# Valikvõistlus 2013

# IMO'13 Eesti võistkonna valikvõistlus

1.–2. mai 2013 **Esimene päev**

*Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.*
*Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.*
*Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.*
*Taskuarvutit kasutada ei lubata.*

**1.** Leia kõik sellised algarvud $p$, mille korral leiduvad positiivne täisarv $m$ ja mittenegatiivsed arvust $p$ väiksemad täisarvud $a_0, a_1, \ldots, a_m$ nii, et

$$\begin{cases} a_0 + a_1 p + \ldots + a_{m-1} p^{m-1} + a_m p^m = 2013, \\ a_0 + a_1 + \ldots + a_{m-1} + a_m = 11. \end{cases}$$

**2.** Milliste täisarvude $n \geqslant 3$ korral on võimalik märkida tasandil $n$ punkti selliselt, et alustades ühest märgitud punktist ja liikudes igal sammul lähedu-selt teise märgitud punkti, saab läbi käia kõik märgitud punktid ja jõuda tagasi lähtepunkti? Iga märgitud punkti jaoks peab temale läheduselt teine märgitud punkt olema üheselt määratud.

**3.** Olgu $x_1, \ldots, x_n$ mittenegatiivsed reaalarvud, mis pole kõik nullid.

a) Tõesta, et

$$1 \leqslant \frac{\left(x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \ldots + \frac{x_n}{n}\right) \cdot (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n)}{(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)^2} \leqslant \frac{(n+1)^2}{4n}.$$

b) Näita, et iga $n \geqslant 1$ korral saab kummaski võrratuses kehtida võrdus.

# IMO'13 Eesti võistkonna valikvõistlus

1.–2. mai 2013 **Teine päev**

*Lahendamisaega on kummalgi päeval 4 tundi 30 minutit.*
*Selgitusi ülesannete tekstide kohta antakse esimese 30 minuti jooksul.*
*Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.*
*Taskuarvutit kasutada ei lubata.*

**4.** Täisnurkse kolmnurga $ABC$ hüpotenuusi $AB$ punkt $D$ erineb punktist $B$ ning rahuldab tingimust $|CB| = |CD|$. Olgu $O$ kolmnurga $ACD$ ümberringjoone keskpunkt. Kiired $OD$ ja $CB$ lõikuvad punktis $P$, punktist $O$ küljele $AB$ tõmmatud ristsirge ja kiir $CD$ lõikuvad punktis $Q$. Punktid $A$, $C$, $P$, $Q$ asuvad ühel ringjoonel. Kas võib kindlalt väita, et $ACPQ$ on ruut?

**5.** Nimetame arvujärjendit $(b_m, b_{m+1}, \ldots, b_n)$ *täiuslikuks,* kui kehtivad järgmised tingimused.

1) Leidub selline täisarv $a > 1$, et iga indeksi $k = m$, $m + 1$, $\ldots$, $n$ korral $b_k = a^k + 1$.
2) Iga $k = m, m + 1, \ldots, n$ jaoks leiduvad algarv $q$ ja mittenegatiivne täisarv $t$, mille korral $b_k = q^t$.

Tõesta, et küllalt suure vahe $n - m$ korral täiuslikke järjendeid ei eksisteeri, ning leia kõik maksimaalse liikmete arvuga täiuslikud järjendid.

**6.** Klassis on 7 poissi ja 13 tüdrukut. Õppeaasta esimese kolme kuu jooksul on kõik poisid kõikide tüdrukutega vähemalt korra suhelnud. Tõesta, et leidub kaks poissi ja kaks tüdrukut nii, et mõlemad poisid suhtlesid kummagi tüdrukuga esimest korda samal kuul.

# Отборочный конкурс на ММО'13

1–2 мая 2013 г. **Первый день**

*Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.*
*Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.*
*Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.*
*Пользоваться калькулятором не разрешается.*

**1.** Найти все простые числа $p$, при которых существуют положительное целое число $m$ и неотрицательные целые числа $a_0, a_1, \ldots, a_m$ такие, что каждое из чисел $a_0, a_1, \ldots, a_m$ меньше числа $p$, и

$$\begin{cases} a_0 + a_1 p + \ldots + a_{m-1} p^{m-1} + a_m p^m = 2013, \\ a_0 + a_1 + \ldots + a_{m-1} + a_m = 11. \end{cases}$$

**2.** При каких целых числах $n \geqslant 3$ возможно отметить на плоскости $n$ точек таким образом, что, начав из одной отмеченной точки и на каждом шагу передвигаясь во вторую по близости отмеченную точку, можно пройти по всем отмеченным точкам и вернуться обратно в изначальную точку? Для каждой отмеченной точки вторая по близости точка должна быть определена однозначно.

**3.** Даны неотрицательные действительные числа $x_1, \ldots, x_n$, из которых по крайней мере одно не равно нулю.

а) Доказать, что

$$1 \leqslant \frac{\left(x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \ldots + \frac{x_n}{n}\right) \cdot (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n)}{(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)^2} \leqslant \frac{(n+1)^2}{4n}.$$

б) Показать, что при каждом $n \geqslant 1$ в обоих неравенствах может наблюдаться равенство.

# Отборочный конкурс на ММО'13

1–2 мая 2013 г. **Второй день**

*Время для решения в каждый день 4 часа 30 минут.*
*Пояснения по текстам задач даются в течение первых 30 минут.*
*Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.*
*Пользоваться калькулятором не разрешается.*

**4.** Для точки $D$, лежащей на гипотенузе $AB$ прямоугольного треугольника $ABC$ и отличной от точки $B$, выполняется условие $|CB| = |CD|$. Пусть $O$ – центр описанной окружности треугольника $ACD$. Лучи $OD$ и $CB$ пересекаются в точке $P$. Перпендикуляр, опущенный из точки $O$ на сторону $AB$, и луч $CD$ пересекаются в точке $Q$. Точки $A$, $C$, $P$, $Q$ находятся на одной окружности. Можно ли утверждать, что $ACPQ$ квадрат?

**5.** Назовём кортеж (конечную последовательность) чисел $(b_m, b_{m+1}, \ldots, b_n)$ *полноценным*, если выполняются следующие условия.

1) Существует такое целое число $a > 1$, что для каждого индекса $k = m$, $m + 1, \ldots, n$ верно равенство $b_k = a^k + 1$.
2) Для каждого $k = m, m + 1, \ldots, n$ существуют простое число $q$ и неотрицательное целое число $t$ такие, что $b_k = q^t$.

Доказать, что при достаточно большом значении разности $n - m$ полноценных кортежей не существует, и найти все полноценные кортежи с максимальным количеством элементов.

**6.** В классе 7 мальчиков и 13 девочек. В течение первых трёх месяцев учебного года каждый мальчик успел по крайней мере один раз поговорить с каждой девочкой. Доказать, что существуют два мальчика и две девочки такие, что оба мальчика первый раз заговорили с обеими девочками в одном и том же месяце.

## Lahendused

**1.** *Vastus:* 2003.

Lahutades esimesest võrdusest teise, saame võrduse

$$a_1(p-1)+\ldots+a_m\left(p^m-1\right)=2002.$$

Kuna $p^k-1=(p-1)\left(p^{k-1}+p^{k-2}+\ldots+1\right)$ jagub $(p-1)$-ga iga naturaalarvu $k$ korral, siis saadud võrduse vasak pool jagub arvuga $p-1$, seega peab 2002 jaguma arvuga $p-1$. Et $2002=2\cdot7\cdot11\cdot13$, siis $p-1$ võimalikud väärtused on 1, 2, 7, 11, 13, 14, 22, 26, 77, 91, 143, 154, 182, 286, 1001 ja 2002. Kuna $p$ peab olema algarv, on $p$ võimalikud väärtused 2, 3, 23 ja 2003. Võrrandisüsteemi esimene võrdus on arvu 2013 esitus arvusüsteemis alusel $p$, seega esimese võrdusega on arvude $a_i$ väärtused üheselt määratud.

Vaatame kõik võimalused läbi.

1) $p=2$. Siis $a_i$-de võimalikud väärtused on 0 ja 1 ning $m=10$, kuna $2^{10}<2013<2^{11}$. Nüüd teisest võrdusest järeldub, et kõik $a_i$-d peavad olema ühed, aga $1+2+2^2+\ldots+2^{10}=2^{11}-1=2047$, seega sobivaid $a_i$-sid ei leidu.

2) $p=3$. Kuna $2013=2\cdot3+3^2+2\cdot3^3+2\cdot3^5+2\cdot3^6$, aga $2+1+2+2+2=9\neq11$, siis ka see juht ei sobi.

3) $p=23$. Et $2013=12+18\cdot23+3\cdot23^2$, aga $12+18+3>11$, siis ka see juht ei sobi.

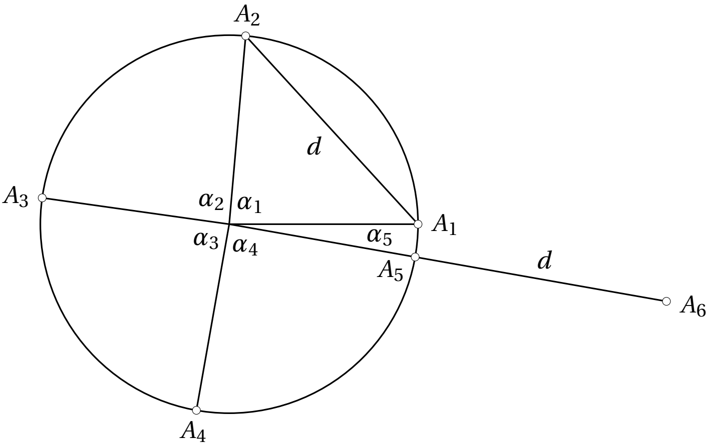
4) $p=2003$. Et $2013=10+2003$ ja $10+1=11$, siis see juht sobib.

Seega ainus sobiv $p$ on 2003.

**2.** *Vastus:* $n\geqslant4$.

Leiame suvalise $n\geqslant4$ jaoks sobiva konstruktsiooni. Valime positiivse nurga $\varepsilon<\dfrac{360^\circ}{n^3}$. Paigutame punktid $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ ringjoonele (joonisel 1 on $n=6$) sellisel viisil, et punktidest $A_i$ ja $A_{i+1}$ ringjoone keskpunktini tõmmatud raadiuste vaheline nurk on

$$\alpha_i=\frac{360^\circ}{n-2}-(n-2-i)\varepsilon,$$




Joonis 1

$i = 1, \ldots, n-2$. Sel juhul on punktidest $A_{n-1}$ ja $A_1$ ringjoone keskpunktini tõmmatud raadiuste vaheline nurk $\alpha_{n-1} = \dfrac{(n-2)(n-3)}{2}\varepsilon < \alpha_1$. Punkti $A_n$ paigutame ringjoonest väljapoole punkti $A_{n-1}$ sisaldava raadiuse pikendusele, punktist $A_{n-1}$ sama kaugele kui $A_1$ ja $A_2$ vaheline kaugus (joonisel 1 on see kaugus tähistatud $d$-ga).

Punktid $A_1, \ldots, A_n$ rahuldavad ülesande tingimusi. Tõepoolest, kuivõrd $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{n-2} \leqslant 180^\circ$ ning $A_1$-le lähim punkt on $A_{n-1}$ ja läheduselt teine on $A_2$, siis liikumisel $A_1 \to A_2 \to A_3 \to \ldots \to A_{n-1}$ on iga järgmise punkti valik üheselt määratud. Punktile $A_{n-1}$ lähim punkt on $A_1$, läheduselt teine on aga $A_n$, sest $\alpha_1 < \alpha_{n-2} \leqslant 180^\circ$. Punktile $A_n$ on muidugi lähim punkt $A_{n-1}$ ja läheduselt teine on $A_1$.

Teiselt poolt, oletame, et leidub sobiv konstruktsioon juhul $n = 3$. Olgu vaadeldav tsükkel $A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_1$. Siis $\varrho(A_1, A_2) > \varrho(A_1, A_3)$, $\varrho(A_2, A_3) > \varrho(A_2, A_1)$ ning $\varrho(A_3, A_1) > \varrho(A_3, A_2)$, kus $\varrho(X, Y)$ tähistab punktide $X$ ja $Y$ vahelist kaugust. Ent need kolm võrratust korraga kehtida ei saa.

**3.** Aritmeetilise-geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} kx_k\right) &= \frac{1}{n}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{nx_k}{k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} kx_k\right) \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{nx_k}{k} + \sum_{k=1}^{n} kx_k\right)^2 =\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\left(\frac{n}{k}+k\right)\right)^2 \leqslant \\
&\leqslant \frac{(n+1)^2}{4n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 .
\end{aligned}
$$

Ahela viimase võrratuse põhjendab asjaolu, et $\frac{n}{k}+k \leqslant n+1$, mis omakorda kehtib, sest on samaväärne võrratusega $(n-k)(k-1) \geqslant 0$. See annab meile vajaliku ülemise hinnangu; see väärtus saavutatakse näiteks siis, kui $x_1 = x_n = 1$ ja $x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0$.

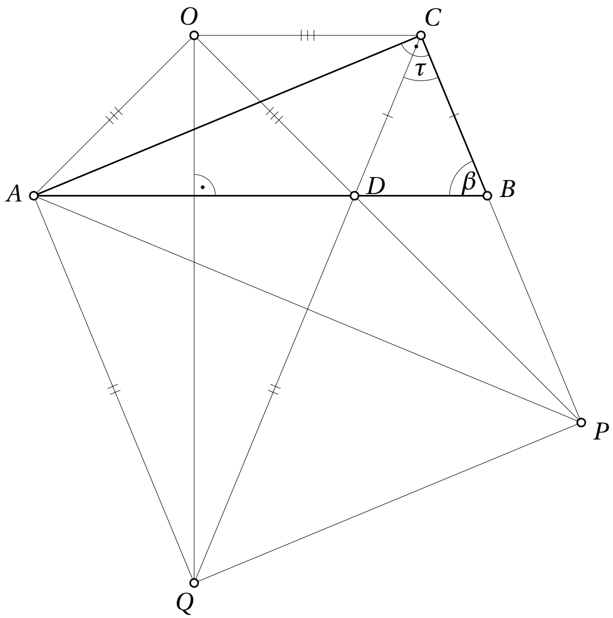
Vähima väärtuse leidmiseks hindame murru lugejat Cauchy-Schwarzi võrratuse abil. Saame, et

$$
\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} kx_k\right) \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{x_k}{k}} \cdot \sqrt{kx_k}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 ,
$$

võrdus saavutatakse siin, kui täpselt üks $x_i$ on nullist erinev.

## Lahendused

**4.** *Vastus:* jah.




Joonis 2

*Lahendus 1.* Kuna $OQ$ on lõigu $AD$ keskristsirge, siis $\angle QAD = \angle ADQ = \angle BDC = \angle CBD$ (vt joonist 2). Seega põiknurkadest $AQ \parallel BC$, mistõttu $\angle QAC = 180^\circ - \angle ACB = 90^\circ$. Kõõlnelinurga vastasnurkade suuruste summa on $180^\circ$, mistõttu ka $\angle CPQ = \angle PQA = 90^\circ$ ehk $ACPQ$ on ristkülik.

Kolmnurga $ACD$ ümberringjoone kõõlule $CD$ toetuva kesk- ja piirdenurga vahelisest seosest saame $\angle DOC = 2\angle DAC$. Seega

$$\begin{aligned}\angle DOC &= 2\angle BAC = 2(90^\circ - \angle CBA) = 180^\circ - 2\angle CBA = \\ &= 180^\circ - \angle CBD - \angle BDC = \angle DCB\,,\end{aligned}$$

mistõttu võrdhaarsed kolmnurgad $BDC$ ja $DCO$ on sarnased. Järelikult $\angle BDC = \angle DCO$ ehk $OC \parallel AB$, kust $\angle QOC = 90^\circ = \angle QAC$. Seega $O$ asub punktidega $A$, $C$, $P$, $Q$ samal ringjoonel. Siit

$$\angle ACQ = \angle AOQ = \frac{1}{2}\angle AOD = \frac{1}{2}\angle AOP = \frac{1}{2}\angle ACP.$$

Seega ristküliku $ACPQ$ diagonaal poolitab ristküliku nurga, mistõttu nelinurk $ACPQ$ on ruut.

*Lahendus 2.* Analoogiliselt eelmise lahendusega veendume, et $ACPQ$ on ristkülik (vt joonist 2). Tähistame $\tau = \angle BCD$ ning $\beta = \angle DBC$, siis kehtib võrdus $2\beta + \tau = 180^\circ$. Tarvis on veenduda, et $\tau = 45^\circ$.

Kuna punkt $O$ on kolmnurga $ADC$ ümberringjoone keskpunkt, siis

$$\begin{aligned}\angle ADO &= \angle DAO = 90^\circ - \beta + \angle OAC,\\ \angle CDO &= \angle DCO = 90^\circ - \tau + \angle OCA = 90^\circ - \tau + \angle OAC.\end{aligned}$$

Seega

$$180^\circ - \beta = \angle ADO + \angle CDO = 180^\circ - \beta - \tau + 2\angle OAC,$$

millest järeldub, et $\angle OAC = \dfrac{\tau}{2}$.

Nelinurk $APCO$ on kõõlnelinurk. Tõepoolest, $\angle APC = \tau$, kuna $ACPQ$ on ristkülik, ja $\angle AOC = 180^\circ - \tau$, sest $\angle OAC = \angle OCA = \dfrac{\tau}{2}$. Piirdenurkadest saame, et $\angle OPA = \angle OCA = \dfrac{\tau}{2}$, mistõttu ka $\angle CPO = \dfrac{\tau}{2}$. Kuna $\angle ODA = 90^\circ - \beta + \dfrac{\tau}{2} = \tau$, siis kolmnurgast $CDP$ leiame, et $\dfrac{5}{2}\tau + \beta = 180^\circ$.

Lahendades süsteemi

$$\begin{cases} 2\beta + \tau = 180^\circ, \\ \dfrac{5}{2}\beta + \tau = 180^\circ, \end{cases}$$

leiame, et $\tau = 45^\circ$ (ja $\beta = 67{,}5^\circ$).

*Märkus.* Lahendustest ilmneb, et *ainus* võimalik olukord, kus ülesande tingimused on täidetud, ongi juhtum, kus $\angle ABC = 67{,}5^\circ$.

**5.** *Vastus:* $\left(2^0 + 1, 2^1 + 1, 2^2 + 1, 2^3 + 1, 2^4 + 1\right)$.

Lihtne kontroll veenab, et $(2^0 + 1, 2^1 + 1, 2^2 + 1, 2^3 + 1, 2^4 + 1)$ on täiuslik järjend liikmete arvuga 5. Näitame järgnevas, et teisi täiuslikke järjendeid, mille liikmete arv oleks 5 või suurem, ei leidu.

Selleks olgu $(a^m + 1, a^{m+1} + 1, \dots, a^n + 1)$ suvaline täiuslik järjend, mille liikmete arv on vähemalt 5. Siis leidub astendajate $m, m+1, \dots, n$ seas vähemalt kaks paaritut arvu, olgu kaks suurimat neist $k$ ja $k+2$. Täiuslikkusest tulenevalt on liikmed $a^k + 1$ ja $a^{k+2} + 1$ mingite algarvude astmed, ent kuna neil liikmetel on ühistegur $a+1$, siis peavad need kaks liiget olema ühe ja sama algarvu $q$ astmed. Järelikult neist kahest suurem liige $a^{k+2}+1$ jagub väiksema liikmega $a^k+1$, mis näitab, et arvuga $a^k+1$ peab jaguma ka vahe $a^2\cdot(a^k+1)-(a^{k+2}+1)$ ehk arv $a^2-1$. Seega $a^k+1\leqslant a^2-1$, kust $k<2$. Et $k$ on paaritu, siis on ainus võimalus $k=1$. Vastavalt $k$ valikule on 1 ja 3 ainsad paaritud astendajad järjendis ning järjend on kujul $(a^0+1, a^1+1, a^2+1, a^3+1, a^4+1)$.

Kuna $a+1$ ja $a^3+1$ on sama algarvu $q$ astmed, siis ka suhe $\dfrac{a^3+1}{a+1}$ ehk $a^2-a+1$ on algarvu $q$ aste. Eeldusest $a>1$ ehk $a\geqslant 2$ tulenevalt $a^2-a+1\geqslant 2a-a+1=a+1$, mistõttu $a^2-a+1$ peab jaguma arvuga $a+1$. Seega vahe $(a^2-a+1)-(a+1)(a-2)$ ehk 3 jagub arvuga $a+1$. Siit saame ainsa võimalusena $a=2$.

**6.** *Lahendus 1.* Nimetame poisi ja tüdruku esmakordset suhtlust nende *tutvumiseks*. Poiste ja tüdrukute vahelisi tutvumisi 3 kuu jooksul on kokku $7\cdot 13=91$, seega leidub kuu, kus toimus vähemalt 31 tutvumist. Olgu poisid tähistatud $p_1$ kuni $p_7$ ja olgu $T_i$, $i=1,\dots,7$, tüdrukute hulk, kellega $p_i$ sellel kuul tutvus. Meil on vaja näidata, et leiduvad $i$ ja $j$, $i\neq j$, nii, et $T_i\cap T_j$ sisaldab vähemalt 2 tüdrukut.

Üldisust kitsendamata kehtigu ahelvõrratus $|T_1|\geqslant|T_2|\geqslant\ldots\geqslant|T_7|$. Vaatleme kahte juhtu.

1) Juht $|T_1|+|T_2|+|T_3|+|T_4|\geqslant 20$. Oletame väitevastaselt, et kõik ühisosad $T_1\cap T_2, T_1\cap T_3,\dots,T_3\cap T_4$ sisaldavad ülimalt ühe tüdruku. Olgu nendest mittetühjade ühisosade arv $k\leqslant 6$. Siis esimesed neli poissi tutvusid sellel kuul

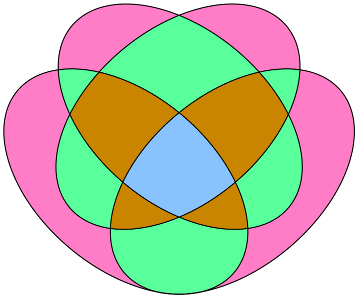
$$|T_1\cup T_2\cup T_3\cup T_4|\geqslant|T_1|+|T_2|+|T_3|+|T_4|-k\geqslant 20-6=14$$

tüdrukuga. Esimese võrratuse põhjenduseks piisab märgata, et joonisel 3 (ellipsite rollis on hulgad $T_i$) roosal ja rohelisel alal asuvad tüdrukud lähevad kõnealuse võrratuse paremal pool arvesse ühekordselt, pruunil alal asuvad tüdrukud arvesse ei lähe ning sinisel alal asuvad tüdrukud lähevad arvesse $(-2)$-kordselt.

Saime vastuolu, sest tüdrukuid on ainult 13.

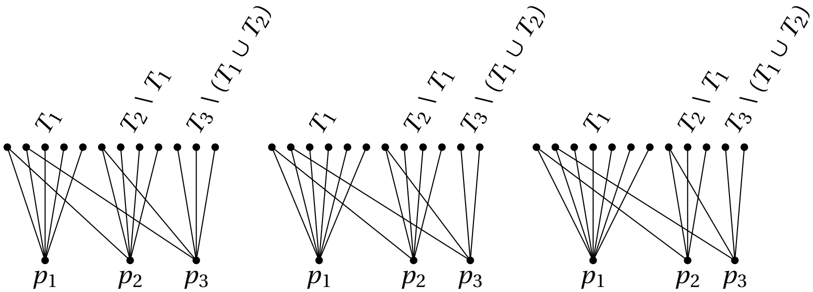
2) Juht $|T_1|+|T_2|+|T_3|+|T_4|\leqslant 19$. Kuna $|T_5|+|T_6|+|T_7|\geqslant 12$, siis $|T_5|\geqslant 4$. Samas $|T_4|\leqslant 4$. Seega $|T_4|=|T_5|=4$, mistõttu ka $|T_6|=|T_7|=4$. Nüüd $|T_1|+|T_2|+|T_3|=15$, et saada kogusummaks vähemalt 31.

Oletame väitevastaselt, et kõik ühisosad $T_i\cap T_j$, $i,j=1,\dots,7$, sisaldavad ülimalt ühe tüdruku. Kui poisid $p_1$, $p_2$ ja $p_3$ tutvusid sel kuul kokkuvõttes kõigi tüdrukutega, siis vähemalt üks ühisosadest $T_i\cap T_4$, $i=1,2,3$, peab sisaldama vähemalt kaht tüdrukut, vastuolu.



Joonis 3

Jääb üle võimalus, kui $|T_1| + |T_2 \setminus T_1| + |T_3 \setminus (T_1 \cup T_2)| = 15 - 1 - 2 = 12$ (joonisel 4 on toodud kõik variandid). Ainult sel juhul leidub tüdruk, ütleme $t_{13}$, kellega poistest $p_1, p_2, p_3$ keegi ei tutvunud. Muidugi tutvusid temaga kõik poisid $p_4$, $p_5$, $p_6$ ja $p_7$, lisaks tutvus igaüks neist ühe tüdrukuga hulkadest $T_1$, $T_2 \setminus T_1$ ja $T_3 \setminus (T_1 \cup T_2)$. Et aga viimane hulk sisaldab ülimalt kolme elementi, siis neist neljast poisist kaks tutvus sama tüdrukuga hulgast $T_3 \setminus (T_1 \cup T_2)$. Jälle vastuolu.




Joonis 4

*Lahendus 2.* Olgu kõigi kahest eri poisist koosnevate järjestamata paaride hulk $A$, siis hulgas $A$ on $\binom{7}{2} = 21$ elementi.

Ütleme, et tüdruk $t$ *määrab* poisipaari $\{p_1, p_2\} \in A$, kui tüdruk $t$ tutvus nii $p_1$ kui $p_2$-ga samal kuul. (Iga tüdruk saab mingit poisipaari määrata ülimalt ühe korra.) Paneme tähele, et kui $i$-ndal kuul tutvub tüdruk $t$ täpselt $n_i$ poisiga, $n_1 + n_2 + n_3 = 7$, siis $t$ määrab $\binom{n_1}{2} + \binom{n_2}{2} + \binom{n_3}{2}$ poisipaari.

Kuna funktsioon $f(x) = \dfrac{x(x-1)}{2}$ on kumer, siis Jenseni võrratuse kohaselt

$$\binom{n_1}{2} + \binom{n_2}{2} + \binom{n_3}{2} \geqslant 3 \cdot f\left(\frac{n_1+n_2+n_3}{3}\right) = 3 \cdot f\left(\frac{7}{3}\right) = 4\frac{2}{3}.$$

Et $\binom{n_1}{2} + \binom{n_2}{2} + \binom{n_3}{2}$ on täisarv, siis

$$\binom{n_1}{2} + \binom{n_2}{2} + \binom{n_3}{2} \geqslant 5.$$

Niisiis määravad kõik tüdrukud vähemalt $13 \cdot 5 = 65$ hulga $A$ elementi.

Kuna $65 \geqslant 3 \cdot 21 + 1$, siis Dirichlet' printsiibi kohaselt leidub poisipaar $\{p_1^*, p_2^*\}$, mida määratakse vähemalt 4 tüdruku poolt. Seega mingil kuul määratakse poisipaari $\{p_1^*, p_2^*\}$ vähemalt kahe tüdruku poolt.

*Märkus 1.* Ei poiste ega tüdrukute arvu ei saa vähendada nii, et ülesande väide jääks kehtima. Tähistame kuid tähtedega $A$, $B$ ja $C$.

Järgnevas tabelis on toodud 9 poisi ja 4 tüdrukuga konfiguratsioon, milles on märgitud, millal toimus tutvumine. Lihtne läbivaatus näitab, et ei leidu kaht poissi, kes tutvunuks kahe tüdrukuga samal kuul. Permuteerides kuid, saame koostada tabeli kokku 12 tüdrukuga nii, et ükski kaks poissi pole tutvunud kahe tüdrukuga samal kuul. Niisiis oleme leidnud $p \leqslant 9$ poisi ja 12 tüdrukuga konfiguratsiooni, mille jaoks ülesande väide ei kehti.

| | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ | $p_5$ | $p_6$ | $p_7$ | $p_8$ | $p_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_1$ | $A$ | $A$ | $A$ | $B$ | $B$ | $B$ | $C$ | $C$ | $C$ |
| $t_2$ | $A$ | $B$ | $C$ | $A$ | $B$ | $C$ | $A$ | $B$ | $C$ |
| $t_3$ | $A$ | $B$ | $C$ | $B$ | $C$ | $A$ | $C$ | $A$ | $B$ |
| $t_4$ | $A$ | $B$ | $C$ | $C$ | $A$ | $B$ | $B$ | $C$ | $A$ |

Anname ka 6 poisi ja 5 tüdrukuga konfiguratsiooni, mille korral ülesande väide ei kehti. Analoogiliselt permuteerides kuid, leiame seega 6 poisi ja $t \leqslant 15$ tüdrukuga konfiguratsiooni, mille jaoks ülesande väide ei kehti.

| | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ | $p_5$ | $p_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_1$ | $A$ | $A$ | $B$ | $B$ | $C$ | $C$ |
| $t_2$ | $A$ | $B$ | $B$ | $C$ | $C$ | $A$ |
| $t_3$ | $A$ | $B$ | $C$ | $A$ | $C$ | $B$ |
| $t_4$ | $A$ | $B$ | $A$ | $C$ | $B$ | $C$ |
| $t_5$ | $A$ | $B$ | $C$ | $B$ | $A$ | $C$ |

*Märkus 2.* Ülesanne on käesoleva aasta lõppvooru 10. klassi 4. ülesande uus variant, kus $5 \times 5$ tabeli asemel võetakse $7 \times 13$ tabel ja kahe värvi asemel kasutatakse kolme värvi.

## Hindamisskeemid

1. *(Kati Metsalu-Smotrova)*

   Iga skeemi järgi hindamisel ridade eest saadud punktid summeeriti.

   Lahendus, mis kasutab arvu 2002 algteguriteks lahutamist:
   - Idee: 2 p
   - Võimalike algarvude leidmine: 3 p
   - Leitud algarvude sobivuse kontroll: 2 p

   Lahendus, mis kasutab arvu $2013 - a_0$ võimalike väärtuste algteguriteks lahutusi:
   - Idee ja teguriteks lahutused: 3 p
   - Kõigi leitud algarvude sobivuse kontroll: 4 p

   Lahendus, kus kontrollitakse väiksemaid algarve, kuni ülejäänud algarvud on kaetavad lineaarvõrrandiga:
   - Väikeste algarvude kontroll: 4 p
   - Lineaarvõrrandi koostamine ja lahendamine: 3 p

2. *(Oleg Košik)*

   Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.
   - Juht $n = 3$: 1 p
   - Juht $n > 3$: 6 p

     *Sealhulgas tüüpiliste lahenduste eest:*
     - Näide $n = 4$ jaoks: *0 p*
     - Kasulik idee üldise konstruktsiooni jaoks, kuid konstruktsioon tervikuna ei tööta: *1 p*
     - Joonis $n = 11$ jaoks ilma vajalike lisaselgitusteta, mida annaks üldistada kõigi piisavalt suurte arvude $n$ jaoks: *2 p*
     - Žürii lahendusega sarnase ideega lahendus, kus üldistus suvalise $n$ jaoks pole piisavalt korralikult selgitatud: *4 p*

3. *(Urve Kangro)*

   Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.
   - Näidatud vasakpoolne võrratus: 2 p
   - Näidatud parempoolne võrratus: 4 p
   - Näidatud, et iga $n$ korral saab mõlemal pool kehtida võrdus: 1 p

   Kasulike tähelepanekute eest parempoolse võrratuse tõestamiseks sai üldjuhul ühe punkti.

## Hindamisskeemid

**4.** *(Härmel Nestra)*

Et igaühel oli üsna erisugune lähenemisviis, siis aditiivset skeemi pole mõtet anda. Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Täislahendus: 7 p
- Täislahendus aukudega põhjendustes: 5–6 p
- Tõestatud, et $ACPQ$ on ristkülik: 2 p
- Tõestatud, et $CO \parallel AB$: 2 p
- Leitud olulisi seoseid nurkade vahel, mis pole silmnähtavad: 1–2 p

Punkte ei saanud üksikute tähelepanekute eest nagu näiteks nurkade võrdused $\angle DBC = \angle BDC$, $\angle QDA = \angle QAD$, $\angle AQP = 90^\circ$ jne.

Juhin tähelepanu, et IMOl võidakse hinnata veelgi rangemalt. Mitmele õpilasele ma andsin punkte ka selliste nurkade arvutuste eest, mis olid jälgitavad ainult jooniselt, kuid IMOl tihti sellest ei piisa, seal võidakse põhimõtteliselt arvestada ainult tekstis toodud põhjendusi. Samuti ei oleks IMOl tõenäoliselt olnud ülaltoodud hindamisskeemi viimast rida — punkte antakse tihti vaid suuremate terviketappide läbiviimise eest, sihitud arvutused aga hinnatakse 0 punktiga.

**5.** *(Juhan Aru)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte alljärgnevalt.

- Täislahendus: 7 p
- Vigade või puudustega täislahendus: 5 p
- Õige vastus: 1 p

Mõni punkt anti ka edasiviivate tähelepanekute eest.

**6.** *(Ago-Erik Riet)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte alljärgnevalt.

- Täislahendus: 7 p
- Märgatav osa täislahendusest: 3 p
- Tähelepanek, et vähemalt 5 tüdrukut suhtles mingil kuul vähemalt 3 poisiga, koos üritusega edasi lahendada: 1 p