Valikvõistlus 2014

IMO'14 Eesti võistkonna valikvõistlus

21.–22. aprill 2014 **Esimene päev**

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Imedemaal on iga riigi valitsuses täpselt a meest ja b naist, kus a ja b on fikseeritud naturaalarvud ning $b > 1$. Riikidevaheliste suhete arendamiseks moodustatakse valitsuste liikmetest kõikvõimalikud töörühmad, kuhu igast valitsusest kuulub täpselt üks esindaja ja kus naisi on vähemalt mingi fikseeritud mittenegatiivne arv n. Sama inimene võib kuuluda mitmesse töörühma. Leia kõik võimalused, mitu riiki saab olla Imedemaal, kui on teada, et erinevate töörühmade arv on algarv.

2. Olgu a, b ja c positiivsed reaalarvud, mille korral $a + b + c = 1$. Tõesta, et

$$\frac{a^2}{b^3 + c^4 + 1} + \frac{b^2}{c^3 + a^4 + 1} + \frac{c^2}{a^3 + b^4 + 1} > \frac{1}{5}.$$

3. Kolm lõiku pikkusega 1 moodustavad tasandil sidusa kujundi. Eri lõikude ühisteks punktideks võivad olla ainult nende otspunktid. Leia selle kujundi kumera katte suurim võimalik pindala.

Märkus. Kujundit nimetatakse *sidusaks*, kui tema iga kaks punkti on võimalik ühendada katkematu joonega, mis koosneb üleni kujundi punktidest. Punktihulga *kumeraks katteks* nimetatakse vähimat kumerat kujundit, mis täielikult sisaldab antud punktihulga.

IMO'14 Eesti võistkonna valikvõistlus

21.–22. aprill 2014 **Teine päev**

Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.
Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

4. Teravnurkse kolmnurga ABC tippudest A ja B tõmmatud kõrguste aluspunktid on vastavalt D ja E. Olgu M külje AB keskpunkt. Sirge CM lõikub kolmnurga CDE ümberringjoonega teistkordselt punktis P ja kolmnurga CAB ümberringjoonega teistkordselt punktis Q. Tõesta, et $|MP| = |MQ|$.

5. Imedemaal on vähemalt 5 linna. Mõned linnad on otse ühendatud maantee või raudteega. Iga linn on ühendatud vähemalt ühe linnaga ning iga nelja linna puhul on vähemalt kolme nende linnade paari vahel mingit liiki otsetee. Sisenedes maa ühistranspordivõrku, peab reisija sisestama automaati ühe kuldmündi, mille eest ta saab sõita otseteed pidi järgmisse linna. Kui aga reisija jätkab mingist linnast sõitu sama liiki transpordivahendiga, millega sinna saabus, ning ta on sellesse linna jõudmiseks kuldmündiga maksnud, siis ta kuni järgmise linnani juurde maksma ei pea, vaid saab hoopis oma viimati kasutatud mündi tagasi. Muudel juhtudel tuleb reisi jätkumisel tasuda nagu reisi alustades. Tõesta, et igast linnast saab mistahes teise linna reisida, kulutades selleks kokkuvõttes ülimalt 2 kuldmünti.

6. Leia kõik naturaalarvud n, mille korral võrrandil $x^2 + y^2 + z^2 = nxyz$ leidub positiivseid täisarvulisi lahendeid.

Lahendused

1. *Vastus:* 1.

Olgu r Imedemaa riikide arv. Kui naiste minimaalarv töörühmas on $n = 0$, siis piisab töörühma moodustamiseks valida iga riigi valitsusest üks liige: erinevaid töörühmi on $(a+b)^r$. See arv saab olla algarv ainult juhul $r = 1$, sest $a + b \geqslant b > 1$.

Kui naiste minimaalarv töörühmas on $n \geqslant 1$, siis võib töörühma, kuhu kuulub täpselt k naist ($n \leqslant k \leqslant r$) moodustada järgmiselt. Kõigepealt valime r riigi hulgast k riiki, mille valitsusest kuulub töörühma naine, seejärel valime iga vaadeldava riigi valitsusest ühe naise b naise seast ning lõpuks iga ülejäänud $r - k$ riigi valitsusest ühe mehe a mehe seast. Seega leidub üldse

$$\binom{r}{k} b^k a^{r-k}$$

töörühma, kuhu kuulub täpselt k naist, ning

$$\sum_{k=n}^{r} \binom{r}{k} b^k a^{r-k}$$

töörühma, kuhu kuulub vähemalt n naist. Et $n \geqslant 1$, siis jaguvad kõik summa liikmed b-ga ning töörühmade arv saab olla algarv ainult juhul, kui ta on arvuga b võrdne. Selleks peab olema $r = 1$, sest muidu oleks summa viimane, väärtusele $k = r$ vastav liige b^r suurem kui b.

Väärtus $r = 1$ rahuldab ülesande tingimusi: näiteks kui valitsus koosneb parajasti 2 naisest, siis on „töörühmade“ arv 2, mis on algarv.

Märkus. Lihtsasti saab sihile jõuda ka binoomkordajaid kasutamata. Olgu $f(x, y)$ võimaluste arv valida x riigi valitsusest igaühest 1 liige nii, et saadavas töörühmas oleks vähemalt y naist. Näitame induktsiooniga x järgi, et arv $f(x, y)$ jagub arvuga b, kui $y \geqslant 1$. Kui $x = 0$, siis $y > x$, mistõttu x liikmest koosnevasse töörühma ei saa kuuluda y naist. Seega $f(x, y) = 0$, mis jagub arvuga b. Eeldades väite kehtivust x riigi jaoks, vaatleme mingit $x + 1$ riiki ja valime nendest välja ühe „erilise“. Kõik võimalused valida nende $x + 1$ riigi valitsusest igaühest 1 liige, nii et vähemalt y valitut oleks naised, jagunevad kaheks: võimalused, milles „erilise“ riigi valitsusest võetakse naine, ja võimalused, milles „erilise“ riigi valitsusest võetakse mees.

Esimesel juhul võetakse x „tavalise" riigi valitsusest vähemalt $y-1$ naist, teisel juhul vähemalt y naist. Seega $f(x+1,y) = b\cdot f(x,y-1)+a\cdot f(x,y)$. Et induktsiooni eelduse kohaselt $f(x,y)$ jagub b-ga, siis jagub b-ga ka summa, millega võrdub $f(x+1,y)$. Väide on tõestatud.

2. *Lahendus 1.* Et positiivsete arvude a, b, c summa on 1, on kõik need arvud rangelt 0 ja 1 vahel. Seega $b^3 < b$ ja $c^4 < c$, millest tulenevalt

$$b^3 + c^4 + 1 < b + c + 1 = 1 - a + 1 = 2 - a,$$

kust omakorda

$$\frac{a^2}{b^3 + c^4 + 1} > \frac{a^2}{2-a} = -2 - a + \frac{4}{2-a}.$$

Analoogselt $\dfrac{b^2}{c^3 + a^4 + 1} > -2 - b + \dfrac{4}{2-b}$ ja $\dfrac{c^2}{a^3 + b^4 + 1} > -2 - c + \dfrac{4}{2-c}$. Liites need kolm võrratust, saame

$$\begin{aligned}
&\frac{a^2}{b^3 + c^4 + 1} + \frac{b^2}{c^3 + a^4 + 1} + \frac{c^2}{a^3 + b^4 + 1} > \\
&\quad > \quad -6 - (a+b+c) + \left(\frac{4}{2-a} + \frac{4}{2-b} + \frac{4}{2-c}\right) = \\
&\quad = \quad -7 + 4\cdot\left(\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c}\right).
\end{aligned}$$

Et arvud a, b, c on väiksemad 2-st, on arvud $2-a$, $2-b$ ja $2-c$ positiivsed. Nende aritmeetilise ja harmoonilise keskmise vahelisest võrratusest saame

$$\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \geqslant 3\cdot\frac{3}{(2-a)+(2-b)+(2-c)} = \frac{9}{6-(a+b+c)} = \frac{9}{5}.$$

Kokkuvõttes

$$\begin{aligned}
&\frac{a^2}{b^3 + c^4 + 1} + \frac{b^2}{c^3 + a^4 + 1} + \frac{c^2}{a^3 + b^4 + 1} > \\
&\quad > \quad -7 + 4\cdot\left(\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c}\right) \geqslant \\
&\quad \geqslant \quad -7 + 4\cdot\frac{9}{5} = \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

Lahendus 2. Rakendades Cauchy-Schwarzi võrratust järjenditele (x,y,z) ja $\left(\frac{a}{x}, \frac{b}{y}, \frac{c}{z}\right)$, kus $x = \sqrt{b^3 + c^4 + 1}$, $y = \sqrt{c^3 + a^4 + 1}$ ja $z = \sqrt{a^3 + b^4 + 1}$, saame

$$(x^2 + y^2 + z^2)\cdot\left(\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2}\right) \geqslant (a+b+c)^2 = 1.$$

Et positiivsete arvude a, b, c summa on 1, on kõik need arvud 0 ja 1 vahel. Seega

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= (b^3+c^4+1)+(c^3+a^4+1)+(a^3+b^4+1) = \\ &= 3+(a^3+b^3+c^3)+(a^4+b^4+c^4) < \\ &< 3+(a+b+c)+(a+b+c) = \\ &= 5. \end{aligned}$$

Kokkuvõttes

$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}+\frac{c^2}{z^2} > \frac{1}{5},$$

mott.

Lahendus 3. Kui $c \geqslant \frac{1}{2}$, siis eelduse $a+b+c=1$ tõttu kuuluvad a ja b poollõigule $(0; \frac{1}{2}]$. Seega $1+a^3+b^4 \leqslant 1+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{19}{16} < \frac{5}{4}$ ning

$$\frac{a^2}{b^3+c^4+1}+\frac{b^2}{c^3+a^4+1}+\frac{c^2}{a^3+b^4+1} > \frac{c^2}{a^3+b^4+1} > \frac{4}{5}c^2 \geqslant \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{5}.$$

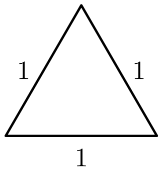
Analoogiliselt näitame vajaliku võrratuse juhtudel $a \geqslant \frac{1}{2}$ ja $b \geqslant \frac{1}{2}$. Kui aga kõik arvud a, b, c on väiksemad kui $\frac{1}{2}$, siis analoogselt eelnevaga on iga murru nimetaja väiksem kui $\frac{19}{16}$. Kasutades aritmeetilise ja ruutkeskmise vahelist võrratust, saame

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b^3+c^4+1}+\frac{b^2}{c^3+a^4+1}+\frac{c^2}{a^3+b^4+1} &> \frac{16}{19}\cdot(a^2+b^2+c^2) \geqslant \\ &\geqslant \frac{16}{19}\cdot\frac{(a+b+c)^2}{3} = \\ &= \frac{16}{19\cdot 3} > \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

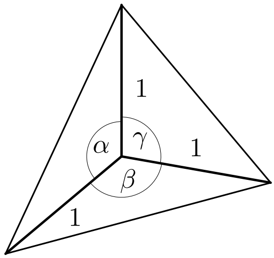
3. *Vastus:* $\frac{3}{4}\sqrt{3}$.

Ilmselt on kujundi kumera katte kõik tipud antud lõikude otspunktid. Et kujund on sidus, paiknevad lõikude otspunktid kokku ülimalt 4 erinevas tasandi punktis ja kumer kate on kas nelinurk või kolmnurk.

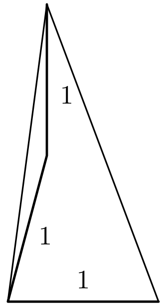
Kui lõikude otspunktid paikneksid vaid 3 erinevas tasandi punktis, peaks kumer kate olema kolmnurk küljepikkusega 1, mille pindala ei ole maksimaalne (joonis 1). Seetõttu eeldame, et lõikude otspunktid paiknevad täpselt 4 erinevas tasandi punktis. Vaatame algul juhtusid, kus kumer kate on sellegipoolest kolmnurk; siis mingi lõigu otspunkt asub selle kolmnurga sees.



Joonis 1



Joonis 2



Joonis 3

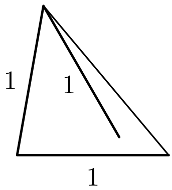
- Kui kõik kolm lõiku kohtuvad punktis kumera katte sees, siis kumer kate koosneb kolmest kolmnurgast, millest igaühel on kaks külge pikkusega 1 (joonis 2). Olgu nende ühiklõikude vaheliste nurkade suurused α, β, γ. Et α, β, γ on kõik väiksemad kui 180°, siis Jenseni võrratuse põhjal

$$S = \frac{1}{2}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) \leqslant \frac{3}{2}\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \frac{3}{2}\sin 120^\circ = \frac{3}{4}\sqrt{3}$$

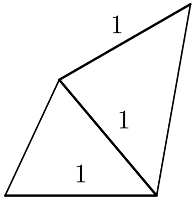
  Väärtus $\frac{3}{4}\sqrt{3}$ saavutatakse, kui ühiklõigud moodustavad paarikaupa nurgad suurusega 120°.
- Kui täpselt kaks lõiku kohtuvad kumera katte sees, siis kumer kate on kolmnurk, mille üks külg on pikkusega 1 ja veel ühe külje pikkus on väiksem kui 2 kolmnurga võrratuse põhjal (joonis 3). Seega $S < \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 < \frac{3}{4}\sqrt{3}$.
- Juhul, kui täpselt üks ühiklõik lõpeb kumera katte sees, siis kumer kate on kolmnurk, mille kaks külge on pikkusega 1 (joonis 4). Järelikult $S \leqslant \frac{1}{2} < \frac{3}{4}\sqrt{3}$.

Järgnevalt vaatame juhtusid, kus kumer kate on nelinurk. Sel juhul on kõigi ühiklõikude otspunktid kumera katte tippudeks.

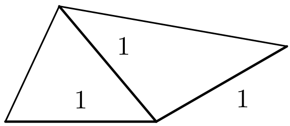
- Kui üks ühiklõik langeb kokku nelinurga diagonaaliga, siis teised kaks ühiklõiku langevad kokku nelinurga külgedega (joonised 5 ja 6). Seega koosneb kumer kate kahest kolmnurgast, millest kummalgi on kaks külge pikkusega 1. Siit $S \leqslant 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 < \frac{3}{4}\sqrt{3}$.
- Kui ükski ühiklõik ei lange kokku nelinurga diagonaaliga, siis kolm ühiklõiku on nelinurga kolm külge. Olgu see murdjoon $ABCD$. Vaatame kaht alajuhtu.



Joonis 4



Joonis 5



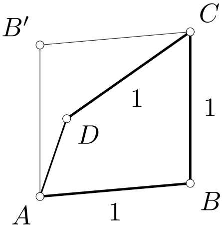
Joonis 6

- Kui $\angle ABC + \angle BCD \leqslant 180^\circ$ (joonis 7), siis oletades üldisust kitsendamata, et $\angle ABC \geqslant \angle BCD$, asub punkt D kas rombi $ABCB'$ sees või rajajoonel. Et rombi küljepikkus on 1, siis $S \leqslant 1 < \frac{3}{4}\sqrt{3}$.
- Kui $\angle ABC + \angle BCD > 180^\circ$, siis kiired AB ja DC lõikuvad mingis punktis E (joonis 8). Olgu $\beta = \angle EBC$, $\gamma = \angle BCE$ ja $\alpha = \angle CEB$. Siinusteoreemist kolmnurgas EBC saame võrdused $|EB| = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$ ja $|EC| = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$, kust

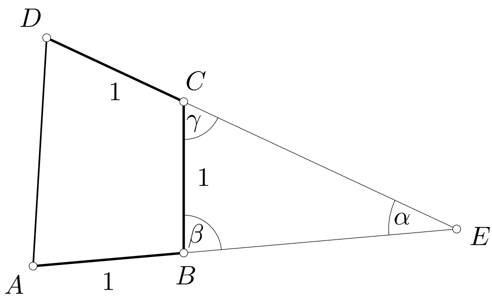
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\left(|EA| \cdot |ED| - |EB| \cdot |EC|\right)\sin\alpha = \\ &= \frac{1}{2}\left(|EB| + |EC| + 1\right)\sin\alpha = \\ &= \frac{1}{2}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma). \end{aligned}$$

  Seega Jenseni võrratuse põhjal

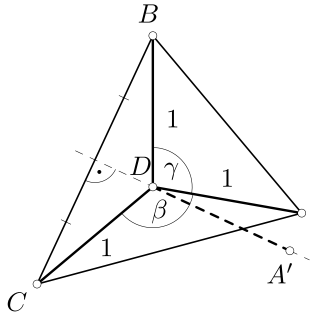
$$S \leqslant \frac{3}{2}\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \frac{3}{2}\sin 60^\circ = \frac{3}{4}\sqrt{3}.$$



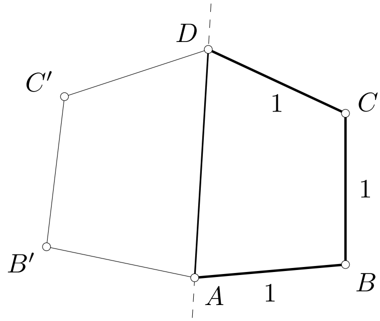
Joonis 7



Joonis 8



Joonis 9



Joonis 10

Seega on kumera katte maksimaalne pindala $\frac{3}{4}\sqrt{3}$.

Märkus. Saab hakkama ka ilma Jenseni võrratuseta.

- Vaatame juhtu, mis vastab joonisele 2. Olgu kolme ühiklõigu ühine otspunkt D ja teised otspunktid vastavalt A, B ja C nii, et $\angle BDC = \alpha$, $\angle CDA = \beta$ ja $\angle ADB = \gamma$. Oletame, et nurgad α, β ja γ pole võrdsed; üldisust kitsendamata $\beta \neq \gamma$. Võtame punkti A' lõigu BC keskristsirgel punktiga A samal pool sirget BC nii, et $|DA'| = 1$ (joonis 9). Et ka punkt D asub lõigu BC keskristsirgel, siis $\angle CDA' = \angle A'DB$ ning punkt A' asub sirgest BC kaugemal kui A. Järelikult lõigu DA vahetamisel lõiguga DA' kumera katte pindala suureneb. Seega on pindala suurim, kui $\alpha = \beta = \gamma$. See pindala on $S = 3 \cdot \frac{1}{2} \sin 120^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.
- Vaatame juhtu, mis vastab joonisele 8. Olgu B' ja C' vastavalt punktide B ja C peegeldused sirgest AD (joonis 10). Nelinurga $ABCD$ pindala on pool kuusnurga $ABCDC'B'$ pindalast. Märkame, et kuusnurga $ABCDC'B'$ kõik küljed on pikkusega 1 ja ümbermõõt seega alati 6. Sama ümbermõõduga hulknurga pindala on suurim, kui hulknurk on korrapärane. Seega nelinurga $ABCD$ pindala on suurim, kui kuusnurk $ABCDC'B'$ on korrapärane. See pindala on $S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Lahendused

4. *Lahendus 1.* Kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt H asub kolmnurga CDE ümberringjoonel, sest $\angle HDC + \angle HEC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ (joonis 11). Olgu $\alpha = \angle BAC$; siis ka $\angle CHE = 90^\circ - \angle ECH = \alpha$. Järelikult

$$\angle MPE = 180^\circ - \angle CPE = 180^\circ - \angle CHE = 180^\circ - \alpha,$$

millest tulenevalt on punktid A, M, P, E ühel ringjoonel. Analoogselt näeme, et punktid B, M, P, D on ühel ringjoonel.

Kuna M on lõigu AB keskpunkt, asub seal täisnurkse kolmnurga ABE ümberringjoone keskpunkt. Järelikult $|ME| = |MA|$ ja $\angle MEA = \alpha$, mistõttu ka $\angle MPA = \alpha$. Et samas $\angle MQB = \angle CQB = \angle CAB = \alpha$, siis põiknurkadest $AP \parallel BQ$. Analoogselt ka $BP \parallel AQ$.

Kokkuvõttes saame, et $APBQ$ on rööpkülik diagonaalidega AB ja PQ. Et rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist, siis $|MP| = |MQ|$.

Lahendus 2. Nagu eelmises lahenduses näitame, et punktid A, M, P, E asuvad ühel ringjoonel. Tähistagu $\vec{u} \cdot \vec{v}$ vektorite $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ skalaarkorrutist. Siis

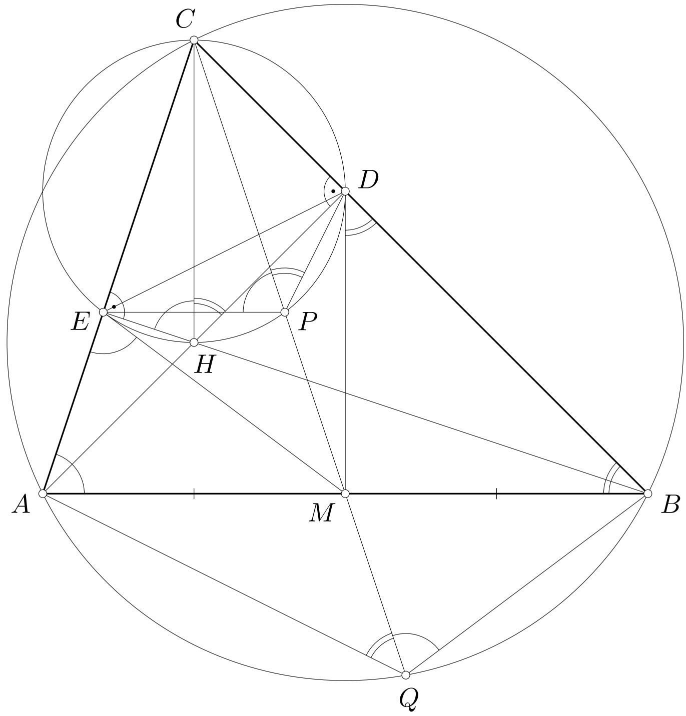
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EC} = \\
&= \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{PC} = \\
&= \overrightarrow{MC} \cdot \left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MP}\right) = \\
&= \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MP}.
\end{aligned}$$

Teiselt poolt,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} &= \left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}\right) = \\
&= \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \\
&= \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MC} \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}.
\end{aligned}$$

Kokkuvõttes $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MC} \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) - \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$. Kuna aga M on külje AB keskpunkt, siis $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$, punkti Q valiku tõttu aga $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MQ}$. Seega $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MP} = -\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MQ}$ ehk

$$\overrightarrow{MC} \cdot \left(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}\right) = 0.$$



Joonis 11

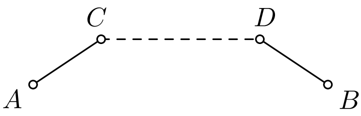
Et $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MQ}$ ja $\overrightarrow{MC}$ on samasihilised, siis on see võimalik vaid juhul, kui $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = \vec{0}$. Seega $|MP| = |MQ|$.

Märkus. Lahendusega 2 sarnane mõttekäik näitab, et punkti M selliseks valikuks küljel AB, et antud konstruktsiooni puhul kehtiks $|MP| = |MQ|$, on täpselt kaks võimalust: CM peab olema kas kolmnurga ABC mediaan või kõrgus. Tõepoolest, tõestus, et A, M, P, E asuvad ühel ringjoonel, ei kasuta eeldust, et M on külje AB keskpunkt, niisiis peavad järgnevad tuletused vektoritega enne võrduse $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ rakendamist paika suvalise M korral küljel AB. Jättes $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ nullvektoriga asendamata, saame lõpuks $\overrightarrow{MC} \cdot \left(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}\right) = 0$ asemel

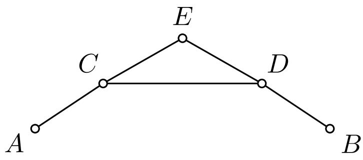
$$\overrightarrow{MC} \cdot \left((\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) - (\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ})\right) = 0.$$

Siit $\overrightarrow{MC} \perp (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) - (\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ})$. Nüüd

$$|MP| = |MQ| \iff \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = \vec{0} \iff \overrightarrow{MC} \perp \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}.$$



Joonis 12



Joonis 13

Et $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ on külje AB sihiline, saab niisugune vektorite ortogonaalseis kehtida, kui $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ või kui MC ja AB on risti. Esimesel juhul on CM kolmnurga ABC mediaan, teisel juhul kõrgus.

5. *Lahendus 1.* Olgu A ja B suvalised kaks linna. Teame, et linnast A peab saama liikuda mingisse teise linna X ning linnast B mingisse teise linna Y. Neljast linnast A, B, X, Y saab moodustada kolm paari, mille vahel on otsetee. Neist vähemalt üks tee läheb linnast A või X linna B või Y. Seega on linnast A linna B võimalik reisida.

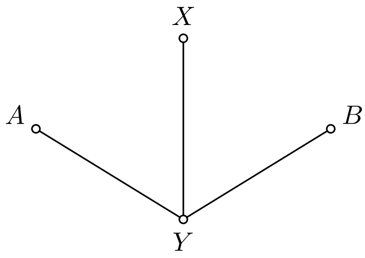
Vaatame mingit võimalikku marsruuti jõudmaks linnast A linna B; olgu C esimene linn sel teekonnal pärast linna A ning D viimane linn enne linna B (joonis 12). Eeldame, et A, C, D, B on kõik erinevad, sest vastasel korral järeldub ülesande väide triviaalselt. Samal põhjusel eeldame, et ei leidu otseteed A ja B vahel, A ja D vahel ega C ja B vahel. Et vastavalt ülesande tingimustele saab neist neljast linnast moodustada kolm paari, mille vahel leidub mingit liiki otsetee, siis peab otsetee leiduma C ja D vahel.

Olgu E mingi linn, mis pole A, B, C ega D. Kui nii E ja A kui ka E ja B vahel leidub tee, siis ülesande väide kehtib. Seetõttu eeldame järgnevas, et kas E ja A vahel või E ja B vahel teed pole. Linnadest A, C, E, B saab moodustada kolm paari, mille vahel leidub tee. Et linnade E, A ja B vahel leidub ülimalt üks tee ning ka B ja C vahel tee puudub, peab tee leiduma E ja C vahel. Vahetades A ja B rollid ning C ja D rollid näeme analoogselt, et ka E ja D vahel leidub tee (joonis 13).

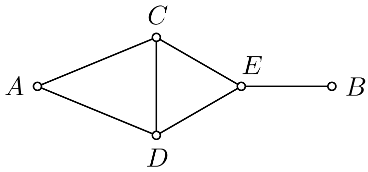
Kui teed A ja C vahel ning D ja B vahel on eri liiki, siis teekonnal $A \to C \to$ $\to D \to B$ leidub kaks järjestikust sama transpordiliigiga etappi. Selle teekonna jaoks ülesande väide kehtib. Kui aga teed A ja C vahel ning D ja B vahel on sama liiki, siis leidub kaks järjestikust sama transpordiliigiga etappi teekonnal $A \to C \to E \to D \to B$. Ka selle teekonna jaoks väide kehtib.

Lahendus 2. Olgu A ja B suvalised kaks linna. Eeldame, et nende vahel pole otseteed, kuna vastasel korral ülesande väide kehtib triviaalselt.

Olgu X suvaline linn, mis pole A ega B. Kui linnade A ja X ega ka linnade B ja X vahel pole teed, siis suvalisest neljandast linnast Y peab minema otsetee linnadesse A, B ja X (joonis 14). Sel puhul saab linnast A linna B ühe ümberistumisega linnas Y ja ülesande väide kehtib. Seetõttu eeldame



Joonis 14



Joonis 15

järgnevas, et suvalisest linnast X, mis pole A ega B, läheb otsetee linna A või B.

Olgu X ja Y suvalised erinevad linnad, mis pole A ega B. Oletame, et X ja Y vahel pole otseteed. Et ka A ja B vahel teed pole, kuid linnadest A, B, X, Y saab moodustada kolm paari, mille vahel on otsetee, siis linnast A saab linna B ühe ümberistumisega kas linnas X või Y, mispuhul ülesande väide kehtib. Seega on vaadelda jäänud vaid juht, kus suvalise kahe linna vahel, millest kumbki pole A ega B, leidub otsetee.

Et riigis on vähemalt 5 linna, leidub A-st ja B-st erinevaid linnu vähemalt 3. Seega kas linnal A või linnal B on otseühendus vähemalt kahe teise linnaga. Üldisust kitsendamata eeldame, et linnal A on otseühendus linnadega C ja D. Ent ka linnal B on otseühendus mingi linnaga E; kui E langeb kokku mõnega eelnevatest linnadest, siis ülesande väide kehtib, mistõttu vaatleme olukorda, kus E on uus linn. Eelneva põhjal on linnad C, D ja E omavahel kõik otseühenduses (joonis 15).

Kui nüüd kas A ja C või A ja D vahel on tee erinevat liiki sellest, mis on B ja E vahel, on vastavalt kas teekonnal $A \to C \to E \to B$ või $A \to D \to E \to B$ kaks järjestikust sama transpordiliigiga etappi. Selle teekonna jaoks ülesande väide kehtib. Kui aga tee A ja C vahel või A ja D vahel on sama liiki mis B ja E vahel, siis vastavalt kas teekonnal $A \to C \to D \to E \to B$ või $A \to D \to C \to E \to B$ on kaks järjestikust sama transpordiliigiga etappi. Ka selle teekonna jaoks väide kehtib.

6. *Vastus:* 1 ja 3.

Paneme tähele, et $n = 1$ korral on lahendiks $x = y = z = 3$ ja $n = 3$ korral on lahendiks $x = y = z = 1$.

Kui $n = 2k$, siis võrrandi parem pool jagub 2-ga. Vasak pool aga jagub 2-ga ainult siis, kui vähemalt üks arvudest x, y, z on paaris, kuid siis jagub võrrandi parem pool ka 4-ga. Kuna täisarvude ruudud annavad 4-ga jagamisel jäägiks ainult 0 ja 1, saab vasak pool jaguda 4-ga ainult juhul, kui x, y, z on kõik paarisarvud. Olgu $x = 2a$, $y = 2b$, $z = 2c$; siis asendades võrrandisse saame 4-ga taandamise järel $a^2 + b^2 + c^2 = 4kabc$. Seega kolmik

(a, b, c) rahuldab algsega sarnast võrrandit, kus parameetri n rollis on $2n$, mistõttu peavad a, b ja c samuti jaguma 2-ga. Seda protsessi jätkates saame, et algsed arvud x, y, z peavad jaguma kuitahes suure kahe astmega, mis pole võimalik. Järelikult paaris n korral lahendeid ei leidu.

Oletame, et mingi paaritu $n > 3$ korral leidub võrrandil täisarvuline lahend (x, y, z). Antud võrrand on samaväärne ruutvõrrandiga

$$z^2 - nxy \cdot z + (x^2 + y^2) = 0;$$

olgu z' selle ruutvõrrandi teine lahend. Viete'i valemi põhjal $z + z' = nxy$ ehk $z' = nxy - z$. Ilmselt $z' > 0$, sest arvude z^2, nxy ja $x^2 + y^2$ positiivsuse tõttu saab ruutvõrrandil olla vaid positiivseid lahendeid. Teisalt võime üldisust kitsendamata eeldada, et $z = \max(x, y, z)$; siis $x^2 \leqslant xz \leqslant xyz$ ja $y^2 \leqslant yz \leqslant xyz$, mistõttu $z^2 \geqslant (n-2)xyz$ ehk $z \geqslant (n-2)xy$. Siit $z' \leqslant 2xy < (n-2)xy \leqslant z$, millest järeldub, et $x + y + z' < x + y + z$. Seega saame lahendikolmiku komponentide summat lõpmatuseni vähendada, mis pole võimalik.

Märkus. Kasutades lahendite tekitamiseks sammu $(x, y, z) \to (y, z, nyz - x)$, on lihtne näidata, et $n = 1$ ja $n = 3$ korral leidub antud võrrandil lõpmata palju lahendeid.

Hindamisskeemid

1. *(Ago-Erik Riet)* Järgnevalt näidatud osade eest antud punktid summeeriti.
   - Õige näide ühe riigi korral: 1 p
   - Tõestus, et rohkem riike pole võimalik: 6 p

     Sealhulgas tüüpiliste lahenduste eest:
     - Mõni väike puudujääk või näpukas: *5 p*
     - Põhjendus, et kui $n \geqslant 1$, siis b jagab komisjonide arvu, puudulik: *kuni 4 p*
     - Komisjonide arvu valemis mõni väike viga, näiteks kirjutatud $\sum_{k=n}^{r} \binom{r}{k} b^k (a+b)^{r-k}$: *kuni 4 p*
     - Tõestatud ainult väikese n või väikese riikide arvu korral: *kuni 3 p*
     - Juht $n = 0$ või $n \geqslant 1$ tegemata: *kuni 3 p*

2. *(Oleg Košik)* Esitame kaks hindamisskeemi vastavalt žürii lahendustele 1 ja 3. Mõlemal juhul ühe skeemi piires märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

   Skeem žürii lahendusele 1.
   - Ülesanne taandatud võrratusele $\frac{a^2}{2-a} + \frac{b^2}{2-b} + \frac{c^2}{2-c} \geqslant \frac{1}{5}$: 2 p
   - Taandatud edasi võrratusele $\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \geqslant \frac{9}{5}$: 2 p
   - Selle võrratuse tõestus: 3 p

   Skeem žürii lahendusele 3.
   - Võrratus tõestatud juhul, kus üks arvudest on vähemalt $\frac{1}{2}$: 3 p
   - Juhul, kui ükski arv ei ületa $\frac{1}{2}$, taandatud ülesanne võrratusele $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \frac{1}{3}$: 1 p
   - Selle võrratuse tõestus: 3 p

3. *(Reimo Palm)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.
   - Täielikult läbi analüüsitud juhud, kus kõik kolm lõiku ei välju ühest punktist (žürii lahenduses joonised 1, 3, 4, 5, 7, 8): 4 p

- Täielikult läbi analüüsitud juhud, kus kõik kolm lõiku väljuvad ühest punktist (žürii lahenduses joonised 2, 6): 3 p

Punkte kaotati peamiselt seetõttu, et osa võimalikke variante oli jäetud läbi vaatamata või ei olnud esitatud piisavat põhjendust, miks pakutavad parameetrite väärtused annavad tõepoolest maksimaalse pindala.

Hindamisskeemid

4. *(Härmel Nestra)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et A, M, P, E asuvad ühel ringjoonel, või et B, M, P, D asuvad ühel ringjoonel: 3 p

  Sealhulgas:

  - Näidatud, et kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt paikneb kolmnurga CDE ümberringjoonel: *1 p*
- Näidatud, et $APBQ$ on rööpkülik, või et $\triangle APM \sim \triangle BQM$: 3 p
- Eelnevast järeldatud võrdus $|MP| = |MQ|$: 1 p

5. *(Erik Paemurru)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Täislahendus: 7 p

Iga puuduliku või pooliku mõttekäigu juurest, mis oli lahenduse osa, võeti 1 punkt maha.

6. *(Urve Kangro)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et $n = 1$ ja $n = 3$ sobivad : 1 p
- Näidatud, et paaris n ei sobi: 2 p
- Näidatud, et paaritu $n > 3$ ei sobi: 4 p

Osalisi punkte võis veel saada juhu $n = 2$ vaatlemise eest (kui see oleks lihtsalt üldistatav paaris n juhule) ning näitamise eest, et kas kõik arvud x, y, z on paarikaupa ühitegurita või on kõigil neil ühine tegur (ka sellest on võimalik lihtsalt järeldada, et paaris n ei sobi).