Täiendav valikvõistlus 2015

IMO'15 Eesti võistkonna valikvõistlus

6.–7. mai 2015 **Teine voor. Esimene päev**

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Tõesta, et iga positiivse täisarvu a ja algarvu p jaoks leidub naturaalarv n, mille korral mingid a kõrvutiasuvat numbrit arvus p^n on võrdsed.

2. Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille korral on võimalik korrapärane n-nurk tükeldada kolmnurkadeks diagonaalidega, mis n-nurga sees omavahel ei lõiku, nii et n-nurga igas tipus kohtub paaritu arv kolmnurki.

3. Teravnurkse kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt on H. Olgu K ja P vastavalt lõikude BC ja AH keskpunktid. Kolmnurga ABC tipust A tõmmatud nurgapoolitaja lõikab sirget KP ühes punktis D. Tõesta, et $HD \perp AD$.

IMO'15 Eesti võistkonna valikvõistlus

6.–7. mai 2015 **Teine voor. Teine päev**

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

4. Olgu n selline täisarv ning a ja b sellised reaalarvud, et $n > 1$ ja $a > b > 0$. Tõesta võrratus

$$\left(a^n - b^n\right)\left(\frac{1}{b^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}}\right) > 4n(n-1)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2.$$

5. Olgu M kolmnurga ABC külje AB keskpunkt. Punkti C läbiv ja sirget AB punktis A puutuv ringjoon ning punkti C läbiv ja sirget AB punktis B puutuv ringjoon lõikuvad teistkordselt punktis N. Tõesta, et

$$|CM|^2 + |CN|^2 - |MN|^2 = |CA|^2 + |CB|^2 - |AB|^2.$$

6. Nimetame järjendit $(a_1, \ldots, a_n)$ *kohati perioodiliseks*, kui leidub mittenegatiivne täisarv i ja positiivne täisarv p nii, et $i + 2p \leqslant n$ ja iga täisarvu $j = 1, 2, \ldots, p$ korral $a_{i+j} = a_{i+p+j}$. Näiteks järjendid $(2, 3, 2, 3, 4)$ ja $(1, 2, 3, 3, 4)$ on kohati perioodilised, kuid järjend $(1, 2, 3, 2, 4)$ mitte.

Olgu k positiivne täisarv. Leia vähim selline positiivne täisarv n, mille jaoks leidub järjend $(a_1, \ldots, a_n)$, kus kõik liikmed on hulgast $\{1, 2, \ldots, k\}$ ja mis pole kohati perioodiline, kuid mille jätk $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$ on kohati perioodiline suvalise arvu a_{n+1} korral hulgast $\{1, 2, \ldots, k\}$.

Lahendused

1. Iga täisarvu x ja temaga ühistegurita positiivse täisarvu m korral leidub positiivne täisarv t, mille korral $x^t \equiv 1 \pmod{m}$. Seega kui $p \neq 2$ ja $p \neq 5$, siis saame iga naturaalarvu k jaoks leida mingi $t > 0$, nii et $p^t \equiv 1 \pmod{10^k}$. Et siin ilmselt $p^t > 10^k$, on arvu p^t lõpus järjest $k-1$ nulli ja üks. Seega piisab valida $k > a$ ja $n = t$.

   Kui $p = 2$ või $p = 5$, siis tähistame $q = \dfrac{10}{p}$. Iga naturaalarvu k jaoks saame leida sellise $t > 0$, et $p^t \equiv 1 \pmod{q^k}$. Siis $p^{k+t} \equiv p^k \pmod{10^k}$. Et siin ilmselt $p^{k+t} > 10^k > p^k$, on arvu p^{k+t} lõpunumbriteks kõik arvu p^k numbrid ja nende ees kuni lõpust k-nda kohani nullid. Valime k nii, et $q^k > 10^a$; siis $10^k > 10^a p^k$ ehk $p^k < 10^{k-a}$. See tähendab, et kõrvutiasuvate nullide arv on vähemalt a ning sobib võtta $n = k + t$.

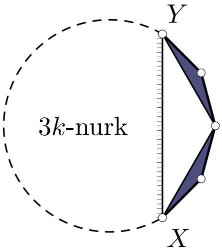
   Märkus. Lahenduse algul sõnastatud ja selles korduvalt kasutatud väidet saab kergesti põhjendada. Kuna võimalikke jääke m-ga jagamisel on vaid lõplik arv, leiduvad Dirichlet' printsiibi põhjal naturaalarvulised astmed x^s ja x^{s+t}, kus $t > 0$, nii et $x^{s+t} \equiv x^s \pmod{m}$. Jagades selle kongruentsi pooled arvuga x^s, saamegi vajaliku väite.

   See väide järeldub ka otse näiteks Euleri teoreemist. Vastavalt Euleri teoreemile kehtib mistahes ühistegurita täisarvu x ja positiivse täisarvu m korral kongruents $x^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, kus φ on nn *Euleri funktsioon*, st $\varphi(n)$ on n-st väiksemate n-ga ühistegurita naturaalarvude arv.

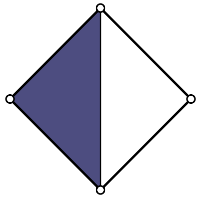
2. *Vastus:* $3k$, kus k on suvaline positiivne täisarv.

   Lahendus 1. Värvime kolmnurgad mustaks ja valgeks nii, et samast diagonaalist eri pooltele jäävad kolmnurgad on eri värvi. See on võimalik, sest üksiku kolmnurga värvimine on võimalik ning jagades hulknurga suvalise diagonaaliga kaheks, võime värvida kummagi osa eraldi ja kui lõikejoonest eri pooltele jäävad kolmnurgad on sama värvi, siis vahetada ühel pool lõikejoont kõigi kolmnurkade värvid. Sellise värvimise puhul on tingimus, et igas tipus kohtub paaritu arv kolmnurki, samaväärne tingimusega, et tükeldatava hulknurga kõigi külgede ääres on üht värvi kolmnurgad.

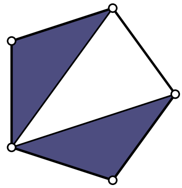
   Näitame induktsiooniga, et kui n jagub 3-ga, siis on nõutud tükeldus võimalik. Väide kehtib triviaalselt $n = 3$ korral. Igale sobivalt tükeldatud



Joonis 1



Joonis 2



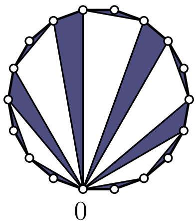
Joonis 3

n-nurgale, mille külgedega piirnevad kolmnurgad on üldisust kitsendamata mustad, saame aga muuta sobivalt tükeldatud $(n+3)$-nurgaks, lisades suvalisele küljele XY hulknurgast väljapoole ühe valge kolmnurga ja kahele uuele küljele omakorda mustad kolmnurgad (joonis 1).

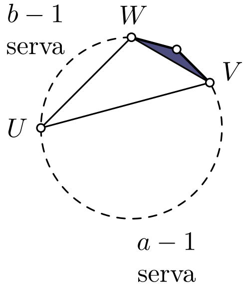
Vaatleme nüüd suvalist n-nurka, mis on tükeldatud nõutud viisil. Eeldame, et väiksema tippude arvuga hulknurgad on nõutud viisil tükeldatavad ainult siis, kui tippude arv jagub 3-ga. Oletame algul, et tükelduses on kasutatud ainult diagonaale, millest ühele või teisele poole jääb vaid üks hulknurga tipp. Selline tipp ei saa olla ühegi tükelduses kasutatud diagonaali otspunktiks. Seega peab vaadeldavas tükelduses olema $n-3$ isoleeritud tippu, sest diagonaalide arv on $n-3$. See tähendab, et kõik diagonaalid on tõmmatud ainult 3 tipu vahel. Et 3 tipu vahel saab tõmmata ülimalt 3 diagonaali, siis $n-3 \leqslant 3$, kust $n \leqslant 6$. Kuid juhtudel $n=4$ ja $n=5$ leidub üldisust kitsendamata vaid üks kolmnurkadeks tükeldamise viis mittelõikuvate diagonaalidega ning see ei rahulda ülesande tingimusi (joonised 2 ja 3).

Jääb üle analüüsida juht, kus mõni tükelduses kasutatav diagonaal d eraldab kummaltki poolt rohkem kui ühe tipu. Üldisust kitsendamata on vaadeldava hulknurga kõigi külgede ääres mustad kolmnurgad. Lõikame n-nurga piki diagonaali d kaheks osaks, mille tippude arvud on x ja y. Ühel saadud hulknurgal on samuti mustad kolmnurgad kõigi külgede ääres – olgu see tippude arvuga x –, teisel aga on mustad kolmnurgad kõigi külgede ääres peale endise diagonaali d, kus on valge kolmnurk. Lisades teise hulknurga valgele küljele väljapoole ühe musta kolmnurga, lisandub 1 tipp ja tekib samuti hulknurk, mille kõigi külgede ääres on mustad kolmnurgad. Induktsiooni eeldusest saame, et arvud x ja $y+1$ jaguvad 3-ga. Et $n = x + y - 2 = x + (y+1) - 3$, jagub 3-ga ka n.

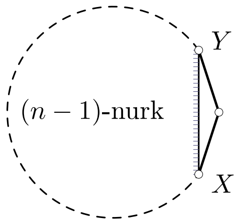
Lahendus 2. Konstrueerime kõigepealt ülesande tingimusi rahuldava tükelduse iga $n = 3k$ jaoks. Nummerdame tipud mööda hulknurga kontuuri järjest arvudega $0, 1, \ldots, n-1$. Tõmbame diagonaalid tipust 0 igasse tema mittenaabertippu, mille number ei jagu 3-ga, ning ühendame diagonaaliga



Joonis 4



Joonis 5



Joonis 6

ka tipud $3i-1$ ja $3i+1$ iga $i=1,\ldots,k-1$ korral (joonisel 4 on näidatud juht $k=6$). Sellega on n-nurk tükeldatud kolmnurkadeks, sest valitud diagonaalid ilmselt ei lõiku ja nende arv on $2(k-1)+(k-1)$ ehk $n-3$. Igasse nullist erineva 3-ga jaguva numbriga tippu ning tippudesse 1 ja $n-1$ on seejuures tõmmatud 0 diagonaali, igasse 3-ga mittejaguva numbriga tippu peale 1 ja $n-1$ on tõmmatud 2 diagonaali ning tippu 0 on tõmmatud $2(k-1)$ diagonaali. Et need kõik on paarisarvud, kohtub igas tipus paaritu arv kolmnurki.

Näitamaks, et sobiv tükeldus leidub ainult 3-ga jaguvate arvude jaoks, interpreteerime ülesande tingimust kolmnurkade värvimise kaudu n-nurga kontuuri ühevärvilisusena nagu lahenduses 1. Vaatleme suvalist n-nurga sobivat tükeldust, kus $n \geqslant 4$, ja eeldame, et väiksema tippude arvuga hulknurkadel väide kehtib. Üldisust kitsendamata on n-nurga külgedega piirnevad kolmnurgad mustad.

Olgu U suvaline tipp, kus kohtub rohkem kui üks kolmnurk. Vaatame mingit valget kolmnurka, mille üks tipp on U; olgu tema teised kaks tippu V ja W. Et n-nurga külgedega piirnevad ainult mustad kolmnurgad, siis V ja W vahel on n-nurga diagonaal (mitte külg). Kolmnurga UVW küljed lõikavad igaüks n-nurga küljest ära ühe hulknurga, mis rahuldab ülesande tingimusi, sest tema kõigi külgedega piirnevad mustad kolmnurgad. Tähistades nende kolmnurkade tippude arvud x, y ja z, kehtib võrdus $x+y+z=n+3$, sest n-nurga iga tipp kuulub vähemalt ühele kolmest hulknurgast ja tipud U, V, W kuuluvad kahele hulknurgale. Seejuures on x, y ja z kõik n-st väiksemad, sest igast kolmnurka UVW moodustavast diagonaalist teisele poole jääb vähemalt kolmnurga UVW kolmas tipp. Induktsiooni eelduse põhjal jaguvad arvud x, y, z kõik 3-ga, sestap jagub 3-ga ka n.

Lahendus 3. Värvime jaotuskolmnurgad ja interpreteerime ülesande tingimust n-nurga kontuuri ühevärvilisusena nagu eelmistes lahendustes. Näitame kõigepealt induktsiooniga n järgi, et kui $3 \mid n$, siis nõutud n-nurga jaotus leidub. Juhul $n=3$ kehtib väide triviaalselt. Kui $n>3$, siis $n=a+b$, kus $3 \mid a$, $3 \mid b$ ja $3 \leqslant a < n$, $3 \leqslant b < n$. Valime suvaliselt n-nurga tipu U ja tõmbame sealt diagonaalid tippu V, mis asub $a-1$ serva võrra vastupäeva, ja tippu W, mis asub $b-1$ serva võrra päripäeva. Tipud V ja W asuvad teineteisest 2 serva kaugusel; ühendame ka need omavahel diagonaaliga (joonis 5). Nii on n-nurk jaotatud kaheks kolmnurgaks, a-nurgaks ja b-nurgaks. Olgu kolmnurk UVW valge ja teine kolmnurk must; induktsiooni eelduse põhjal saab a-nurga ja b-nurga tükeldada mittelõikuvate diagonaalidega kolmnurkadeks nii, et kõik nende küljed on mustad. Kokku tekibki soovitud jaotus.

Järgnevalt näitame, et tingimus $3 \mid n$ on nõutud jaotuse leidumiseks ka tarvilik. Tõestame algul, et igas tükelduses kolmnurkadeks mittelõikuvate diagonaalidega leidub tipp, milles „kohtub“ vaid üks jaotuskolmnurk. Tõepoolest, et n-nurgal on n serva ja igaüks neist on mingi jaotuskolmnurga külg, kuid jaotuses on vaid $n-2$ kolmnurka, leidub Dirichlet' printsiibi põhjal kolmnurk, mis piirneb kahe servaga. Ilmselt peavad need servad paiknema kõrvuti. Nende servade ühine tipp ongi otsitav.

Tõestatud lemmast nähtub, et iga hulknurga tükeldus kolmnurkadeks mittelõikuvate diagonaalidega on saadav kolmnurgast tippude ühekaupa lisamisel kahe olemasoleva naabertipu X ja Y vahele koos uue jaotuskolmnurgaga (joonis 6). Et uue kolmnurga värv on vastupidine endise servaga XY teiselt poolt piirneva jaotuskolmnuga värvile, tekib hulknurgale uue tipu lisamisel kas ühe valge serva asemele kaks musta või ühe musta serva asemele kaks valget. Mõlemal juhul muutub mustade ja valgete servade arvu vahe 3 võrra. Kuna üksikus kolmnurgas on üht ja teist värvi servade arvud vastavalt 3 ja 0, mistõttu protsessi algul on mustade ja valgete servade arvud kongruentsed mooduli 3 järgi, on ka igal sammul tekkinud hulknurgas mustade ja valgete servade arvud kongruentsed mooduli 3 järgi. Ülesande tingimusi rahuldavas n-nurga tükelduses on kõik n serva ühte värvi, mis tähendab, et $n \equiv 0 \pmod{3}$. Väide on tõestatud.

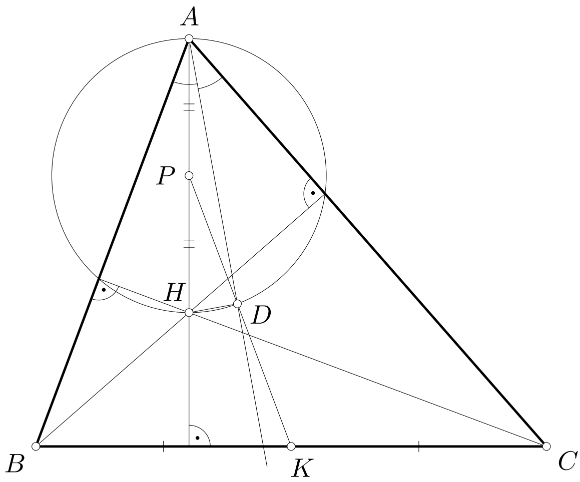
3. *Lahendus 1.* Tingimus $HD \perp AD$ on samaväärne tingimusega, et D asub ringjoonel diameetriga AH (joonis 7). Et P on lõigu AH keskpunkt, on see samaväärne väitega $|PD| = |PA|$, mis omakorda kehtib parajasti siis, kui $\angle PDA = \angle PAD$.

Olgu kolmnurga ABC nurkade suurused tippude A, B, C juures vastavalt α, β, γ ning eeldame üldisust kitsendamata, et $|AB| < |AC|$. Olgu O kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt (joonis 8). Et AD on nurgapoolitaja, siis

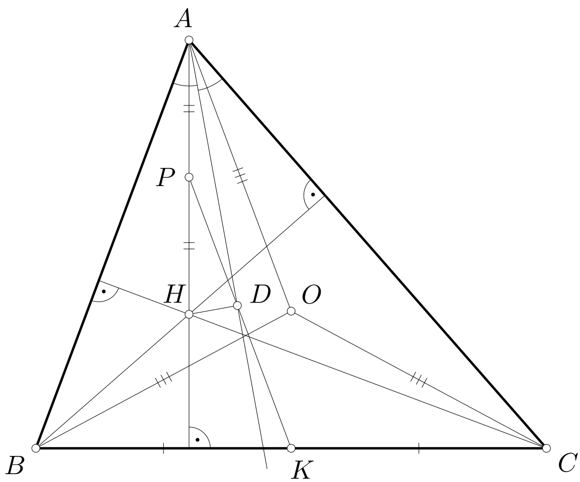
$$\angle PAD = \frac{\alpha}{2} - \angle PAB = \frac{\alpha}{2} - \left(90^\circ - \beta\right).$$

Teisalt,

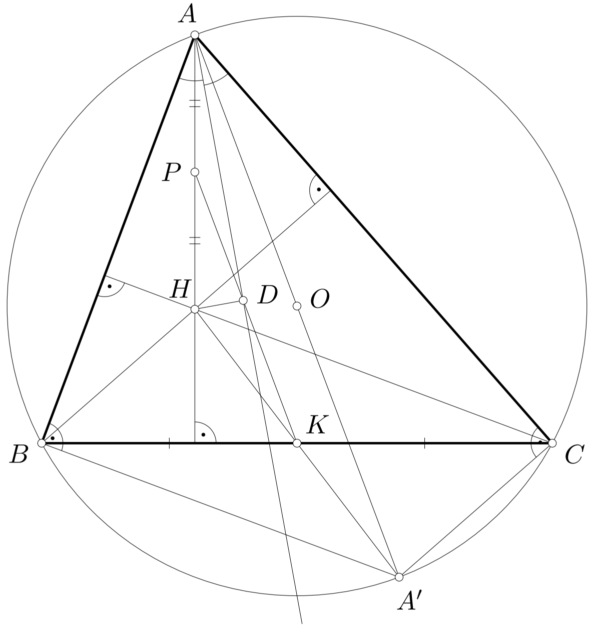
$$\angle OAD = \frac{\alpha}{2} - \angle OAC = \frac{\alpha}{2} - \frac{180^\circ - \angle AOC}{2} = \frac{\alpha}{2} - \frac{180^\circ - 2\beta}{2} = \frac{\alpha}{2} - \left(90^\circ - \beta\right).$$



Joonis 7



Joonis 8



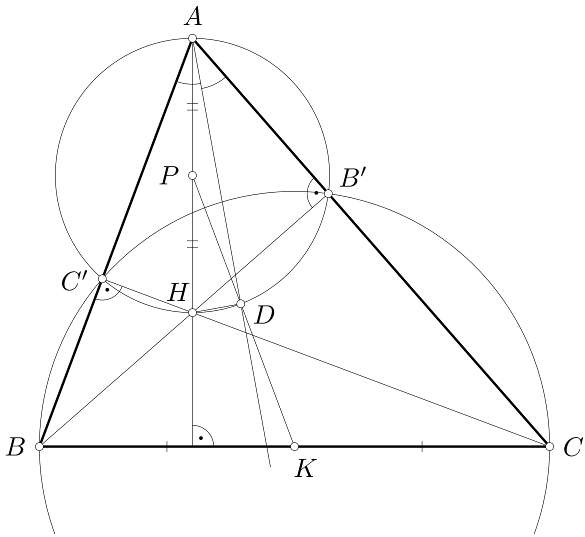
Joonis 9

Seega $\angle PAD = \angle OAD$, mistõttu vajalik võrdus $\angle PDA = \angle PAD$ kehtib parajasti siis, kui $\angle PDA = \angle OAD$ ehk kui $PD \parallel AO$.

Olgu A' punkti A vastaspunkt kolmnurga ABC ümberringjoonel (joonis 9). Kuna P on lõigu AH keskpunkt ning D asub lõigul PK, piisab $PD \parallel AO$ näitamiseks tõestada, et K on lõigu $A'H$ keskpunkt – siis PK on kolmnurga $AA'H$ küljega AA' paralleelne kesklõik. Selleks paneme tähele, et $\angle HBC = 90^\circ - \gamma = \angle BCA'$ ja $\angle HCB = 90^\circ - \beta = \angle CBA'$, mistõttu $HB \parallel CA'$ ja $HC \parallel BA'$ ehk, kokkuvõttes, $HBA'C$ on rööpkülik. Rööpküliku diagonaalid aga poolitavad teineteist, st diagonaali BC keskpunkt K on ühtlasi teise diagonaali $A'H$ keskpunkt.

Märkus. Väide, et $HBA'C$ on rööpkülik, esines talvisel lahtisel võistlusel noorema rühma 5. ülesandena.

Lahendus 2. Olgu B' ja C' vastavalt tippudest B ja C tõmmatud kõrguste aluspunktid (joonis 10). Kuna $\angle AB'H = \angle AC'H = 90^\circ$, asuvad B' ja C' ringjoonel diameetriga AH keskpunktiga P. Analoogiliselt, kuna $\angle BC'C = \angle CB'B = 90^\circ$, asuvad B' ja C' ringjoonel diameetriga BC keskpunktiga K. Et PK ühendab ringjoonte keskpunkte ning C' ja B' on samade ringjoonte lõikepunktid, poolitab lõik PK kummagi ringjoone kaare $B'C'$. Kaare $B'C'$ ringjoonel diameetriga AH aga poolitab ka tipust A tõm-



Joonis 10

matud nurgapoolitaja. Seega lõikuvad sirge PK ja tipust A tõmmatud nurgapoolitaja ringjoonel diameetriga AH. Sellest tulenevalt $\angle HDA = 90^\circ$.

Lahendused

4. Tähistame $x = \sqrt{a}$, $y = \sqrt{b}$; ülesandes antud võrratus taandub siis kujule

$$\left(x^{2n} - y^{2n}\right)\left(\frac{1}{y^{2n-2}} - \frac{1}{x^{2n-2}}\right) > 4n(n-1) \cdot (x-y)^2. \tag{1}$$

Kasutame tegurdusi

$$x^{2n} - y^{2n} = (x-y)\left(x^{2n-1} + x^{2n-2}y + \ldots + xy^{2n-2} + y^{2n-1}\right),$$

$$\frac{1}{y^{2n-2}} - \frac{1}{x^{2n-2}} = \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{y^{2n-3}} + \frac{1}{y^{2n-4}x} + \ldots + \frac{1}{yx^{2n-4}} + \frac{1}{x^{2n-3}}\right).$$

Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest reaalarvude $x^{2n-1}, x^{2n-2}y, \ldots, xy^{2n-2}, y^{2n-1}$ jaoks tuleneb

$$\begin{aligned}
\frac{x^{2n-1} + x^{2n-2}y + \ldots + xy^{2n-2} + y^{2n-1}}{2n} &> \\
&> \sqrt[2n]{x^{2n-1} \cdot x^{2n-2}y \cdot \ldots \cdot xy^{2n-2} \cdot y^{2n-1}} = \\
&= \sqrt[2n]{x^{(2n-1)+(2n-2)+\ldots+1}y^{1+\ldots+(2n-2)+(2n-1)}} = \\
&= \sqrt[2n]{x^{\frac{(2n-1)2n}{2}}y^{\frac{(2n-1)2n}{2}}} = \\
&= (xy)^{\frac{2n-1}{2}};
\end{aligned}$$

võrratus on range, kuna $n > 0$ ja $x \neq y$ tõttu on vähemalt äärmised liikmed x^{2n-1} ja y^{2n-1} erinevad. Arvude $\frac{1}{y^{2n-3}}, \frac{1}{y^{2n-4}x}, \ldots, \frac{1}{yx^{2n-4}}, \frac{1}{x^{2n-3}}$ jaoks saame analoogiliselt

$$\begin{aligned}
&\frac{\frac{1}{y^{2n-3}}+\frac{1}{y^{2n-4}x}+\ldots+\frac{1}{yx^{2n-4}}+\frac{1}{x^{2n-3}}}{2n-2} \geqslant \\
&\geqslant \sqrt[2n-2]{\frac{1}{y^{2n-3}}\cdot\frac{1}{y^{2n-4}x}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{yx^{2n-4}}\cdot\frac{1}{x^{2n-3}}} = \\
&= \sqrt[2n-2]{\frac{1}{y^{(2n-3)+(2n-4)+\ldots+1}}\cdot\frac{1}{x^{1+\ldots+(2n-4)+(2n-3)}}} = \\
&= \sqrt[2n-2]{\frac{1}{y^{\frac{(2n-3)(2n-2)}{2}}}\cdot\frac{1}{x^{\frac{(2n-3)(2n-2)}{2}}}} = \\
&= \frac{1}{(xy)^{\frac{2n-3}{2}}}.
\end{aligned}$$

Et $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{1}{xy}\cdot(x-y)$, saame kokkuvõttes

$$\begin{aligned}
(x^{2n}-y^{2n})\left(\frac{1}{y^{2n-2}}-\frac{1}{x^{2n-2}}\right) &> \frac{1}{xy}\cdot(x-y)^2\cdot 2n(2n-2)\cdot\frac{(xy)^{\frac{2n-1}{2}}}{(xy)^{\frac{2n-3}{2}}} = \\
&= 4n(n-1)\cdot(x-y)^2,
\end{aligned}$$

mis tõestabki vajaliku võrratuse (1).

5. Tähistame $\angle AMC=\delta$ (joonis 11). Koosinusteoreem kolmnurkades AMC ja BMC annab

$$\begin{aligned}
|CA|^2 &= |CM|^2+|AM|^2-2|CM||AM|\cos\delta, \\
|CB|^2 &= |CM|^2+|BM|^2-2|CM||BM|\cos(180^\circ-\delta).
\end{aligned}$$

Arvestades, et $|AM|=|BM|$ ja $\cos(180^\circ-\delta)=-\cos\delta$, saame nende võrduste liitmisel seose $|CA|^2+|CB|^2=2|CM|^2+2|AM|^2$. Seega

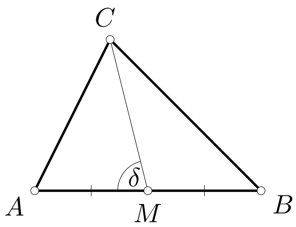
$$|CA|^2+|CB|^2-|AB|^2=2|CM|^2+2|AM|^2-4|AM|^2=2|CM|^2-2|AM|^2.$$

Teisalt, olgu M' sirgete CN ja AB lõikepunkt (joonis 12). Potentsivõrdustest saame

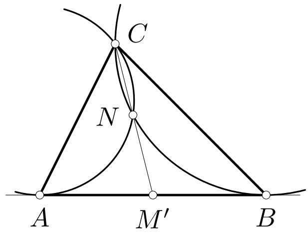
$$|M'A|^2=|M'C|\cdot|M'N|=|MB|^2,$$

seega $|M'A|=|M'B|$ ehk $M'=M$, mis tähendab, et N asub sirgel CM. Sellest tulenevalt

$$|CN|^2=(|CM|-|MN|)^2$$



Joonis 11



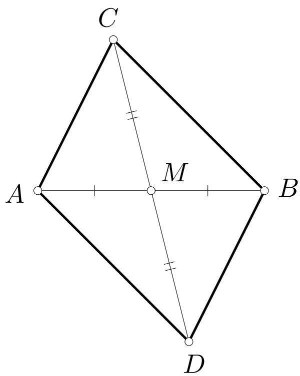
Joonis 12

(see kehtib sõltumata sellest, kummal pool punkti C asub punkt N). Järelikult

$$\begin{aligned} |CM|^2 + |CN|^2 - |MN|^2 &= |CM|^2 + (|CM| - |MN|)^2 - |MN|^2 = \\ &= 2|CM|^2 - 2|CM||MN| = \\ &= 2|CM|^2 - 2|AM|^2. \end{aligned}$$

Märkus. Võrdus $|CA|^2 + |CB|^2 = 2|CM|^2 + 2|AM|^2$, mis sai lahenduse algul tuletatud koosinusteoreemi kaudu, järeldub otsesemalt nn *rööpkülikureeglist*: rööpküliku küljepikkuste ruutude summa võrdub diagonaalide pikkuste ruutude summaga. Tõepoolest, olgu D punkti C peegeldus punktist M (joonis 13); siis mainitud omaduse põhjal $|CD|^2+|AB|^2 = 2\left(|CA|^2 + |CB|^2\right)$. Jagades siin võrduse pooled kahega ja võttes arvesse, et $|CD| = 2|CM|$ ja $|AB| = 2|AM|$, saamegi vajaliku võrduse.

Rööpkülikureegel õigustab oma nime, kuna ta tuleneb otse vektorite liit-



Joonis 13

mise reeglist. Tõepoolest, kuna $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ ja $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$, siis

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CD}^2 &= \overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2 + 2\left(\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}\right),\\ \overrightarrow{BA}^2 &= \overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2 - 2\left(\overrightarrow{CA} \cdot CB\right).\end{aligned}$$

Nende võrduste liitmisel saame rööpkülikureegliga samaväärse võrduse.

6. *Vastus:* $2^k - 1$.

Näitame, et igas nõutud omadusega järjendis on vähemalt $2^k - 1$ liiget. Olgu $(a_1, \ldots, a_n)$ selline järjend, kus liikmed on hulgast $\{1, 2, \ldots, k\}$ ja mis pole kohati perioodiline, kuid mille täiendus $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$ on kohati perioodiline iga $a_{n+1} \in \{1, 2, \ldots, k\}$ korral.

Ilmselt langeb korduva lõigu teise eksemplari lõpp alati kokku kogu järjendi $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$ lõpuga. Iga $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ korral tähistagu p_i korduva lõigu pikkust järjendis $(a_1, \ldots, a_n, i)$.

Vaatame suvalist kaht erinevat arvu $i_1, i_2 \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Ilmselt $p_{i_1} \neq p_{i_2}$, sest vastasel korral oleks $i_1 = a_{n+1-p_{i_1}} = a_{n+1-p_{i_2}} = i_2$.

Üldisust kitsendamata $p_{i_1} < p_{i_2}$. Oletame, et $p_{i_2} < 2p_{i_1}$. Siis iga positiivse täisarvu $j \leqslant p_{i_2} - p_{i_1}$ korral $j < 2p_{i_1} - p_{i_1} = p_{i_1}$ ning ühtlasi $p_{i_2} - p_{i_1} + j < p_{i_2}$. Seega

$$\begin{aligned}a_{n+1-2p_{i_1}+j} &= a_{n+1-p_{i_1}+j}\\ &= a_{n+1-p_{i_2}+(p_{i_2}-p_{i_1})+j}\\ &= a_{n+1-2p_{i_2}+(p_{i_2}-p_{i_1})+j}\\ &= a_{n+1-2p_{i_1}-(p_{i_2}-p_{i_1})+j},\end{aligned}$$

millest tulenevalt on järjend $(a_1, \ldots, a_n)$ kohati perioodiline. Vastuolu eeldusega näitab, et tegelikult $p_{i_2} \geqslant 2p_{i_1}$.

Kuna erinevaid pikkusi p_i on k tükki ja iga kaks neist erinevad teineteisest vähemalt kaks korda, on järjendis $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$ kõige pikema korduva jupi pikkus vähemalt 2^{k-1}. Järelikult $n + 1 \geqslant 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k$, kust $n \geqslant 2^k - 1$.

Konstrueerime iga k jaoks vajaliku järjendi L_k pikkusega $2^k - 1$ rekurrentselt. Juhul $k = 1$ sobib 1-liikmeline järjend $L_1 = (1)$, sest täiendada saab ainult arvuga 1, mispuhul tekib kohati perioodiline järjend $(1, 1)$. Alati, kui meil on mingi k jaoks vajalik järjend L_k pikkusega $2^k - 1$ olemas, moodustame järjendi L_{k+1}, mille alguses on järjest kõik L_k liikmed, nende järel arv $k + 1$ ning lõpuks uuesti kõik järjendi L_k liikmed. Saadud tulemuses on $2^{k+1} - 1$ liiget, mis kõik kuuluvad hulka $\{1, 2, \ldots, k + 1\}$. Järjendi L_k valiku ja L_{k+1} konstruktsiooni tõttu ei saa järjendit L_{k+1} täiendada arvudega $1, 2, \ldots, k$. Kuid teda ei saa täiendada ka arvuga $k + 1$, kuna nii saadud järjend koosneks kahest järjestikusest ühesugusest plokist, mis sisaldab L_k ja $k + 1$.

Märkus. Loomulik on küsida ka, kui pikk saab üldse olla järjend k erinevast objektist, kui ta pole kohati perioodiline. On lihtne veenduda, et juhul $k = 1$ saab selline järjend olla ülimalt pikkusega 1 ja juhul $k = 2$ ülimalt pikkusega 3 (järjestikused liikmed peavad olema erinevad ja järjendit $(1, 2, 1)$ enam pikendada ei anna). Norra matemaatik Axel Thue tõestas aga üle saja aasta tagasi, et juhul $k > 2$ saab konstrueerida terve lõpmata pika jada, nii et ta pole kohati perioodiline. See tulemus pole antud ülesande väitega vastuolus. Ehkki leidub järjend pikkusega $2^k - 1$, mida ilma kohatist perioodilisust tekitamata pikendada ei saa, on pikendamine paljude teiste niisama pikkade ja pikemate järjendite puhul võimalik ning hea valiku korral saab pikendamist lõpmatuseni jätkata.

Hindamisskeemid

1. *(Urve Kangro)*

   - Näidatud, et kui $p \neq 2,\ 5$, siis leidub t nii, et $p^t \equiv 1 \pmod{10^a}$: 2 p
   - Järeldatud, et väide kehtib, kui $p \neq 2,\ 5$: 1 p
   - Näidatud, et väide kehtib, kui $p = 2$ või $p = 5$: 4 p

   Juhud $p = 2$ ja $p = 5$ polnud üheski töös korrektselt tehtud, enamuses töödest polnud isegi aru saadud, et neid juhte tuleks eraldi vaadelda. Mitmes töös oli seos $p^t \equiv 1 \pmod{10^a}$ saadud vigaselt, näiteks vigase Fermat' väikese teoreemi abil, need tööd said skeemi teise rea järgi 1 punkti. Mitmetes töödes esines argumente stiilis „kuna p^n on lõpmatult pikk ja pole perioodiline, siis ilmselt vajalik n leidub“ (ülesande 6 märkus väidab isegi, et leidub lõpmatult pikk mitteperioodiline arv, kus pole isegi kaht ühesugust numbrit järjest – muidu oleks vastav numbrite jada kohati perioodiline). Need tööd said kõik 0 punkti.

2. *(Oleg Košik)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

   - Näidatud, et $n = 3k$ sobib: 2 p
   - Tähele pandud ja põhjendatud, et pole võimalik, et hulknurga ühest tipust väljub paaritu arv diagonaale ja ülejäänutest paarisarv: 1 p
   - Näidatud, et saab leida diagonaalidest moodustatud kolmnurga, mille ümber on tingimustele vastavad hulknurgad: 3 p
   - Sellest induktiivselt järeldatud, et n peab jaguma 3-ga: 1 p

   Esines ka paar sellele skeemile mittevastavat ja žürii lahendustest oluliselt erinevat väga huvitavat lahendust 3-ga jaguvuse tõestamiseks, milles olid mõned olulised asjad kahjuks selgitamata jäetud.

3. *(Juhan Aru)* Tüüpiliste mõttekäikude eest anti punkte järgnevalt.

   - Täislahendus: 7 p
   - Tähelepanekud: 0–1 p

IMO'15 Eesti võistkonna valikvõistlus

16.–17. aprill 2015 **Teine päev**

Hindamisskeemid

4. *(Heiki Niglas)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Muutujavahetuse $x = \sqrt{a}$ kasutamine : 1 p
- Tegurduse $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + \cdots + b^{n-1})$ kasutamine : 2 p
- Lahendus, mis on päris lõpule viimata, aga sisaldab enamuse vajalikest sammudest : 4 p
- Täislahendus : 7 p

Erijuhtude (nt $n = 2$) vaatamise eest punkte ei antud. Enamus lahendajaid üritas lihtsalt sulud avada ja sealt edasi liikuda, aga neist keegi täislahenduseni või isegi osalise lahenduseni ei jõudnud ja sellised tööd said punkte vaid tegurdamise või muutujavahetuse eest. Lihtsalt aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelise võrratuse kasutamise eest punkte ei antud, kui see edasi kuhugi ei viinud ja ei olnud näha, et see võiks aidata täislahenduseni jõuda.

5. *(Kaur Aare Saar)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Näidatud, et M, N ja C asuvad ühel sirgel: 2 p
- Näidatud, et piisab tõestada võrdus $|CM||CN| = |AC||BC| \cos \angle ACB$: 4 p
- Täislahendus: 7 p

Lahendajad, kes ei vaadanud eraldi juhtu, kui tipu C juures on nürinurk ehk kui N asub väljaspool lõiku CM, said 7 punkti, sest arutelu on analoogne, küll aga mõned märgid vastupidised. Korrektsuse huvides tuleks sellistes olukordades mainida, et arutelu on analoogne.

6. *(Härmel Nestra)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Konstruktsioon $n = 2^k - 1$ korral: 2 p
- Tõestus, et $n \geqslant 2^k - 1$: 5 p

Skeemi esimese rea eest anti punktid ka siis, kui polnud tõestatud, et konstruktsioon rahuldab ülesande tingimusi, kuid see oli üsnagi ilmne. (Žürii lahenduse konstruktsiooni korral loeti ülesande tingimuste täidetus ilmseks.) Küll aga nõuti konstruktsiooni esitamist üldkujul; vaid näidete eest väikeste arvude k jaoks anti skeemi esimese rea eest 1 punkt.

Tõestuse osas võeti punkte maha, kui mõned sammud olid põhjendamata või olid selgitused arusaamatud.