, jääb väga palju funktsioone täiesti vaatamata ja seda lähenemist ei saa mingiks lahenduseks pidada.

6. *(Härmel Nestra)* Tüüpiliste osaliste mõttekäikude eest jagati punkte alljärgnevalt.

- Tõestatud 4 rea võimalikkus $m = 3$ korral: 1 p
- Toodud 4 reaga näide $m = 3$ jaoks, kuid sobivus tõestamata: 0 p
- Tõestatud, et ridade arv ei ületa arvu $2^{m-1}$: 0 p
- Antud õige vastus: 0 p

Maksimaalselt saadi selles ülesandes 1 punkt.